

# АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

# АСТРОФИЗИКА

ТОМ 9

МАЙ, 1973

ВЫПУСК 2

## МНОГОКРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ РЕЗОНАНСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛОСКОМ СЛОЕ И ШАРЕ

Ш. А. САБАШВИЛИ

Поступила 26 марта 1973

Пересмотрена 14 мая 1973

Интегральные уравнения (8) и (9) для функций  $Q(\tau, \tau_0)$  и  $R(\tau, \tau_0)$ , описывающих многократное рассеяние света в плоском слое и шаре, численно решаются в случае рассеяния в резонансной линии. Предполагается полное перераспределение излучения по частотам при элементарном акте рассеяния при доплеровском коэффициенте поглощения в линии. Результаты представлены в виде таблиц и графиков для ряда значений оптической толщины  $\tau_0$  и вероятности выживания фотона  $\lambda$ . Указываются возможные применения функций  $Q$  и  $R$  в астрофизике (определение среднего числа рассеяний фотонов в плоском слое и шаре, вычисление функций  $X(z, \tau_0)$  и  $Y(z, \tau_0)$  и др.).

1. *Постановка задачи и основные уравнения.* Как известно, расчет поля излучения в рассеивающей среде и, в частности, нахождение интенсивности выходящего из среды излучения, сводится к решению интегрального уравнения для функции источников. Вид этого уравнения, точнее, форма ядра и свободного члена, зависит от геометрии среды, от ее оптических свойств, определяемых характером элементарных процессов, происходящих при рассеянии, и от граничных условий для конкретной задачи, т. е. фактически от распределения первичных источников излучения внутри среды. После решения этого уравнения легко определяются все величины, описывающие поле излучения в данной среде.

Наиболее часто рассматривается и довольно подробно изучена задача о рассеянии света в плоском слое. В этом случае интегральное

уравнение переноса для излучения в частотах спектральной линии, которое мы и будем рассматривать в данной работе, имеет следующий вид (см., например, [1]):

$$S(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau} K(|\tau - \tau'|) S(\tau', \tau_0) d\tau' + S_*(\tau). \quad (1)$$

Здесь  $\tau$  и  $\tau_0$  представляют собой, соответственно, оптическую глубину рассматриваемой точки и оптическую толщину слоя в центре линии;  $S(\tau, \tau_0)$  — функция источников, т. е. отношение коэффициентов поглощения и излучения в линии;  $S_*(\tau)$  — функция, которая описывает распределение в среде первичных источников излучения;  $\lambda$  — вероятность выживания фотона при элементарном акте рассеяния, которую мы примем не зависящей от пространственных координат. При аналогичном предположении относительно профиля коэффициента поглощения в линии в случае полного перераспределения излучения по частотам при рассеянии ядерная функция  $K(\tau)$  имеет вид:

$$K(\tau) = A \int_{-\infty}^{\infty} a^2(x) E_1[a(x)\tau] dx, \quad (2)$$

где  $E_1(\tau)$  — первая интегрально-показательная функция.

Профиль коэффициента поглощения  $a(x)$ , где  $x$  — безразмерная частота (расстояние от центра линии в доплеровских ширинах), нормирован так, что  $a(0) = 1$ ; нормировочная постоянная  $A$  определяется условием:

$$A \int_{-\infty}^{\infty} a(x) dx = 1. \quad (3)$$

Функция  $K(\tau)$  может быть представлена также в форме [1]

$$K(\tau) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z}} G(z) \frac{dz}{z}, \quad (4)$$

где

$$G(z) = 2A \int_{x(z)}^{\infty} a^2(x') dx'. \quad (5)$$

Здесь  $x(z)$  — неотрицательная функция, определяемая соотношениями:

$$\begin{aligned} x(z) &= 0, & z < 1, \\ \alpha(x(z)) &= \frac{1}{z}, & z > 1. \end{aligned} \quad (6)$$

В данной статье мы рассматриваем случай доплеровского коэффициента поглощения в линии:

$$\alpha(x) = e^{-x^2}. \quad (7)$$

В этом случае  $A = \pi^{-\frac{1}{2}}$ .

В теории многократного рассеяния света важную роль играют функции  $Q(\tau, \tau_0)$  и  $R(\tau, \tau_0)$ , введенные В. В. Соболевым [2, 3]. Они удовлетворяют уравнениям, которые являются частными видами уравнения (1), именно,

$$Q(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) Q(\tau', \tau_0) d\tau' + 1 \quad (8)$$

и

$$R(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) R(\tau', \tau_0) d\tau' + \tau. \quad (9)$$

Через эти функции можно выразить, в частности, среднее число рассеяний фотонов в плоском слое и шаре (см. ниже). Поэтому представляется необходимым их изучение и, в частности, табулирование.

Целью данной работы является получение численных решений уравнений (8) и (9) и применение полученных результатов к некоторым астрофизическим задачам. Этим определяется и структура статьи — мы сначала приведем результаты вычисления указанных функций, а затем остановимся на применениях.

2. *Вычисление функций  $Q$  и  $R$ .* Функции  $Q(\tau, \tau_0)$  и  $R(\tau, \tau_0)$  наиболее детально изучены для случая монохроматического рассеяния. В работах [2] и [3] исследованы их аналитические свойства и, в частности, выведены асимптотические формулы для  $Q(\tau, \tau_0)$  при больших  $\tau_0$ . Для небольших значений оптической толщины  $\tau_0$  эти функции табулированы в [4] и [5]. В последней работе показано, в частности, что имеющиеся асимптотические формулы обеспечивают высокую точность уже при  $\tau_0$  порядка 5.

Свойства функции  $Q(\tau, \tau_0)$  для случая рассеяния в линии изучаются в работе В. В. Соболева [6]. В ней выводятся некоторые неравенства для этой функции и асимптотические формулы, справедливые при  $\tau_0 \gg 1$ . Более детальное исследование асимптотик для случая рассеяния в частотах линии было дано Д. И. Нагирнером [7, 8]; (см. также [1], гл. VIII). В статье Эвретта и Хаммера [9] приводятся результаты численного решения уравнения (8) в случае доплеровского коэффициента поглощения в линии для значений  $\tau_0$  в весьма широком интервале. Отметим также, что в работе [10] уравнение переноса излучения в плоском слое (1) и его решение приближенно записаны в конечно-разностной матричной форме, а в [11] приводятся матрицы, с помощью которых можно, задавая распределение первичных источников излучения, находить приближенное значение функции источников в некоторых фиксированных точках  $\tau$  для ряда значений  $\tau_0$  от 1 до 100. Таким путем можно находить, в частности, и функции  $Q(\tau, \tau_0)$  и  $R(\tau, \tau_0)$ .

