

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 9

МАЙ, 1973

ВЫПУСК 2

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ РАЗВИТИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

А. Г. ДОРОШКЕВИЧ, В. С. РЯБЕНЬКИЙ, С. Ф. ШАНДАРИН

Поступила 18 июля 1972

Пересмотрена 12 апреля 1973

Аналитически и численно исследуется процесс развития возмущений потенциального типа под действием гравитационной неустойчивости от малой амплитуды до возникновения объектов высокой плотности. В окрестности формирующихся объектов движение вещества близко к одномерному и хорошо описывается приближенным решением уравнений гидродинамики (при $p=0$) и тяготения, предложенным в [1].

Предложен метод аналитической оценки точности приближенного решения, основанный на сравнении главных значений тензора деформации и обсуждается ее связь с результатами численных расчетов.

Введение. В [1] была предложена нелинейная теория развития потенциальных возмущений в среде с $p=0$ (p — давление). В основу этой теории было положено предположение о том, что движение частиц среды можно описать уравнением

$$\vec{r}(\vec{q}, t) = a(t)\vec{q} - b(t)\vec{s}(\vec{q}), \quad (1)$$

где $\vec{r}$ и $\vec{q}$ — эйлерова и лагранжева координаты частиц, функция $a(t)$ — описывает общее космологическое расширение среды и связана с постоянной Хаббла H соотношением $H = \dot{a}/a$, $b(t)$ — растущая функция времени, описывающая развитие возмущений (в случае критической плотности $\Omega \equiv \bar{\rho}/\rho_{cr} = 1$, $a(t) \sim t^{2/3}$ и $b(t) \sim t^{4/3}$), $\vec{s}(\vec{q}) = \text{grad } \Psi(\vec{q})$ — потенциальный вектор смещения частицы из положения равновесия. Если функции $a(t)$ и $b(t)$ нормировать так, что в некий начальный момент времени $t = t_0$, $a(t_0) = b(t_0) = 1$, то $\vec{s}(\vec{q})$ будет выражаться че-

рез начальное возмущение плотности с помощью соотношения $\operatorname{div} \vec{s}(\vec{q}) = \delta \rho(\vec{q}, t_0) / \rho_0(t_0)$, причем $\delta \rho(\vec{q}, t_0)$ соответствует растущей моде возмущений. Таким образом (1) описывает эволюцию растущей моды возмущений.

В случае, когда возмущения малы $|\vec{b}(t) \cdot \vec{s}(\vec{q})| \ll |\vec{a}(t) \vec{q}|$, движение вещества, согласно (1), совпадает с движением вещества по линейной теории [3, 4]. В [1] был высказан ряд косвенных соображений в обоснование применимости формулы (1) также в случае немалых возмущений.

Характерная особенность решения (1) состоит в том, что развитие возмущений приводит к образованию тонких дискообразных сгущений плотности вещества. При этом процесс достижения большой плотности в первом приближении идет одномерно, в направлении, перпендикулярном плоскости будущего диска. Существует точка, в которой сжатие идет наиболее быстро и впервые достигается бесконечная (формально) плотность; в действительности после того, как будет достигнута некоторая плотность, нельзя пренебрегать давлением, которое и остановит сжатие.

Сжатие в соседних частицах идет в два этапа: вначале так же, как и в первой частице, адиабатически, а затем эти частицы натапливаются на слой ранее сжатого газа и сжимаются в ударной волне.

В настоящей работе более подробно (аналитически и численно) рассмотрен вопрос об области применимости и точности формулы (1). Предлагается аналитическая оценка точности нелинейной теории, основанная на сравнении главных значений тензора деформации в частице. Обсуждается влияние окрестных частиц (эффект нелокальности взаимодействия), а также связь предложенной оценки точности метода и численных расчетов возмущений скорости частиц. Показано, что формула (1) хорошо описывает движение вещества вплоть до момента попадания частицы на фронт ударной волны.

1. *Аналитическая оценка точности нелинейной теории.* При получении закона движения частицы (1) использовано предположение, что возмущение силы, действующей на частицу, пропорционально ее смещению из положения равновесия.

