АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
АСТРОФИЗИКА

ТОМ 9 АВГУСТ, 1973 ВЫПУСК 3

МНОГОКРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ СВЕТА В ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ АТМОСФЕРАХ

В. В. ИВАНОВ, Ш. А. САБАШВИЛИ

Поступила 16 июля 1973

Перенос излучения в полубесконечной атмосфере рассматривается как процесс многократных рассеяний фотонов. Изучаются случаи, когда функция источников определяется интегральным уравнением с симметричным разностным ядром (изотропное монохроматическое рассеяние, перенос излучения в частотах спектральных линий и др.). При довольно общих предположениях относительно ядра уравнения и свободного члена получена асимптотика n-го члена разложения решения в ряд Неймана при $n \to \infty$.

1. *Введение.* Расчет поля излучения в полубесконечной атмосфере в широком классе случаев (изотропное и анизотропное монохроматическое рассеяние [1, 2], перенос излучения в спектральных линиях при отсутствии локального термодинамического равновесия (ЛТР) [3] и — при некоторых дополнительных предположениях — лучистый перенос тепла в несерых атмосферах с ЛТР [4, 5]) сводится к решению следующего интегрального уравнения:

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2}\int_0^\infty K(|\tau - \tau'|)\, S(\tau')\, d\tau' + S_0(\tau). \quad (1)$$

Здесь искомая функция $S(\tau)$ есть так называемая функция источников, $S_0(\tau)$ — заданная функция, описывающая распределение в атмосфере первичных источников фотонов, λ — вероятность выживания фотона при рассеянии, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, наконец, ядерная функция $K(\tau)$ такова, что

$$\int_0^\infty K(\tau)\,d\tau = 1, \tag{2}$$

причем $K(\tau) \geqslant 0$. Явный вид $K(\tau)$ определяется деталями взаимодействия излучения и вещества (индикатрисой рассеяния, профилем коэффициента поглощения в линии и т. п.), однако во всех случаях $K(\tau)$ является суперпозицией экспонент.

Наиболее прямой путь для нахождения функции источников состоит в последовательном учете рассеяний разных порядков, иначе говоря, в итеративном решении уравнения (1). В результате $S(\tau)$ представляется в виде ряда Неймана

$$S(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n S_n(\tau), \tag{3}$$

где

$$S_{n+1}(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^\infty K(|\tau-\tau'|)\,S_n(\tau')\,d\tau', \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{4}$$

Когда λ мало, этот способ очень эффективен. Однако если λ близко к единице, ряд Неймана сходится медленно, и непосредственное использование метода итераций становится затруднительным.

Медленная сходимость ряда (3) означает, что существенный вклад в его сумму дают далекие члены. Между тем, следует ожидать, что при больших n функции $S_n(\tau)$ упрощаются, принимая некоторую простую асимптотическую форму. Если ее удастся найти, учет далеких членов ряда (3) перестанет быть проблемой, и итеративное решение сделается эффективным также и при λ, мало отличающихся от единицы. Обсуждению этого и близких к нему вопросов и посвящена настоящая статья.

2. *Основные результаты.* Начнем с формулировки основных результатов, найденных в работе.

Обозначим

$$V(u) := \int_0^\infty K(\tau)\cos u\tau\,d\tau \tag{5}$$

и предположим, что $(u>0)$

$$1 - V(u) \sim u^{2\gamma}\varphi(u), \quad u \to 0, \tag{6}$$

где γ — некоторая постоянная, $0<\gamma\leqslant 1$, которую мы будем называть характеристическим показателем, и $\varphi(u)$ — функция, медленно меняющаяся в нуле, т. е. такая, что

$$\lim_{u\to 0}\frac{\varphi(au)}{\varphi(u)}=1, \quad 0<a<\infty. \tag{7}$$

В частности, φ может быть постоянной (чаще всего так именно и бывает). Во всех случаях, с которыми до сих пор приходилось иметь дело в теории переноса излучения, условие (6) выполнялось, так что оно не является каким-либо существенным ограничением.