Однако подробных таблиц функций  $Q$  и  $R$  пока нет. Кроме того, не изучен вопрос о точности, обеспечиваемой имеющимися асимптотическими формулами.

Мы вычислили функции  $Q(\tau, \tau_0)$  и  $R(\tau, \tau_0)$  для  $\lambda = 0.6; 0.8; 0.9; 0.95, 1.00$  и нескольких значений  $\tau_0$  в интервале от 1 до 60. Уравнения (8) и (9) решались итерационно-вариационным методом на машине БЭСМ-3М ВЦ АГУ. Программу предоставил в наше распоряжение Д. И. Нагирнер, которому автор приносит за это свою благодарность.

Контроль вычислений функции  $Q(\tau, \tau_0)$  осуществлялся, в частности, сравнением результатов с численными данными, имеющимися в [12]. В этой работе, посвященной исследованию влияния формы линии на характер процесса переноса излучения в консервативном плоском слое конечной оптической толщины, в частности вычислен нулевой момент  $\beta_0$  функции  $Y(z, \tau_0)$  (см. [1], гл. VIII)

$$\beta_0(\tau_0) = \int_0^{\infty} Y(z, \tau_0) G(z) dz \quad (10)$$

для разных коэффициентов поглощения в линии, в том числе и для доплеровского профиля. Можно показать, что при  $\lambda = 1$

$$Q(0, \tau_0) \beta_0(\tau_0) = 1. \quad (11)$$

Мы сравнили вычисленные нами  $1/Q(0, \tau_0)$  со значениями  $\beta_0$ , приве-

денными в [12]. Для  $\tau_0 \leq 20$  они совпадают друг с другом с тремя значащими цифрами; для  $\tau_0 = 50$  расхождение достигает нескольких процентов.

Превосходным контролем точности вычислений служит также проверка того, насколько точно выполняется следующее соотношение, выражающее функцию  $Q$  через  $R$ :

$$Q(\tau, \tau_0) = \frac{1}{\tau_0} [R(\tau, \tau_0) + R(\tau_0 - \tau, \tau_0)]. \quad (12)$$

Эту формулу можно получить, например, так. Заменяя в (9)  $\tau$  на  $\tau_0 - \tau$  и  $\tau'$  на  $\tau_0 - t$ , получаем

$$R(\tau_0 - \tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - t|) R(\tau_0 - t, \tau_0) dt + \tau_0 - \tau. \quad (13)$$

Складывая (13) и (9) и сравнивая результат с (8), приходим к (12).

Фактически, как показывает (12), в решении уравнения для  $Q$  нет нужды — достаточно найти функцию  $R$ . Если, однако, получать численным решением соответствующих уравнений и  $Q$  и  $R$ , как это делаем мы, и проверять выполнение соотношения (12), мы будем иметь хороший контроль.

Для вычисленных нами  $Q$  и  $R$  обе части (12) при  $\tau_0 \leq 35$  и  $\lambda = 1$  (худший случай) совпадают с тремя знаками. В пределах той же точности выполняется и интегральное соотношение

$$\int_0^{\tau_0} Q(\tau, \tau_0) \tau d\tau = \int_0^{\tau_0} R(\tau, \tau_0) d\tau, \quad (14)$$

вытекающее из (12).

Найденные нами значения функций  $R(\tau, \tau_0)$  для  $\tau_0 = 1, 3, 5$  и нескольких значений  $\lambda$  (0.6; 0.8; 0.9; 0.95 и 1.0) приведены в табл. 1—3. Значения  $Q(\tau, \tau_0)$  мы не даем, так как их легко получить с помощью (12) по приводимым в таблицах значениям  $R$ . На рис. 1 и 2 даны графики функций  $\tau_0/2 Q(\tau, \tau_0)$  и  $R(\tau, \tau_0)$  для  $\tau_0 = 10$  и 20 и  $\lambda = 0.6; 0.8; 0.9; 0.95$ . Функции  $Q$  и  $R$  при консервативном рассеянии ( $\lambda = 1$ ) и любых не слишком малых  $\tau_0$  можно найти с помощью результатов, представленных в графической форме на рис. 3 и 4. На них даны кривые  $Q(\tau, \tau_0)/Q(\tau_0/2, \tau_0)$  и  $R(\tau, \tau_0)/R(\tau_0/2, \tau_0)$  в функции  $\tau/\tau_0$  для  $\tau_0 = 3, 5$  и  $\infty$ . Прежде чем переходить к вопросу о том, каким путем получены предельные кривые, соответствующие  $\tau_0 = \infty$ , следует подчеркнуть, что приведенные кривые позволяют проводить ин-

| $\lambda \backslash \tau$ | 0.6               |                            |                   |
|---------------------------|-------------------|----------------------------|-------------------|
|                           | $R(\tau, \tau_0)$ | $R(\tau_0 - \tau, \tau_0)$ | $R(\tau, \tau_0)$ |
| 0.00                      | 0.108             | 1.20                       | 0.174             |
| 0.05                      | 0.172             | 1.19                       | 0.248             |
| 0.10                      | 0.236             | 1.16                       | 0.320             |
| 0.15                      | 0.299             | 1.12                       | 0.391             |
| 0.20                      | 0.363             | 1.07                       | 0.463             |
| 0.25                      | 0.427             | 1.02                       | 0.534             |

Таблица 1

ФУНКЦИЯ  $R$  ПРИ  $\tau_0=1$ 

| 0.8                      |                   | 0.9                      |                   | 0.95                     |                   | 1.0                      |                   |
|--------------------------|-------------------|--------------------------|-------------------|--------------------------|-------------------|--------------------------|-------------------|
| $R(\tau_0-\tau, \tau_0)$ | $R(\tau, \tau_0)$ |
| 1.31                     | 0.218             | 1.37                     | 0.244             | 1.41                     | 0.273             | 1.45                     |                   |
| 1.31                     | 0.298             | 1.39                     | 0.328             | 1.43                     | 0.361             | 1.48                     |                   |
| 1.28                     | 0.376             | 1.37                     | 0.408             | 1.42                     | 0.445             | 1.47                     |                   |
| 1.25                     | 0.452             | 1.34                     | 0.488             | 1.39                     | 0.527             | 1.44                     |                   |
| 1.21                     | 0.528             | 1.30                     | 0.566             | 1.35                     | 0.609             | 1.41                     |                   |
| 1.16                     | 0.604             | 1.26                     | 0.644             | 1.31                     | 0.690             | 1.36                     |                   |
| 1.11                     | 0.678             | 1.21                     | 0.721             | 1.26                     | 0.769             | 1.32                     |                   |
| 1.06                     | 0.752             | 1.15                     | 0.797             | 1.20                     | 0.847             | 1.26                     |                   |
| 1.00                     | 0.824             | 1.09                     | 0.871             | 1.14                     | 0.923             | 1.20                     |                   |
| 0.938                    | 0.894             | 1.03                     | 0.942             | 1.08                     | 0.996             | 1.14                     |                   |
| 0.875                    | 0.962             | 0.962                    | 1.01              | 1.01                     | 1.07              | 1.07                     |                   |