Такое возмущение силы и движение по закону (1) соответствуют полю ускорения

$$\vec{w}_{\text{kin}}(\vec{q}, t) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{a} \cdot \vec{q} - \vec{b} \cdot \vec{s}(\vec{q}), \quad (2)$$

для создания которого необходимо распределение плотности

$$\bar{\rho} = -\frac{1}{4\pi G} \operatorname{div}_r \bar{w}_{\text{kin}}. \quad (3)$$

Фактически же при движении согласно (1) возникает распределение плотности, определяемое уравнением неразрывности

$$\rho = \frac{\rho_0}{\left| \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right|} = \frac{\rho_0}{a^3 \left| \partial_{ik} - \frac{b}{a} \frac{\partial s_i}{\partial q_k} \right|}, \quad (4)$$

где ρ_0/a^3 — невозмущенная плотность, $\partial r_i/\partial q_k$ — якобиан преобразования $r_i = r_i(q_k, t)$.

Предлагается в качестве меры точности формулы (1) использовать безразмерное отношение

$$\Delta(\vec{q}, t) = \frac{\bar{\rho} - \rho}{\rho}, \quad (5)$$

определяющее степень самосогласованности решения в частице. До тех пор, пока $|\Delta(\vec{q}, t)| < 1$ в достаточно большой области пространства, решение (1) является самосогласованным и хорошо описывает реальное движение. Ниже будет показано, что окрестность возникающего диска повышенной плотности удовлетворяет этому условию.

Найдем связь Δ с тензором $\partial s_i/\partial q_k$.

Проще всего это сделать в системе координат, оси которой совпадают с главными осями тензора $\partial s_i/\partial q_k$ в рассматриваемой частице. В разных частицах главные оси тензора $\partial s_i/\partial q_k$, вообще говоря, имеют различные направления, но для данной частицы при движении согласно (1) они не изменяются со временем. В этой системе координат

$$\rho = \frac{\rho_0}{(a - b\lambda_1)(a - b\lambda_2)(a - b\lambda_3)}, \quad (6)$$

$$\bar{\rho} = -\frac{1}{4\pi G} \left(\frac{\bar{a} - \bar{b}\lambda_1}{a - b\lambda_1} + \frac{\bar{a} - \bar{b}\lambda_2}{a - b\lambda_2} + \frac{\bar{a} - \bar{b}\lambda_3}{a - b\lambda_3} \right),$$

где λ_1, λ_2 и λ_3 — собственные значения тензора $\partial s_i/\partial q_k$. С помощью (6) легко показать, что

$$\Delta = \frac{-a^2 \left(\bar{b} + 2\frac{\bar{a}}{a}b \right) J_1 + ab \left(2\bar{b} + \frac{\bar{a}}{a}b \right) J_2 - 3b^2\bar{b}J_3}{3a^3\bar{a}}, \quad (7)$$

где

$$J_1 = \frac{\partial s_i}{\partial q_i} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad J_2 = \frac{1}{2} J_1^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial s_i}{\partial q_k} \frac{\partial s_k}{\partial q_i} = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3,$$

$$J_3 = \frac{1}{3} \frac{\partial s_i}{\partial q_k} \frac{\partial s_k}{\partial q_e} \frac{\partial s_e}{\partial q_i} - \frac{1}{3} J_1^3 + J_1 J_2 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

— инварианты тензора $\partial s_i / \partial q_k$. Зависимость Δ только от инвариантов тензора $\partial s_i / \partial q_k$ показывает, что соотношение (7) не зависит от системы координат. Потребуем, чтобы в (7) член, содержащий J_1 был тождественно равен нулю. Это дает уравнение для $b(t)$

$$\bar{b} + 2 \frac{\bar{a}}{a} b = 0, \quad (8)$$

которое совпадает, с точностью до обозначений, с результатами линейной теории [3, 4]. Отметим, что (8) справедливо при любом $\Omega = \bar{\rho} / \rho_{cr}$. В простейшем случае $\Omega = 1$, $a \sim t^{2/3}$ и растущее решение уравнения (8) $b \sim t^{4/3}$.

С учетом (8) Δ будет иметь вид

$$\Delta = \left(\frac{b}{a}\right)^2 J_2 + 2 \left(\frac{b}{a}\right)^3 J_3. \quad (9)$$

В двух случаях, когда в точности решения (1) можно убедиться непосредственно, условие $|\Delta| < 1$ хорошо выполняется:

а) можно независимым путем показать, что (1) является точным решением в случае, когда на однородно расширяющийся фон наложено плоское одномерное возмущение произвольной амплитуды (в этом случае $\Delta \equiv 0$);

б) в случае возмущений малой амплитуды, когда в справедливости (1) нет сомнений, Δ имеет второй порядок малости по амплитуде возмущений и поэтому $|\Delta| \ll 1$.