Пусть, далее, $\widetilde{S}(\tau)$ — решение однородного уравнения

$$\widetilde{S}(\tau)=\frac{1}{2}\int_0^\infty K(|\tau-\tau'|)\widetilde{S}(\tau')\,d\tau' \tag{8}$$

с нормировкой $\widetilde{S}(0)=1$. Тогда, если в (1) источниковый член $S_0(\tau)$ таков, что интеграл

$$S^*=\int_0^\infty S_0(\tau)\widetilde{S}(\tau)\,d\tau \tag{9}$$

сходится, то при фиксированном τ и $n\to\infty$ имеет место асимптотическое представление

$$S_n(\tau)\sim S^*c(n)\widetilde{S}(\tau), \tag{10}$$

где

$$c(n)=\frac{1}{\pi}s\Gamma(s)\varphi^{-s}(n^{-s})\,n^{-(1+s)}, \qquad s\equiv\frac{1}{2\gamma}, \tag{11}$$

и $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера.

Формулой (10) выражается основной результат, найденный в работе. Приведем также два других полезных результата. Первый из них является основой вывода формулы (10), а второй — ее простым следствием.

Обозначим

$$H(z)=1+\int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{z}}\Phi(\tau)\,d\tau, \tag{12}$$

где $\Phi(\tau)$ — резольвентная функция уравнения (1), т. е. ограниченное при $\tau \to \infty$ решение уравнения

$$\Phi(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty K(|\tau - \tau'|)\, \Phi(\tau')\, d\tau' + \frac{\lambda}{2} K(\tau). \tag{13}$$

Важная роль H-функции в задачах о многократном рассеянии света в полубесконечных атмосферах хорошо известна (см., например, [2, 3, 6]).

Функцию $H(z)$ можно разложить в ряд Тейлора по λ.

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n H_n(z). \tag{14}$$

Оказывается, что при фиксированном z и $n \to \infty$ для $H_n(z)$ справедливо асимптотическое представление

$$H_n(z) \sim c(n)\, z H^0(z), \tag{15}$$

где $c(n)$ по-прежнему дается формулой (11) и через $H^0(z)$ обозначена H-функция для $\lambda = 1$. В этом состоит первый из упомянутых выше двух результатов.

Второй результат формулируется так. Пусть $S(\tau)$ и $S^0(\tau)$ — решения уравнения (1) при одном и том же свободном члене и вероятностях выживания фотона при рассеянии, равных соответственно λ и 1. Тогда, если интеграл (9) сходится, то при $1/2 > \gamma \geqslant 1$ для фиксированного τ и $\lambda \to 1$ имеет место асимптотическое представление

$$S(\tau) \sim S^0(\tau) - c_1(1-\lambda)\, S^* \bar{S}(\tau), \tag{16}$$

где

$$c_1(x) = \frac{1}{\sin \pi s} \left(\frac{x}{\varphi(x^s)} \right)^s, \qquad s \equiv \frac{1}{2\gamma}. \tag{17}$$

Наряду с выводом этих и близких к ним асимптотических формул мы рассматриваем их важнейшие частные случаи, указываем те работы, в которых ранее были получены различные специальные случаи приведенных только что общих выражений, и кратко обсуждаем связь асимптотик при $n \to \infty$ с нестационарной теорией переноса излучения.

3. *Разложение H-функции.* Как уже упоминалось, в основе всех наших результатов лежит даваемая (15) асимптотика n-го члена раз-

ложения H-функции по степеням λ. Ее получить сравнительно нетрудно, так как в явное выражение для H-функции зависимость от λ входит простым образом.