Таблица 2

ФУНКЦИЯ  $R$  ПРИ  $\tau_0=3$ 

| $\tau$ | $\lambda$ | 0.6               |                            | 0.8               |                            | 0.9               |                            | 0.95              |                            | 1.0               |                            |
|--------|-----------|-------------------|----------------------------|-------------------|----------------------------|-------------------|----------------------------|-------------------|----------------------------|-------------------|----------------------------|
|        |           | $R(\tau, \tau_0)$ | $R(\tau_0 - \tau, \tau_0)$ |
| 0.0    |           | 0.377             | 4.05                       | 0.765             | 4.79                       | 1.13              | 5.36                       | 1.39              | 5.75                       | 1.75              | 6.24                       |
| 0.1    |           | 0.547             | 4.20                       | 1.02              | 5.12                       | 1.45              | 5.83                       | 1.77              | 6.31                       | 2.20              | 6.91                       |
| 0.2    |           | 0.714             | 4.24                       | 1.25              | 5.26                       | 1.74              | 6.06                       | 2.11              | 6.60                       | 2.60              | 7.28                       |
| 0.3    |           | 0.882             | 4.23                       | 1.48              | 5.33                       | 2.03              | 6.20                       | 2.44              | 6.79                       | 2.98              | 7.53                       |
| 0.4    |           | 1.05              | 4.18                       | 1.71              | 5.35                       | 2.31              | 6.28                       | 2.76              | 6.91                       | 3.35              | 7.70                       |
| 0.5    |           | 1.22              | 4.12                       | 1.93              | 5.34                       | 2.59              | 6.31                       | 3.07              | 6.97                       | 3.71              | 7.81                       |
| 0.6    |           | 1.39              | 4.04                       | 2.16              | 5.29                       | 2.87              | 6.30                       | 3.38              | 6.99                       | 4.07              | 7.86                       |
| 0.7    |           | 1.56              | 3.95                       | 2.39              | 5.22                       | 3.14              | 6.26                       | 3.68              | 6.96                       | 4.41              | 7.87                       |
| 0.8    |           | 1.73              | 3.84                       | 2.61              | 5.13                       | 3.41              | 6.18                       | 3.98              | 6.91                       | 4.75              | 7.84                       |
| 0.9    |           | 1.90              | 3.72                       | 2.83              | 5.02                       | 3.67              | 6.09                       | 4.27              | 6.82                       | 5.08              | 7.77                       |
| 1.0    |           | 2.07              | 3.60                       | 3.05              | 4.89                       | 3.93              | 5.97                       | 4.56              | 6.71                       | 5.39              | 7.67                       |
| 1.1    |           | 2.23              | 3.47                       | 3.27              | 4.75                       | 4.18              | 5.82                       | 4.83              | 6.57                       | 5.70              | 7.54                       |
| 1.2    |           | 2.40              | 3.33                       | 3.48              | 4.60                       | 4.42              | 5.67                       | 5.10              | 6.41                       | 5.99              | 7.38                       |
| 1.3    |           | 2.56              | 3.18                       | 3.68              | 4.43                       | 4.66              | 5.49                       | 5.35              | 6.23                       | 6.27              | 7.20                       |
| 1.4    |           | 2.72              | 3.03                       | 3.88              | 4.26                       | 4.88              | 5.30                       | 5.59              | 6.04                       | 6.53              | 7.00                       |
| 1.5    |           | 2.88              | 2.88                       | 4.07              | 4.07                       | 5.10              | 5.10                       | 5.82              | 5.82                       | 6.77              | 6.77                       |

Таблица 3

ФУНКЦИЯ  $R$  ПРИ  $\tau_0=5$ 

| $\lambda$ | 0.6               |                          | 0.8               |                          | 0.9               |                          | 0.95              |                          | 1.0               |                          |
|-----------|-------------------|--------------------------|-------------------|--------------------------|-------------------|--------------------------|-------------------|--------------------------|-------------------|--------------------------|
|           | $R(\tau, \tau_0)$ | $R(\tau_0-\tau, \tau_0)$ |
| 0.0       | 0.553             | 7.07                     | 1.29              | 8.74                     | 2.14              | 10.2                     | 2.88              | 11.4                     | 4.08              | 13.8                     |
| 0.1       | 0.747             | 7.45                     | 1.62              | 9.50                     | 2.64              | 11.3                     | 3.53              | 12.7                     | 4.97              | 14.7                     |
| 0.2       | 0.934             | 7.63                     | 1.91              | 9.93                     | 3.07              | 12.0                     | 4.08              | 13.6                     | 5.70              | 15.8                     |
| 0.4       | 1.31              | 7.78                     | 2.50              | 10.4                     | 3.89              | 12.9                     | 5.10              | 14.7                     | 7.06              | 17.4                     |
| 0.6       | 1.69              | 7.79                     | 3.09              | 10.7                     | 4.69              | 13.4                     | 6.09              | 15.5                     | 8.35              | 18.5                     |
| 0.8       | 2.07              | 7.70                     | 3.67              | 10.8                     | 5.48              | 13.7                     | 7.06              | 16.0                     | 9.59              | 19.3                     |
| 1.0       | 2.46              | 7.54                     | 4.25              | 10.8                     | 6.26              | 13.9                     | 8.01              | 16.3                     | 10.8              | 19.8                     |
| 1.2       | 2.85              | 7.34                     | 4.83              | 10.6                     | 7.03              | 13.8                     | 8.93              | 16.4                     | 12.0              | 20.1                     |
| 1.4       | 3.24              | 7.10                     | 5.40              | 10.4                     | 7.79              | 13.7                     | 9.82              | 16.3                     | 13.1              | 20.2                     |
| 1.6       | 3.63              | 6.82                     | 5.97              | 10.2                     | 8.52              | 13.5                     | 10.7              | 16.1                     | 14.1              | 20.1                     |
| 1.8       | 4.02              | 6.52                     | 6.52              | 9.83                     | 9.23              | 13.2                     | 11.5              | 15.8                     | 15.1              | 19.9                     |
| 2.0       | 4.40              | 6.20                     | 7.07              | 9.45                     | 9.92              | 12.8                     | 12.3              | 15.4                     | 16.1              | 19.5                     |
| 2.2       | 4.78              | 5.86                     | 7.59              | 9.03                     | 10.6              | 12.3                     | 13.1              | 14.9                     | 16.9              | 19.0                     |
| 2.4       | 5.15              | 5.51                     | 8.10              | 8.58                     | 11.2              | 11.8                     | 13.8              | 14.4                     | 17.7              | 18.4                     |
| 2.5       | 5.33              | 5.33                     | 8.34              | 8.34                     | 11.5              | 11.5                     | 14.1              | 14.1                     | 18.1              | 18.1                     |

терполяцию по  $\tau_0$  и получать надежные оценки  $Q$  и  $R$  практически для всех  $\tau_0 \geq 3$ . Что касается значений  $Q(\tau_0/2, \tau_0)$  и  $R(\tau_0/2, \tau_0)$ , то их в этой области можно получить по приводимым ниже асимптотическим формулам.