Пока амплитуда возмущений мала, мало и Δ . Однако Δ — растущая функция времени, и возможно, что с течением времени условие $|\Delta| < 1$ в рассматриваемой частице будет нарушено.

Если в частице $\lambda_1 > 0$, то решение (1) продолжается либо до тех пор, пока частица не достигнет бесконечной плотности при $b/a = 1/\lambda_1$, либо до тех пор, пока частица не попадет на фронт ударной волны [1], при $b/a < 1/\lambda_1$. На рис. 1 изображена область (в системе координат $x = \lambda_2/\lambda_1$, $y = \lambda_3/\lambda_1$; $\lambda_1 > 0$), в которой условие $|\Delta| < 1$ выполнено вплоть до момента времени, когда $b/a = 1/\lambda_1$. В этот момент условие $|\Delta| < 1$ принимает вид

$$|x + y - xy| < 0. \quad (10)$$

Предполагая случайный характер возмущений и используя полученную в [2] функцию распределения главных значений тензора $\partial s_i / \partial q_k$, можно показать, что неравенство (10) справедливо для примерно 46 % всего вещества.

Если в частице $\lambda_1 < 0$, то решение (1) продолжается либо до тех пор, пока частица попадает на фронт ударной волны, либо до тех пор, пока условие $|\Delta| < 1$ будет нарушено. Можно показать, что условие $|\Delta| < 1$ заведомо нарушается при $b/a > -0.5/\lambda_1 > 0$.

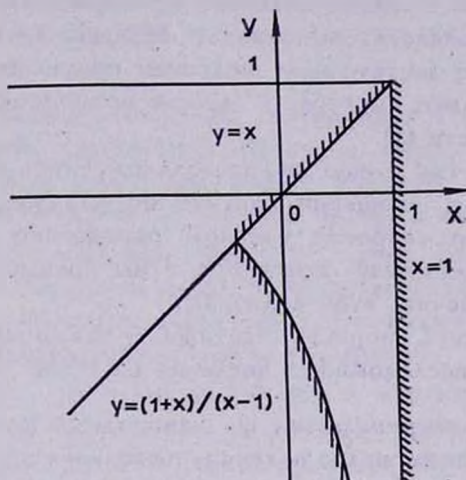


Рис. 1. В системе координат $x = \lambda_2/\lambda_1$ и $y = \lambda_3/\lambda_1$ показана область параметров λ_2 и λ_3 для которых формула (1) применима вплоть до момента возникновения особенности при $b/a = 1/\lambda_1$. Собственные значения λ_1 , λ_2 и λ_3 тензора $\partial s_i / \partial q_k$ проинтерполированы в порядке убывания $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$. Отсюда возникают ограничения $x < 1$ и $y < 1$. Ограничение $y > (1+x)/(1-x)$ связано с требованием выполнения условия (9), (10) $|\Delta| < 1$ вплоть до момента $b/a = 1/\lambda_1$.

В этих оценках не учитывалась возможность падения частицы на фронт ударной волны, поэтому область параметров, в которой формула (1) применима, на самом деле несколько шире, чем изображенная на рис. 1.

Как уже отмечалось, Δ является „локальной“ величиной, т. е. она зависит от инвариантов тензора $\partial s_i / \partial q_k$ в данной точке и не зависит от параметров в соседних точках. Между тем ясно, что задача не является локальной, и такие параметры частицы, как ее скорость и смещение зависят не только от главных значений тензора деформации в данной частице, но и от движения окружающих частиц (эффект нелокальности взаимодействия). Эти эффекты значительно ослаблены в областях, где образуются дискообразные объекты повышен-

ной плотности. В окрестности диска движение имеет преимущественно одномерный характер, а, как мы знаем, решение (1) в одномерном случае является точным. Возможные эффекты нелокальности поэтому связаны с отклонением движения от одномерного, но вблизи центра конденсации эти отклонения малы, а влияние удаленных областей ослаблено, во-первых, быстрым убыванием взаимодействия с расстоянием $\sim r^{-3}$ (важно возмущение силы, а не сама сила) и, в большей степени, эффектом усреднения знакопеременных по пространству возмущений по большим областям пространства.