Исходим из хорошо известного интегрального представления H-функции (см., например, [6], § 40, [3], § 5.4):

$$\ln H(z) = -\frac{z}{\pi}\int_0^\infty \ln(1-\lambda V(u))\frac{du}{1+z^2u^2}. \tag{18}$$

Дифференцируя его по λ и пользуясь (14), получаем

$$\sum_{n=1}^\infty nH_n(z)\lambda^{n-1} = zH(z)\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{V(u)}{1-\lambda V(u)}\frac{du}{1+z^2u^2}. \tag{19}$$

Рассмотрим поведение интеграла в правой части при $z=\text{const}$ и $\lambda\to 1$, предполагая, что характеристический показатель $\gamma > 1/2$. В этом случае при $\lambda\to 1$, как легко видеть, интеграл расходится. Найдем главный расходящийся член. Основной вклад в интеграл при $1-\lambda \ll 1$ дает область малых u. В этой области $V(u)$ в знаменателе подынтегрального выражения можно заменить асимптотикой (6), а множитель $V(u)/(1+z^2u^2)$ положить равным единице, и рассматриваемый интеграл оказывается асимптотически равен

$$I(\lambda) = \int_0^1 \frac{du}{1-\lambda+u^{2\gamma}\varphi(u)}. \tag{20}$$

Положим здесь $u=(1-\lambda)^s x^s$, где $s=1/2\gamma$, и воспользуемся тем, что в силу (7) $\varphi((1-\lambda)^s x^s) \sim \varphi((1-\lambda)^s)$ при $\lambda\to 1$. В результате получим

$$I(\lambda) \sim \frac{s}{(1-\lambda)^{1-s}}\int_0^{(1-\lambda)^{-1}} \frac{x^{s-1}dx}{1+\varphi((1-\lambda)^s)x}, \tag{21}$$

откуда

$$I(\lambda) \sim \frac{\pi s}{\sin \pi s}(1-\lambda)^{s-1}[\varphi(1-\lambda)^s]^{-s} \equiv \pi f(1-\lambda). \tag{22}$$

Вводя эту асимптотику вместо интеграла в правую часть (19), находим, что если $1 \geqslant \gamma > 1/2$, то при $z=\text{const}$ и $\lambda\to 1$

$$\sum_{n=1}^\infty nH_n(z)\lambda^{n-1} \sim zH^0(z)f(1-\lambda). \tag{23}$$

Мы заменили также в правой части $H(z)$ на $H^0(z)$, т. е. на предельное значение H-функции при $\lambda=1$, что, разумеется, можно сделать в пределах той точности, с которой мы ведем сейчас вычисления (удерживаются лишь члены, расходящиеся при $\lambda \to 1$).

Из расходимости при $\lambda \to 1$ правой части в (23) следует, что когда λ близко к единице, основной вклад в сумму стоящего слева ряда дают далекие члены. Из факта разделения переменных z и λ в правой части (23) вытекает тогда асимптотическое представление $H_n(z)$ в форме (15), с неизвестным пока $c(n)$. Вводя это выражение для $H_n(z)$ в левую часть (23), находим, что асимптотически при $\lambda \to 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc(n)\lambda^{n-1} \sim f(1-\lambda). \tag{24}$$

Далее, при $1-\lambda \ll 1$ мы имеем $\lambda^n = [1-(1-\lambda)]^n \sim \exp[-(1-\lambda)n]$. Пользуясь этим и заменяя суммирование интегрированием, приходим к асимптотическому соотношению

$$\int_0^{\infty} e^{-(1-\lambda)x} c(x)\, x dx \sim f(1-\lambda), \quad \lambda \to 1, \tag{25}$$

которое можно рассматривать как интегральное уравнение для $c(x)$. Непосредственной подстановкой в это уравнение убеждаемся, что его решение есть

$$c(x) = \frac{1}{\pi} s\Gamma(s)\, \varphi^{-1/s}(x^{-1/s})\, x^{-(1+s)}, \tag{26}$$

что и устанавливает справедливость (15) для $1 \geqslant \gamma > 1/2$.

Применимость (15) с $c(n)$, даваемым (11), также и для $0 < \gamma \leqslant 1/2$ можно доказать сходным образом. Отличие от вывода для случая $\gamma > 1/2$ состоит в следующем: вместо (19) следует исходить из соотношения, которое получается из (18), если его продифференцировать по λ не один, а $[1/2\gamma]+1$ раз, где $[1/2\gamma]$ — целая часть $1/2\gamma$.