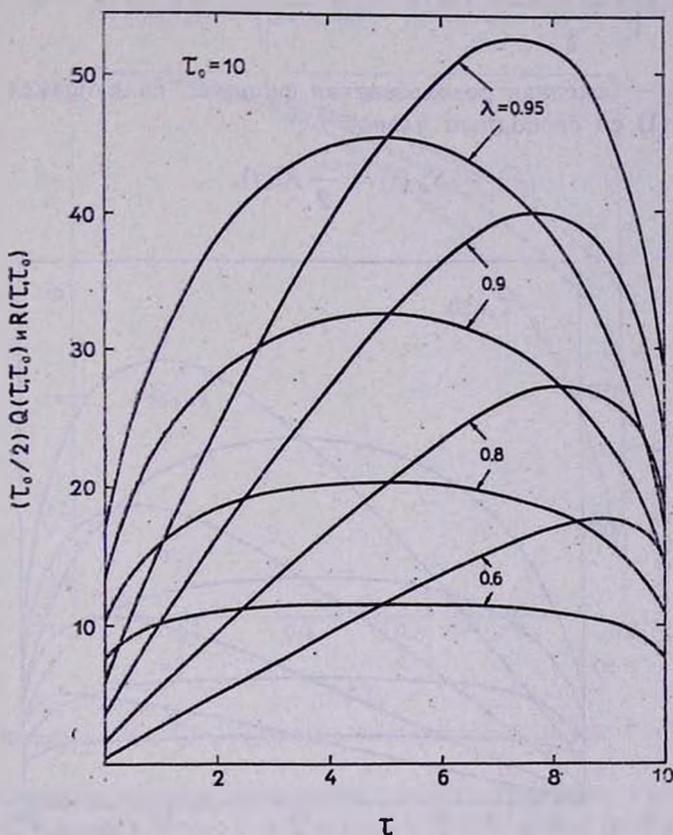


Рис. 1. Функции  $(\tau_0/2) Q(\tau, \tau_0)$  (симметричные кривые) и  $R(\tau, \tau_0)$  (несимметричные кривые) при  $\tau_0 = 10$  и  $\lambda < 1$ .

Переходим к вопросу о предельных кривых, соответствующих  $\tau_0 = \infty$ .

Будем исходить из формул (22) и (23) работы [3]. Из них легко получить, что

$$Q(\tau, \tau_0) = Q(0, \tau_0) \left[ 1 + \int_0^{\tau} \Phi(\tau', \tau_0) d\tau' - \int_0^{\tau} \Phi(\tau_0 - \tau', \tau_0) d\tau' \right]. \quad (15)$$

$$R(\tau, \tau_0) = R(0, \tau_0) \left[ 1 + \int_0^{\tau} \Phi(\tau', \tau_0) d\tau' \right] - R(\tau_0, \tau_0) \int_0^{\tau} \Phi(\tau_0 - \tau', \tau_0) d\tau' +$$

$$+ Q(0, \tau_0) \left[ \tau + \int_0^{\tau} (\tau - \tau') \Phi(\tau', \tau_0) d\tau' - \int_0^{\tau} (\tau - \tau') \Phi(\tau_0 - \tau', \tau_0) d\tau' \right],$$
(16)

где  $\Phi(\tau, \tau_0)$  — основная резольвентная функция, являющаяся решением уравнения (1) со свободным членом

$$S_*(\tau) = \frac{\lambda}{2} K(\tau). \quad (17)$$

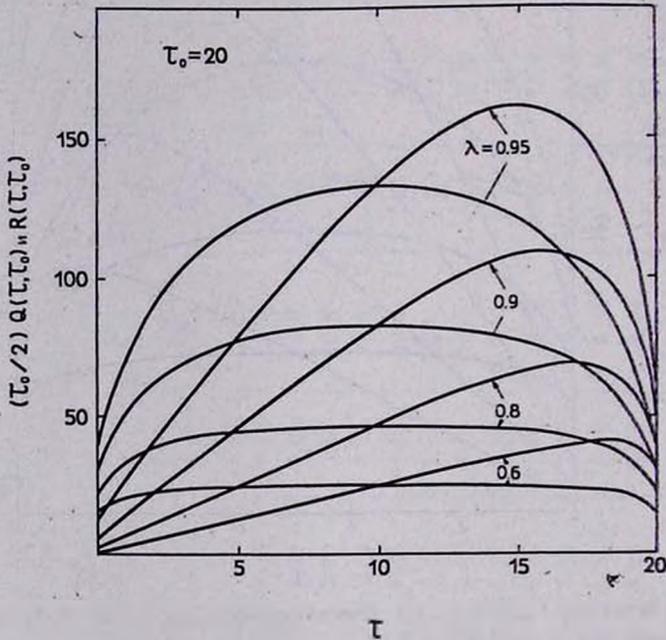


Рис. 2. Функции  $(\tau_0/2) Q(\tau, \tau_0)$  (симметричные кривые) и  $R(\tau, \tau_0)$  (несимметричные кривые) при  $\tau_0 = 20$  и  $\lambda < 1$ .