Как уже отмечалось, выполнение неравенства $|\Delta| < 1$ является необходимым, но не достаточным условием применимости закона (1), поэтому представляют интерес и другие возможные ограничения на область применимости (1).

Знание параметра Δ еще не позволяет судить о точности определения скорости и смещения частицы по формуле (1). Между тем, согласно [1], именно скорости частицы определяют свойства возникающего диска повышенной плотности, и мы прежде всего заинтересованы в точном расчете этой величины.

Точность расчета скорости частицы, а также влияние нелокальности возмущения исследовались численно на ЭВМ.

2. Численный эксперимент. На однородный и изотропно расширяющийся фон наложим малое потенциальное возмущение, задаваемое в виде начального смещения частицы $\vec{s}(\vec{q}) = \text{grad } \Psi(\vec{q})$ из невозмущенного положения, соответствующего координате $\vec{q}$. Будем считать, что движение всех частиц происходит согласно (1). В интересующей нас области выделим несколько „пробных“ частиц и будем для них сравнивать ускорение w_{kin} , найденное по (2), с ускорением w_{grav} , определяемым гравитационным полем остального вещества,

$$\vec{g}_{\text{grav}} = G \sum_i m_i \frac{\vec{r}_i - \vec{r}}{|\vec{r}_i - \vec{r}|^3}, \quad (11)$$

$$\vec{r}_i - \vec{r} = a(\vec{q}_i - \vec{q}) - b(\vec{s}(\vec{q}_i) - \vec{s}(\vec{q})).$$

Различие $\vec{w}_{\text{kin}}$ и $\vec{w}_{\text{grav}}$ характеризует точность определения ускорения по формуле (1). Точность определения скорости характеризуется соотношением $\vec{u}_{\text{kin}} = a\vec{q} - b\vec{s}(\vec{q})$ и $\vec{u}_{\text{grav}} = \int \vec{w}_{\text{grav}} dt$. В расчетах возмущение задавалось потенциалом

$$\Psi(\vec{q}) = A_{lm} (q_1^2 - d^2)^3 (q_2^2 - d^2)^l (q_3^2 - d^2)^m \quad (12)$$

при $|q_1| < d, \quad |q_2| < d, \quad |q_3| < d; \quad d = 0.5$

$\Psi(\vec{q}) = 0$ вне этой области. Такой выбор потенциала соответствует локализации возмущений в области объемом $8d^3 = 1$. В реальной задаче возмущение, конечно, не обязательно локализовано. Однако нас интересует главным образом окрестность центра возмущенного куба, а влияние удаленных областей ослаблено как из-за дипольного закона взаимодействия, так и из-за присутствия возмущений разных знаков.

Смещение определяется из соотношения $\vec{s}(\vec{q}) = \text{grad } \Psi(\vec{q})$. Были проведены расчеты нескольких вариантов, отличающихся значениями l и m . Меняя l и m в (12), мы можем изменять соотношения между собственными значениями λ_i тензора $\partial s_i / \partial q_k$ в точке максимума λ_1 , а также параметры движения соседних частиц. Величина A_{lm} выбиралась так, чтобы совпадали моменты возникновения плотности в центре сгущения. Более подробно исследовалась наиболее интересная область в окрестности центра образующегося сгущения.

Как правило, расчеты начинались с момента, когда $|\partial \rho / \rho| \approx 1$ и заканчивались при $|\partial \rho / \rho| \sim 10 + 100$. Пока $|\partial \rho / \rho| < 1$ сомнений в правильности решения (1) нет. При возрастании $|\partial \rho / \rho|$ время, нужное для расчета каждой точки, быстро возрастает. Более подробно вопросы, связанные с методикой расчетов, изложены в приложении.

На рис. 2 показана зависимость от b/a величины $\omega_{1kla} / \omega_{1grav}$, характеризующей точность закона (1), для четырех частиц, находящихся на различных расстояниях (в лагранжевой системе координат) от центра сгущения. Выбранное соотношение собственных значений $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 / 3$ в центре характерно для случайных возмущений при условии большого λ_1 [2]. Пунктирные кривые показывают, как нарастает возмущение плотности $\partial \rho / \rho$ в соответствующих частицах. По мере нарастания возмущений плотности величина $\omega_{1kla} / \omega_{1grav}$ все больше отклоняется от единицы, однако, даже при очень больших возмущениях, величина $\omega_{1kla} / \omega_{1grav}$ отличается от единицы не более, чем в два-три раза (кривая 1). Ранее было отмечено, что формула (1) лучше описывает движение вблизи центра сгущения, что связано с одномерным характером движения в его окрестности, но на рис. 2 ближайший к центру частице соответствует кривая 1, имеющая наибольшее отклонение от единицы. Однако никакого противоречия в этом нет, так как в частице 1 возмущение $\partial \rho / \rho$ выросло заметно, а в

частицах 2, 3 и 4 оно еще мало. Введенный в разделе 1 критерий (5) точности формулы (1) полностью согласуется с этим результатом.