4. *Разложения решения основного уравнения*. В этом разделе дается вывод основного результата работы — формулы (10), а также разложения (16).

Начнем с рассмотрения резольвентной функции $\Phi(\tau)$. Ее разложение в ряд Тейлора по λ есть

$$\Phi(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \Phi_n(\tau). \tag{27}$$

Подставляя (27) и (14) в (12), имеем

$$H_n(z) = \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{z}} \Phi_n(\tau)\, d\tau, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{28}$$

Это соотношение позволяет по найденной в предыдущем разделе асимптотике $H_n(z)$ при $n \to \infty$ получить соответствующую асимптотику $\Phi_n(\tau)$. Пользуясь тем, что, как известно, (см., например, [3], § 5.6)

$$zH^0(z) = \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{z}} \tilde{S}(\tau)\, d\tau, \tag{29}$$

из (28) и (15) находим ($\tau = \text{const}$, $n \to \infty$)

$$\Phi_n(\tau) \sim c(n)\tilde{S}(\tau). \tag{30}$$

Пусть, далее, $\Gamma(\tau, \tau')$ — резольвента уравнения (1), т. е. решение этого уравнения со свободным членом $(\lambda/2)K(|\tau - \tau'|)$. Мы имеем

$$\Gamma(\tau, \tau') = \sum_{n=1}^\infty \lambda^n \Gamma_n(\tau, \tau'), \tag{31}$$

где

$$\Gamma_1(\tau, \tau') = \frac{1}{2} K(|\tau - \tau'|), \tag{32}$$

$$\Gamma_{n+1}(\tau, \tau') = \frac{1}{2}\int_0^\infty K(|\tau - t|)\Gamma_n(t, \tau')\, dt, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{33}$$

причем

$$\Gamma_n(\tau, \tau') = \Gamma_n(\tau', \tau). \tag{34}$$

Легко убедиться, что при $n \to \infty$ имеет место асимптотическое представление

$$\Gamma_n(\tau, \tau') \sim c(n)\tilde{S}(\tau)\tilde{S}(\tau'). \tag{35}$$

Оно получается из (33), если воспользоваться (8). При этом следует учесть симметрию Γ_n относительно τ и τ', а также принять во внимание, что $\Gamma_n(\tau, 0) = \Phi_n(\tau) \sim c(n)\tilde{S}(\tau)$ (см. (30)).

Имея (35), получить (10) уже просто. По определению резольвенты

$$S(\tau) = S_0(\tau) + \int_0^\infty S_0(\tau') \Gamma(\tau, \tau') \, d\tau'. \qquad (36)$$

Вводя сюда разложения S и Γ из (3) и (31) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, находим

$$S_n(\tau) = \int_0^\infty S_0(\tau') \Gamma_n(\tau, \tau') \, d\tau', \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (37)$$

Подстановка (35) в (37) приводит к искомому соотношению (10).

Переходим к изучению поведения $S(\tau)$ при $\lambda \to 1$. Обозначим через $S(\tau)$ и $S^0(\tau)$ ограниченные на бесконечности решения уравнения (1) при одном и том же свободном члене $S_0(\tau)$ и вероятностях выживания фотона при рассеянии, равных соответственно λ и 1. Из (3) находим тогда

$$S(\tau) = S^0(\tau) - \sum_{n=0}^\infty (1 - \lambda^n) S_n(\tau). \qquad (38)$$

Но при $1 - \lambda \ll 1$ мы имеем $\lambda^n \sim \exp[-(1-\lambda) n]$, так что

$$S(\tau) \sim S^0(\tau) - \sum_{n=0}^\infty (1 - e^{-(1-\lambda)n}) S_n(\tau). \qquad (39)$$