Используя выражения функций  $Q$  и  $R$  через резольвенту уравнения (1), легко получить, что

$$R(0, \tau_0) = \int_0^{\tau_0} \tau \Phi(\tau, \tau_0) d\tau \quad (18)$$

и

$$Q(0, \tau_0) = Q(\tau_0, \tau_0) = 1 + \int_0^{\tau_0} \Phi(\tau, \tau_0) d\tau. \quad (19)$$

Кроме того, из соотношения (12) следует, что

$$R(\tau_0, \tau_0) = \tau_0 Q(0, \tau_0) - R(0, \tau_0). \quad (20)$$

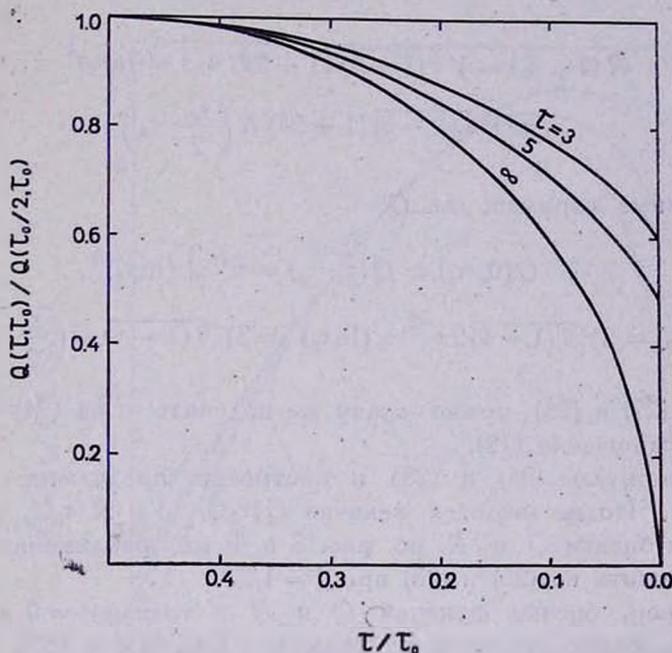


Рис. 3. Функции  $Q(\tau, \tau_0)/Q(\tau_0/2, \tau_0)$  в консервативном случае ( $\lambda=1$ ).

Воспользуемся теперь известным асимптотическим представлением  $\Phi(\theta\tau_0, \tau_0)$  при  $\tau_0 \rightarrow \infty$ ,  $\theta = \text{const}$ ,  $0 < \theta < 1$  (см., например, [8])

$$\Phi(\theta\tau_0, \tau_0) = \theta^{\gamma-1} (1-\theta)^{\gamma} \tau_0^{\gamma-1} [\Gamma(\gamma) \sqrt{\varphi(1/\tau_0)}]^{-1}, \quad (21)$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция Эйлера. В рассматриваемом нами случае, когда профиль доплеровский, имеем

$$\gamma = \frac{1}{2}, \quad \varphi\left(\frac{1}{\tau_0}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} (\ln \tau_0)^{-\frac{1}{2}}, \quad (22)$$

и поэтому

$$\Phi(\theta\tau_0, \tau_0) = 2\pi^{-\frac{3}{4}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} \theta^{-\frac{1}{2}} \tau_0^{-\frac{1}{2}} (\ln \tau_0)^{\frac{1}{4}}. \quad (23)$$

Подставляя (23) в (15), (16) и (18)—(20), после несложных вычислений получаем следующие асимптотические формулы для функции  $R$ :

$$R(0, \tau_0) = \frac{1}{4} \pi^{\frac{1}{2}} \tau_0^{-\frac{3}{2}} (\ln \tau_0)^{\frac{1}{2}}, \quad (24)$$

$$R(\tau_0, \tau_0) = \frac{3}{4} \pi^{\frac{1}{2}} \tau_0^{\frac{3}{2}} (\ln \tau_0)^{\frac{1}{2}}, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} R(\theta\tau_0, \tau_0) &= \sqrt{\theta(1-\theta)} (1+2\theta) \pi^{-\frac{1}{2}} \tau_0^2 (\ln \tau_0)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \sqrt{\theta(1-\theta)} (1+2\theta) R\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right) \end{aligned} \quad (26)$$

и аналогичные формулы для  $Q$ :

$$Q(0, \tau_0) = Q(\tau_0, \tau_0) = \pi^{\frac{1}{2}} \tau_0^{\frac{1}{2}} (\ln \tau_0)^{\frac{1}{2}}, \quad (27)$$

$$Q(\theta\tau_0, \tau_0) = 2\sqrt{\theta(1-\theta)} 2\pi^{-\frac{1}{2}} \tau_0 (\ln \tau_0)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\theta(1-\theta)} Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right). \quad (28)$$

Формулы (27) и (28) можно сразу же получить и из (24)—(26) с помощью соотношения (12).

По формулам (26) и (28) и построены предельные кривые на рис. 3 и 4. Что же касается величин  $Q(\tau_0/2, \tau_0)$  и  $R(\tau_0/2, \tau_0)$ , необходимых для оценки  $Q$  и  $R$  по рис. 3 и 4, их приближенное значение можно находить по (26) и (28) при  $\theta = 1/2$ .

Наконец, оценки функций  $Q$  и  $R$  в точках  $\tau = 0$  и  $\tau = \tau_0$  для больших  $\tau_0$  можно получить по формулам (24), (25) и (27).

Перейдем теперь к обсуждению важнейших применений вычисленных функций.

3. *Число рассеяний фотона в плоском слое и шаре.* Знание функций  $Q(\tau, \tau_0)$  и  $R(\tau, \tau_0)$  дает возможность легко определить среднее число рассеяний фотона в рассеивающей среде. Как показал В. В. Соболев [2], функция  $Q(\tau, \tau_0)$  численно равна среднему числу рассеяний фотона, рождающегося на оптической глубине  $\tau$  в плоском слое оптической толщины  $\tau_0$ , в течение всего процесса диффузии до выхода через границы или гибели в среде. Решение уравнения (8) непосредственно дает эту важную величину.

Из сказанного следует, что через функцию  $Q(\tau, \tau_0)$  должно выражаться и усредненное по всей среде число рассеяний фотона при любом распределении в ней первичных источников излучения  $S_*(\tau)$ . Эта величина, обозначаемая через  $Q^*$ , дается формулой

$$Q^* = \frac{\int_0^{\tau_0} Q(\tau, \tau_0) S_*(\tau) d\tau}{\int_0^{\tau_0} S_*(\tau) d\tau}. \quad (29)$$

Таким образом, знание  $Q(\tau, \tau_0)$  дает возможность простым интегрированием определить среднее число рассеяний фотона при диффузии в плоском слое для любой задачи.

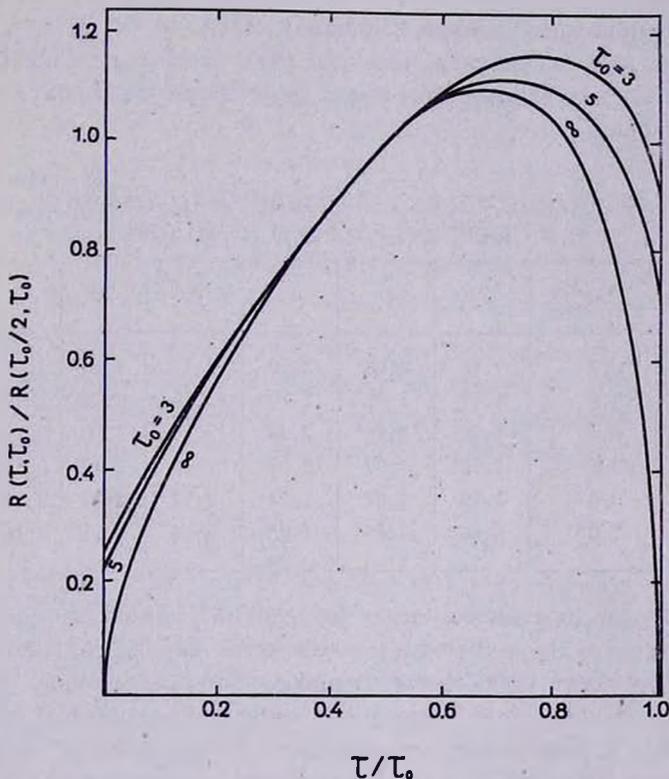


Рис. 4. Функции  $R(\tau, \tau_0)/R(\tau_0/2, \tau_0)$  в консервативном случае ( $\lambda=1$ ).