На рис. 3 показана зависимость скорости частицы от расстояния до центра конденсации x для частиц, находящихся на различных лагранжевых расстояниях до центра.

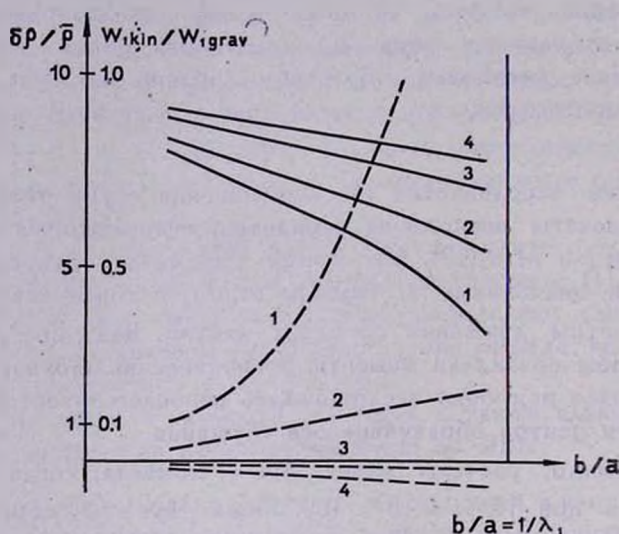


Рис. 2. Зависимость величины w_{kin}/w_{1grav} , характеризующей точность приближенного закона (1) в зависимости от b/a (сплошные кривые). Кривые построены для четырех пробных частиц, расположенных на разных расстояниях (в лагранжевых координатах) от центра образующегося диска. Центр диска имеет лагранжевы координаты $(0; 0; 0)$, пробные частицы (в порядке номеров) — $(0.02; 0; 0)$, $(0.16; 0; 0)$, $(0.28; 0; 0)$, $(0.40; 0; 0)$. Пунктирные кривые показывают, как нарастает возмущение плотности $\delta\rho/\rho$ в каждой частице. Шкала слева от вертикальной оси относится к величине $\delta\rho/\rho$, справа — к величине w_{kin}/w_{1grav} . Вертикальной сплошной прямой показан момент достижения особенности в центре диска $(0; 0; 0)$. В центре конденсации собственные числа λ_1 , λ_2 и λ_3 связаны соотношением $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_1/3$.

Достижение частицей координаты $x = 0$ приблизительно соответствует моменту попадания частицы на фронт ударной волны. Нужно отметить, что величина $\Delta v_1/v_1$ в момент падения частицы на фронт волны очень слабо зависит от лагранжевой координаты частицы.

На рис. 4 представлена зависимость величины w_{kin}/w_{1grav} от b/a для частиц, близких к центру сгущения, при различных соотношениях между собственными значениями λ_1 , λ_2 и λ_3 в центре. Интересно отметить, что изменение знака λ_2 и λ_3 приводит к изменению знака $w_{kin} - w_{1grav}$. Этот эффект связан с тем, что решение (1) недостаточно хорошо учитывает движения в плоскости диска. Сжатие в этой

плоскости (при $\lambda_{2,3} > 0$) приводит к повышению плотности и увеличивает гравитационное ускорение. Расширение в этой плоскости, наоборот, уменьшает гравитационное ускорение.

В ряде расчетов специально исследовалась зависимость точности закона (1) от характера изменения параметров движения частиц, соседних с центром сгущения (эффект нелокальности). В пределах точности расчета (около $3 \div 5\%$) зависимости не обнаружено. Это свидетельствует о слабости эффектов нелокальности. В машинных расчетах не удалось обнаружить также возможную ошибку задаваемой законом (1) ориентации главных осей тензора $\partial s_i / \partial q_k$.