Если $1/2 < \gamma \leqslant 1$ и λ близко к единице, основной вклад в сумму этого ряда дают далекие члены, а в них вместо $S_n(\tau)$ можно подставить асимптотику (10). Заменяя суммирование интегрированием, вместо (39) находим окончательно

$$S(\tau) \sim S^0(\tau) - c_*(1 - \lambda) S^* \tilde{S}(\tau), \qquad (40)$$

где обозначено

$$c_*(x) = \int_0^\infty (1 - e^{-xt}) \, c(t) \, dt. \qquad (41)$$

Чтобы доказать (16), нам осталось убедиться, что $c_*(x) \sim c_1(x)$ при $x \to 0$, где $c_1(x)$ дается формулой (17). Из (41) находим, учитывая (26) и (7),

$$c_*'(x) \sim \frac{s\Gamma(s)}{\pi} \int_0^\infty e^{-xt} t^{-s} \frac{dt}{[\varphi(t^{-s})]^s} \sim \frac{s}{\sin \pi s} [\varphi(x^s)]^{-s} x^{s-1}, \qquad x \to 0, \tag{42}$$

откуда при учете вытекающего из (41) условия $c_*(0) = 0$ и следует, что $c_*(x) \sim c_1(x)$ при малых x. Представление (16) тем самым доказано.

5. *Частные случаи.* Для применений наибольший интерес представляет случай, когда $S_0(\tau) = e^{-\tau/z}$. Решение уравнения (1) при таком свободном члене мы будем обозначать $S(\tau, z)$, т. е.

$$S(\tau, z) = \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty K(|\tau - \tau'|) S(\tau', z) d\tau' + e^{-\frac{\tau}{z}}. \tag{43}$$

Интерес к этому случаю связан с двумя обстоятельствами. Во-первых, при изотропном рассеянии (как монохроматическом, так и в частотах линии) $S(\tau, z)$ пропорциональна функции источников в задаче о диффузном отражении от полубесконечной среды. Во-вторых, $S(\tau, z)$ лишь на постоянный множитель отличается от вероятности выхода фотона с глубины τ (после любого числа рассеяний). Обсуждение относящихся к этому вопросов см., например, в [1], гл. III и VI, и в [3], гл. V и VI.

Согласно (9) и (29), в рассматриваемом случае

$$S^* = zH^0(z), \tag{44}$$

так что формулы (10) и (16) принимают вид

$$S_n(\tau, z) \sim c(n) zH^0(z) \tilde{S}(\tau), \tag{45}$$

$$S(\tau, z) = S^0(\tau, z) - c_1(1 - \lambda) zH^0(z) \tilde{S}(\tau). \tag{46}$$

Обозначим, далее,

$$\rho_n(z, z_0) zz_0 = \frac{1}{4} \int_0^\infty S_n(\tau, z_0) e^{-\frac{\tau}{z}} d\tau, \tag{47}$$

$$\rho(z, z_0) = \sum_{n=0}^\infty \lambda^{n+1} \rho_n(z, z_0). \tag{48}$$

Учитывая (45) и (46), находим

$$\rho_n(z, z_0) = \frac{1}{4} c(n) H^0(z) H^0(z_0), \tag{49}$$

$$\rho(z, z_0) = \rho^0(z, z_0) - \frac{1}{4} c_1(1-\lambda) H^0(z) H^0(z_0), \tag{50}$$

где через ρ^0 обозначена функция ρ при $\lambda = 1$. Величина $\rho(z, z_0)$ есть коэффициент отражения полубесконечной среды, а $\rho_{n'-1}(z, z_0)$ — вклад в коэффициент отражения, даваемый n-кратно рассеянными фотонами.

Чтобы получить явные выражения для величин $c(n)$ и $c_1(1-\lambda)$, входящих в полученные выше асимптотические выражения, нужно конкретизировать вид ядра $K(\tau)$. Рассмотрим наиболее интересные примеры.