Через функции  $Q$  и  $R$  можно выразить и среднее число рассеяний фотона, рождающегося в однородном шаре оптического радиуса  $\tau_0$  на оптическом расстоянии  $\tau$  от центра шара. Обозначим эту величину через  $Q_{sp}(\tau, \tau_0)$ . Она удовлетворяет уравнению

$$\tau Q_{sp}(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} [K(|\tau - \tau'| - K(\tau + \tau'))] \tau' Q_{sp}(\tau', \tau_0) d\tau' + \tau. \quad (30)$$

Как показал В. В. Соболев [3], имеют место соотношения:

$$\tau Q_{sp}(\tau, \tau_0) = \tau_0 Q(\tau_0 - \tau, 2\tau_0) - R(\tau_0 - \tau, 2\tau_0) \quad (31)$$

и

$$2\tau Q_{sp}(\tau, \tau_0) = R(\tau_0 + \tau, 2\tau_0) - R(\tau_0 - \tau, 2\tau_0). \quad (32)$$

Таким образом, число рассеяний фотона в шаре оптического радиуса  $\tau_0$  выражается через функции  $Q$  и  $R$  для плоского слоя оптической толщины  $2\tau_0$ .

На основе полученных значений  $Q(\tau, \tau_0)$  и  $R(\tau, \tau_0)$  функцию  $Q_{sp}(\tau, \tau_0)$  можно вычислить как по (31), так и по (32). Совпадение результатов, полученных по этим двум формулам, служит контролем вычислений.

Таблица 4

ОТНОШЕНИЕ ЧИСЕЛ РАССЕЯНИЙ В ПЛОСКОМ СЛОЕ  
И В СФЕРЕ  $Q(\tau_0 - \tau, 2\tau_0)/Q_{sp}(\tau, \tau_0)$  ПРИ  $\lambda=1$

| $\tau/\tau_0$ \ $2\tau_0$ | 2    | 4    | 6    | 10   | 20   | 35   |
|---------------------------|------|------|------|------|------|------|
| 0.0                       | 1.78 | 2.02 | 2.10 | 2.17 | 2.19 | 2.18 |
| 0.2                       | 1.77 | 2.02 | 2.10 | 2.16 | 2.18 | 2.17 |
| 0.4                       | 1.76 | 2.00 | 2.09 | 2.16 | 2.18 | 2.17 |
| 0.6                       | 1.75 | 1.97 | 2.07 | 2.15 | 2.17 | 2.17 |
| 0.8                       | 1.72 | 1.94 | 2.04 | 2.12 | 2.17 | 2.16 |
| 1.0                       | 1.66 | 1.85 | 1.95 | 2.04 | 2.11 | 2.16 |

Интересно сравнить число рассеяний фотона в сфере оптического радиуса  $\tau_0$  и в плоском слое оптической толщины  $2\tau_0$ . Очевидно, что следует сопоставлять между собой значения  $Q(\tau_0 - \tau, 2\tau_0)$  и  $Q_{sp}(\tau, \tau_0)$ . В табл. 4 и 5 мы даем такое сравнение. Как и следовало ожидать, при  $\lambda$ , близком к единице, число рассеяний в сфере заметно меньше числа рассеяний в плоском слое соответствующей толщины. Заслуживает внимания также то, что при  $\lambda=1$  отношение этих двух величин мало зависит от  $\tau$  и в пределе при  $\tau_0 \rightarrow \infty$  стремится к постоянной.

4. *Энергетический баланс непрозрачных сред.* Полученные результаты можно применять также при рассмотрении энергетического баланса сред, в которых происходит поглощение и рассеяние излучения. Очевидно, что скорость выхода энергии наружу определяется

относительной ролью поглощения и рассеяния. Последняя же непосредственно определяется значением  $\lambda$  и средним числом рассеяний. В самом деле,  $Q(\tau, \tau_0)$  — это среднее число рассеяний фотона, возникающего на глубине  $\tau$  в плоском слое толщины  $\tau_0$ . Вероятность выживания такого фотона при одном рассеянии равна  $\lambda$ , поэтому ве-

Таблица 5  
ЗНАЧЕНИЯ  $Q(0, 2\tau_0)/Q_{\text{ср}}(\tau_0, \tau_0)$  И  $Q(\tau_0, 2\tau_0)/Q_{\text{ср}}(0, \tau_0)$

| $2\tau_0$ | $\lambda$ | $Q(0, 2\tau_0)/Q_{\text{ср}}(\tau_0, \tau_0)$ |      |      |      | $Q(\tau_0, 2\tau_0)/Q_{\text{ср}}(0, \tau_0)$ |      |      |      |
|-----------|-----------|---|------|------|------|---|------|------|------|
|           |           | 0.6   | 0.8  | 0.9  | 0.95 | 0.6   | 0.8  | 0.9  | 0.95 |
| 2         |           | 1.22  | 1.37 | 1.49 | 1.57 | 1.25  | 1.43 | 1.58 | 1.67 |
| 4         |           | 1.19  | 1.37 | 1.54 | 1.67 | 1.21  | 1.42 | 1.62 | 1.78 |
| 6         |           | 1.15  | 1.32 | 1.51 | 1.68 | 1.15  | 1.35 | 1.57 | 1.79 |
| 10        |           | 1.11  | 1.24 | 1.42 | 1.62 | 1.09  | 1.23 | 1.43 | 1.66 |
| 20        |           | 1.06  | 1.15 | 1.28 | 1.45 | 1.03  | 1.10 | 1.23 | 1.42 |
| 35        |           | 1.04  | 1.09 | 1.18 | 1.31 | 1.02  | 1.04 | 1.11 | 1.24 |

роятность его гибели в расчете на одно рассеяние есть  $1 - \lambda$ . Полная вероятность его гибели до выхода из среды, т. е. после  $Q(\tau, \tau_0)$  рассеяний, будет, очевидно,  $(1 - \lambda) Q(\tau, \tau_0)$ , а суммарная вероятность его выживания равна  $1 - (1 - \lambda) Q(\tau, \tau_0)$ . Обозначим последнюю величину через  $P(\tau, \tau_0)$ :

$$P(\tau, \tau_0) = 1 - (1 - \lambda) Q(\tau, \tau_0). \quad (33)$$

Она дает полную вероятность выхода из среды фотона, возникшего на глубине  $\tau$ . Иначе говоря,  $P(\tau, \tau_0)$  есть доля энергии, затрачиваемой первичными источниками излучения на возбуждение верхнего уровня, которая покидает среду. Величина же  $(1 - \lambda) Q(\tau, \tau_0)$  есть доля той же энергии, которая возвращается в среду в виде тепловой энергии в результате действия диссипативных процессов.

Из приведенных рассуждений ясно, что диссипативная способность среды как целого определяется величиной  $(1 - \lambda) Q^*$ , где  $Q^*$  дается формулой (29). Именно, если  $(1 - \lambda) Q^* \ll 1$ , то среда мало диссипативна, если же  $P^* \equiv 1 - (1 - \lambda) Q^* \ll 1$ , она сильно диссипативна. Величина  $P^*$  дает усредненную по всему изучаемому объему вероятность выхода наружу энергии, затрачиваемой во всей среде на возбуждение. Очевидно, что приведенные только что рассуждения справедливы для среды любой геометрии, если только под  $Q^*$  понимать число рассеяний для данной среды.

Интересно проследить зависимость величины  $P(\tau, \tau_0)$  от параметра  $\lambda$ . На рис. 5 в качестве иллюстрации мы приводим график такой зависимости в случае плоского слоя оптической толщины  $\tau_0 = 10$  для  $\tau = 0; 0.5; 1.25; 2.5$  и  $5$ .

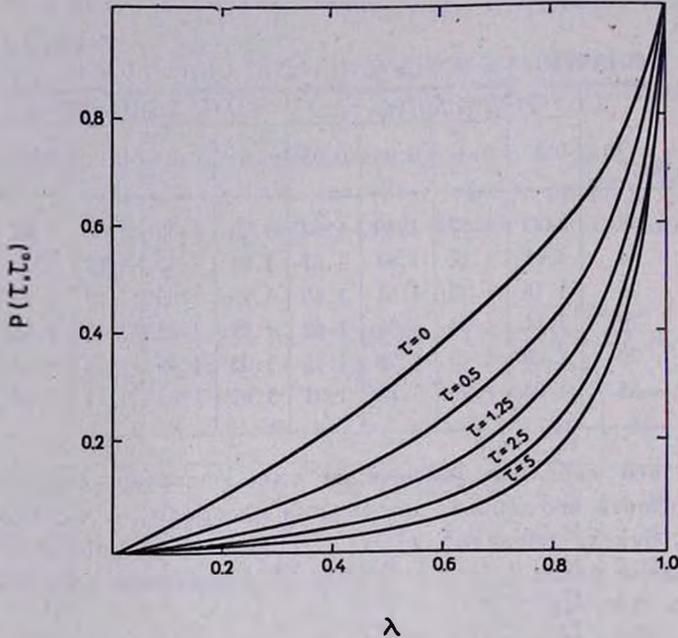


Рис. 5. Зависимость функции  $P(\tau, \tau_0)$  от  $\lambda$  при  $\tau_0 = 10$  для разных  $\tau$ .

До сих пор считалось, что в рассматриваемых средах поглощением в непрерывном спектре можно пренебречь. Если это не так, задача существенно усложняется. Из физических соображений очевидно, что диссипативность среды должна возрасти. Обозначим через  $\beta$  вероятность гибели фотона с частотой центра спектральной линии из-за поглощения в непрерывном спектре в расчете на единицу пути. Пусть средняя длина траектории фотона, рождающегося на глубине  $\tau$  в слое толщины  $\tau_0$ , есть  $T(\tau, \tau_0)$ . Очевидно, что при  $\beta \neq 0$  полная вероятность выхода фотона с глубины  $\tau$  равна

$$P(\tau, \tau_0) = 1 - (1 - \lambda) Q(\tau, \tau_0) - \beta T(\tau, \tau_0). \quad (34)$$

Можно показать, что значения  $T(\tau, \tau_0)$  отличаются от значений  $Q(\tau, \tau_0)$  не более, чем вдвое. Поэтому знание  $Q$  позволяет получить надежную оценку  $T$ ; подробнее об этом см. [13].

5. Связь с функциями  $X$  и  $Y$ . Значения  $Q(\tau, \tau_0)$  и  $R(\tau, \tau_0)$  можно использовать также для нахождения функций  $X(z, \tau_0)$  и  $Y(z, \tau_0)$ , через которые выражается интенсивность излучения, выходящего из плоского слоя. Они являются аналогами функций, введенных В. А. Амбарцумяном [14] при монохроматическом рассеянии. Свойства этих функций и выражения интенсивностей излучения через них см., например, в [1], гл. VIII.

Исходим из уравнений (15) и (16), переписав последнее из них в виде

$$R(\tau, \tau_0) = R(0, \tau_0) \left[ 1 + \int_0^{\tau} \Phi(\tau', \tau_0) d\tau' \right] - \\ - R(\tau_0, \tau_0) \int_0^{\tau} \Phi(\tau_0 - \tau', \tau_0) d\tau' + \int_0^{\tau} Q(\tau', \tau_0) d\tau'. \quad (35)$$

Известно, что функции  $X(z, \tau_0)$  и  $Y(z, \tau_0)$  выражаются через  $\Phi(\tau, \tau_0)$  следующим образом:

$$X(z, \tau_0) = 1 + \int_0^{\tau_0} \Phi(\tau, \tau_0) e^{-\tau/z} d\tau \quad (36)$$

$$Y(z, \tau_0) = e^{-\tau_0/z} + \int_0^{\tau_0} \Phi(\tau_0 - \tau, \tau_0) e^{-\tau/z} d\tau. \quad (37)$$

Умножая (15) и (35) на  $e^{-\tau/z}$  и интегрируя по  $\tau$  от 0 до  $\tau_0$ , с учетом (36), (37) и (12) получим:

$$Q(0, \tau_0)[X(z, \tau_0) - Y(z, \tau_0)]z = \frac{1}{\tau_0} [r(z, \tau_0) + s(z, \tau_0)], \quad (38)$$

$$R(0, \tau_0)X(z, \tau_0) - R(\tau_0, \tau_0)Y(z, \tau_0) = -\frac{1}{\tau_0} s(z, \tau_0) + \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{\tau_0} \right) r(z, \tau_0), \quad (39)$$