В классическом случае изотропного монохроматического рассеяния

$$K(\tau) = E_1(\tau) = \int_0^1 e^{-\frac{\tau}{\mu}} \frac{d\mu}{\mu}. \tag{51}$$

Здесь

$$V(u) = \int_0^\infty E_1(\tau) \cos u\tau d\tau = \frac{1}{u} \operatorname{arctg} u = 1 - \frac{1}{3} u^2 + \ldots, \tag{52}$$

так что $\gamma = 1$, $\varphi = 1/3$, и

$$c(n) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}\, n^{3/2}}, \qquad c_1(1-\lambda) = \sqrt{3(1-\lambda)}. \tag{53}$$

При рассеянии излучения в частотах линии с профилем коэффициента поглощения $\alpha(x)$ имеем (см., например, [3], гл. II)

$$K(\tau) = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) E_1(\alpha(x)\tau) dx, \tag{54}$$

где A — нормировочная постоянная:

$$A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) dx = 1.$$

Если профиль доплеровский, т. е. $\alpha(x) = e^{-x^2}$, то

$$V(u) = 1 - \frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\ln\frac{1}{u}\right)^{-1/2} u + \ldots, \quad u \to 0, \tag{55}$$

так что в этом случае $\gamma = 1/2$, $\varphi(u) = (\sqrt{\pi}/4)(\ln 1/u)^{-1/2}$, и поэтому, согласно (11),

$$c(n) = \frac{4}{\pi^{3/2}}\frac{\sqrt{\ln n}}{n^2}. \tag{56}$$

При лоренцовском профиле $\alpha(x) = (1 + x^2)^{-1}$ мы имеем

$$V(u) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{3}u^{1/2} + \ldots, \quad u \to 0 \tag{57}$$

т. е. $\gamma = 1/4$, $\varphi = \sqrt{2}/3$, так что

$$c(n) = \frac{9}{\pi}\frac{1}{n^3}. \tag{58}$$

Если про коэффициент поглощения $\alpha(x)$ известно лишь, что вдали от центра линии, при достаточно больших $|x|$, он убывает степенным образом, так что $\alpha(x) \sim W|x|^{-\varkappa}$, где W и $\varkappa$ — некоторые постоянные, $W > 0$, $\varkappa > 1$, то этой информации оказывается достаточно, чтобы получить $c(n)$. Можно показать, что в этом случае $\gamma = (\varkappa - 1)/2\varkappa$, $\varphi = \mathrm{const}$, и поэтому $c(n) \propto n^{-(2\varkappa-1)/(\varkappa-1)}$. В частности, если коэффициент поглощения фойгтовский, т. е.

$$\alpha(x) = \frac{U(a, x)}{U(a, 0)}, \tag{59}$$

где $U(a, x)$ — нормированная функция Фойгта:

$$U(a, x) = \frac{a}{\pi^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-y^2}\,dy}{(x-y)^2 + a^2} \tag{60}$$

и a — фойгтовский параметр, то

$$\alpha(x) \sim \frac{a}{U(a, 0)\sqrt{\pi}}\frac{1}{x^2}, \qquad |x| \to \infty. \tag{61}$$

В этом случае $\varkappa = 2$, $\varphi = [(2\pi a U(a, 0)]^{1/2}/3$ (см. [3], § 2.7), и поэтому (10) дает

$$c(n) = \frac{9}{\pi^2 a\, U(a, 0)}\frac{1}{n^3}. \tag{62}$$

В литературе имеется ряд результатов, близких к полученным нами или являющихся их частными случаями. В работе Т. Малликина [7] была получена асимптотика $H_n(z)$ при $n \to \infty$ для случая монохроматического рассеяния, т. е. формула (15) с $c(n)$ из (53). Асимптотики по n при анизотропном монохроматическом рассеянии исследовались А. Уэсуги и В. Ирвином [8] и Х. ван де Хюлстом [9]. В частном случае изотопного рассеяния из выражений, найденных в [8] и [9], следуют наши формулы (53). Единственными известными нам публикациями по теории переноса в частотах спектральных линий, в которых изучается вклад рассеяний высоких порядков, являются статьи Дж. Финна [10—12]. Хотя строгие асимптотики по n в них найдены не были, полученные полуэмпирические формулы (в значительной мере основанные на анализе численных данных) близки к результату, выражаемому формулой (45). В частном случае фойгтовского профиля из результатов [11] следует, в согласии с (62), что $c(n)$ убывает как n^{-3}, однако коэффициент пропорциональности в [11] найден не был. Согласно [10], при доплеровском профиле $c(n) \approx b/n^2$, где b — некоторая постоянная, тогда как строгое выражение дается (56). Как и следовало ожидать, выявить присутствие медленно меняющегося множителя $(\ln n)^{1/2}$ по численным данным Дж. Финну не удалось.

Следует обратить внимание на существование тесной связи между асимптотиками при $n \to \infty$, найденными в настоящей работе, и асимптотическим поведением решений нестационарного уравнения переноса для частот линий при $t \to \infty$ [13, 14]. Общее правило соответствия асимптотик по n и t состоит в следующем: асимптотики по n переходят в асимптотики по t, если считать, что на одно рассеяние фотон тратит время, равное времени свободного пробега фотона центральной частоты линии. Это правило было установлено в [8] для частного случая монохроматического рассеяния, однако оно остается в силе и при произвольном ядре $K(\tau)$ вида (54).

В соответствии с этим правилом, полагая в (30) $n = t$, приходим к асимптотике резольвентной функции нестационарного уравнения переноса. В частном случае $\tau \gg 1$ она дает выражение, полученное ранее в [13] гораздо более сложным способом (формула (78) работы [13]).

Несколько слов об области применимости найденных нами асимптотик по n. Формально они получены для $\tau = \text{const}$ и $n \to \infty$. Практическая область применимости формулы (10) различна при разных τ. С ростом τ значение n, начиная с которого формула (10) работает, возрастает. Если $\tau \gg 1$, этим выражением можно пользоваться лишь для $n \gg \tau^{2\gamma}$. Впрочем, при больших τ особой нужды в получении $S_n(\tau)$ нет, поскольку, как хорошо известно (см., например [3]), асимптотику решения $S(\tau)$ при больших τ можно найти, не прибегая к разложению этого решения в ряд Неймана.

Ленинградский государственный университет
Тбилисский государственный университет

MULTIPLE LIGHT SCATTERING IN SEMI-INFINITE ATMOSPHERES

V. V. IVANOV, S. A. SABASHVILI

Radiative transfer in semi-infinite atmosphere is considered as a process of multiple scatterings of photons. It is assumed that the source function is determined by an integral equation with symmetric displacement kernel (isotropic monochromatic scattering, transfer of radiation in spectral lines etc.). Under rather mild assumptions on the kernel and the free term of the equation, the asymptotic form of the n-th term of the Neumann series expansion of its solution is found for $n \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, ГИТТЛ, М., 1956.
2. *В. В. Соболев*, Рассеяние света в атмосферах планет, Наука, М., 1972.
3. *В. В. Иванов*, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
4. *J. C. Stewart, I. Kuščer, N. J. McCormick*, Ann. Phys., 40, 321, 1966.
5. *A. L. Crosbie, R. Viskanta*, J. Quantit. Spectrosc. Radiat. Transfer, 10, 487, 1970.
6. *С. Чандрасекар*, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.
7. *T. W. Mullikin*, J. Appl. Probabil., 5, 357, 1968.
8. *A. Uesugi, W. M. Irvine*, Ap. J., 159, 127, 1970.
9. *H. C. van de Hulst*, Astron. Astrophys., 9, 374, 1971.
10. *G. D. Finn*, J. Quantit. Spectrosc. Radiat. Transfer, 12, 35, 1972.
11. *G. D. Finn*, J. Quantit. Spectrosc. Radiat. Transfer, 12, 149, 1972.
12. *G. D. Finn*, J. Quantit. Spectrosc. Radiat. Transfer, 12, 1217, 1972.
13. *Д. И. Нагирнер*, Астрофизика, 5, 31, 1969.
14. *Ю. Ю. Абрамов, А. П. Напартович*, Астрофизика, 4, 195, 1968.