где введены обозначения

$$r(z, \tau_0) = \int_0^{\tau_0} R(\tau, \tau_0) e^{-\tau/z} d\tau, \quad (40)$$

$$s(z, \tau_0) = \int_0^z R(\tau_0 - \tau, \tau_0) e^{-\tau/z} d\tau, \quad (41)$$

Для получения (39) надо воспользоваться выведенной в [3] формулой

$$[R(\tau_0, \tau_0) - R(0, \tau_0)] Q(0, \tau_0) = \int_0^z Q(\tau, \tau_0) d\tau. \quad (42)$$

Из (38) и (39) находим

$$X(z, \tau_0) = [R(\tau_0, \tau_0) - R(0, \tau_0)]^{-1} \times \\ \times \left\{ \left\{ \frac{1}{\tau_0} + \frac{R(\tau_0, \tau_0)}{z[R(0, \tau_0) + R(\tau_0, \tau_0)]} \right\} [r(z, \tau_0) + s(z, \tau_0)] - \frac{r(z, \tau_0)}{z} \right\}, \quad (43)$$

$$Y(z, \tau_0) = X(z, \tau_0) - \frac{r(z, \tau_0) + s(z, \tau_0)}{z[R(0, \tau_0) + R(\tau_0, \tau_0)]}. \quad (44)$$

Формулы (40), (41) и (43), (44) и дают искомые выражения функций  $X$  и  $Y$  через  $Q(\tau, \tau_0)$  и  $R(\tau, \tau_0)$ .

6. *Оценка точности приближенной формулы.* Полученные результаты можно использовать и для проверки точности, обеспечиваемой имеющимися приближенными формулами. Недавно В. В. Ивановым [15] было предложено следующее приближенное выражение для функции  $Q(\tau, \tau_0)$ :

$$Q^a(\tau, \tau_0) = [1 - \lambda + \lambda L(\tau)]^{-\frac{1}{2}} [1 - \lambda + \lambda L(\tau_0 - \tau)]^{-\frac{1}{2}} \quad (45)$$

(буква  $a$  указывает на приближенный характер формулы), где функция  $L(\tau)$  связана с ядром основного интегрального уравнения (1) следующим образом:

$$L(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} K(\tau') d\tau'. \quad (46)$$

Согласно [15], значения  $Q$ , вычисленные на основе формулы (45), по-видимому, должны отличаться от истинных значений не более чем вдвое при любых значениях  $\lambda$  и  $\tau_0$  и при любом профиле коэффициента поглощения в линии.

Мы сравнили наши таблицы с результатами, получающимися с использованием формулы (45) в случае доплеровского профиля. Это

сравнение для  $\lambda = 1$  дается в табл. 6. В ней приводится отношение численно-точного и приближенного значений функции  $Q(\tau, \tau_0)$ . Мы не даём сравнения при больших  $\tau_0$ , имея в виду недостаточную точность наших вычислений функции  $Q(\tau, \tau_0)$ . Табл. 6 показывает, что, действительно, формула (45) дает значения, отличающиеся от истинных не более чем вдвое.

Таблица 6  
ЗНАЧЕНИЯ  $Q_{\text{точн.}}(\tau, \tau_0)/Q^a(\tau, \tau_0)$  ПРИ  $\lambda = 1$

| $\tau/\tau_0$ | 1     | 2     | 10    | 20    |
|---------------|-------|-------|-------|-------|
| 0.00          | 0.896 | 0.789 | 0.636 | 0.627 |
| 0.05          | 0.913 | 0.829 | 0.684 | 0.669 |
| 0.10          | 0.925 | 0.847 | 0.677 | 0.623 |
| 0.15          | 0.934 | 0.860 | 0.658 | 0.589 |
| 0.20          | 0.942 | 0.870 | 0.637 | 0.568 |
| 0.25          | 0.947 | 0.877 | 0.619 | 0.553 |
| 0.30          | 0.952 | 0.882 | 0.604 | 0.544 |
| 0.35          | 0.956 | 0.886 | 0.594 | 0.539 |
| 0.40          | 0.958 | 0.888 | 0.586 | 0.536 |
| 0.45          | 0.959 | 0.890 | 0.582 | 0.534 |
| 0.50          | 0.960 | 0.890 | 0.580 | 0.534 |

Аналогичное сравнение для  $\lambda = 0.95$  показало, что в этом случае точность формулы (45) еще выше, как и следовало ожидать.

Наконец, заметим, что отношение  $Q(\tau, \tau_0)/Q^a(\tau, \tau_0)$  слабо зависит от  $\tau$ , т. е. относительная ошибка формулы (45) почти постоянна для всех  $\tau$  при фиксированном  $\tau_0$ .

Тбилисский государственный  
университет

## MULTIPLE SCATTERING OF RESONANCE RADIATION IN A PLANE LAYER AND IN A SPHERE

S. A. SABASHVILI

Integral equations (8) and (9) for the functions  $Q(\tau, \tau_0)$  and  $R(\tau, \tau_0)$ , which describe multiple light scattering in a plane layer and in a sphere are solved numerically in the case of scattering in a resonance line.

The complete frequency redistribution on a scattering and the Doppler line profile are assumed. The results are presented in the form of tables and graphs for several values of the optical thickness  $\tau_0$  and photon survival probability  $\lambda$ . Possible astrophysical applications of the functions  $Q$  and  $R$  are discussed (determination of the mean number of photon scatterings in a plane layer and in a sphere, calculation of the functions  $X(z, \tau_0)$  and  $Y(z, \tau_0)$  etc.).

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. В. Иванов, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
2. В. В. Соболев, Астрофизика, 3, 5, 1967.
3. В. В. Соболев, Астрофизика, 8, 197, 1972.
4. Ж. Белл, В. Калаба, С. Уэно, Астрофизика, 7, 23, 1971.
5. Ш. А. Сабашвили, Бюлл. Абастуманской астрофиз. обс., № 43, 207, 1972.
6. В. В. Соболев, Астрофизика, 3, 137, 1967.
7. Д. И. Нагурнер, Астрофизика, 3, 293, 1967.
8. Д. И. Нагурнер, Астрофизика, 5, 507, 1969.
9. E. Avrett, D. G. Hammer, M. N., 130, No. 4, 1965.
10. Н. А. Яковкин, Р. И. Костик, Астрофизика, 2, 379, 1966.
11. Р. И. Костик, Астрофизика, 3, 17, 1967.
12. A. L. Crosbie, R. Viskanta, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, 10, 487, 1970.
13. В. В. Иванов, Астрофизика, 6, 643, 1970.
14. В. А. Амбарцумян, Научные труды, т. I, изд. АН АрмССР, Ереван, 1960.
15. В. В. Иванов, Астрон. ж., 49, 115, 1972.