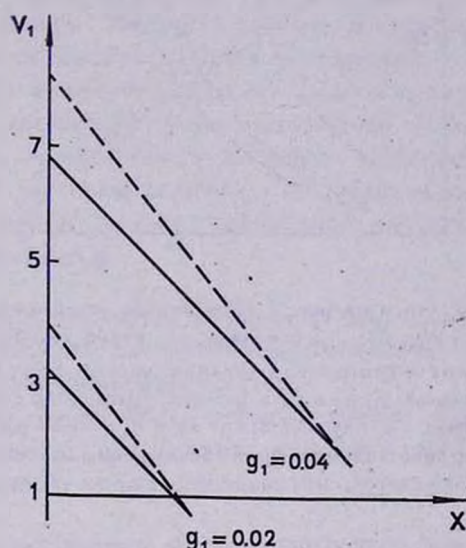


Рис. 3. Сплошными кривыми показана зависимость величины v_{ikln} от эйлеровой координаты x , пунктирными — величины v_{igrav} . Кривые построены для двух пробных частиц с лагранжевыми координатами $(0.02; 0.0)$ и $(0.04; 0.0)$. Центр конденсации расположен в начале координат.

На основе проведенных расчетов построена зависимость $\Delta v_1 / v_1$ в момент падения частицы на фронт ударной волны от величины Δ (5), (9) (рис. 5). Приближенная аналитическая зависимость $\Delta v / v \approx 0.9 \Delta$.

В предположении случайного характера возмущений в окрестности высоких максимумов $\lambda_1 > 2.5 \sigma$ (σ — дисперсия компонент тензора деформации [2])

$$\bar{\Delta} \approx 0.55 (1 - 4\sigma^2 / \lambda_1^2) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \overline{\Delta^2} - \bar{\Delta}^2 &\approx 0.25 \sigma^2 / \lambda_1^2 \\ \overline{(\Delta v / v)} &= 0.5 (1 - 4\sigma^2 / \lambda_1^2). \end{aligned} \quad (15)$$

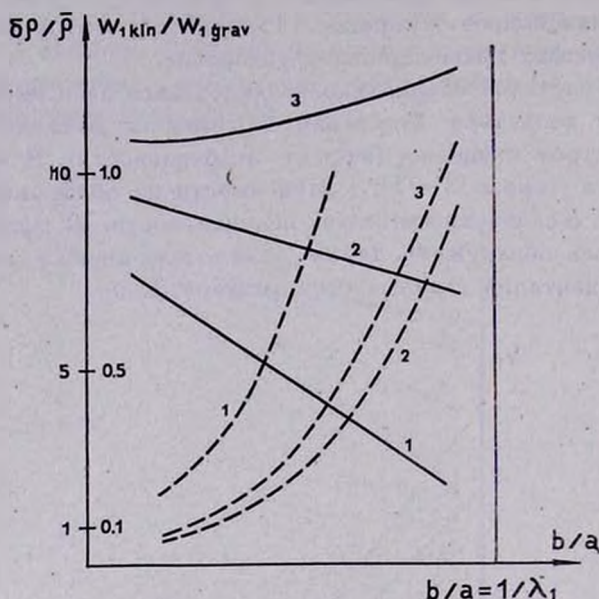


Рис. 4. В тех же, что и на рис. 2 координатах (горизонтальная ось — b/a , вертикальная — отношение w_{1kin}/w_{1grav}) показано, с какой точностью формула (1) описывает движение близких к центру конденсации частиц при различных соотношениях собственных значений λ_1 , λ_2 и λ_3 в центре. Кривые (в порядке номеров) соответствуют соотношениям: $\lambda_2 = \lambda_3 = (2/3)\lambda_1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_1/6$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = -(2/25)\lambda_1$. Пунктирными кривыми показана эволюция возмущения плотности в соответствующей частице.

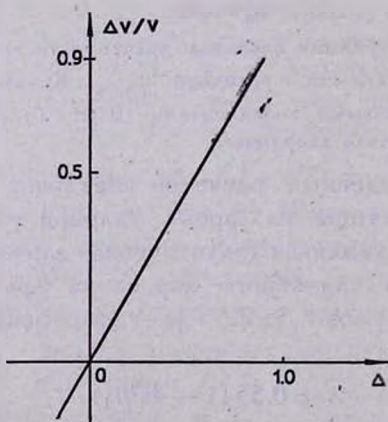


Рис. 5. Зависимость отношения $\Delta v/v = (v_{1grav} - v_{1kin})/v_{1grav}$ от величин $\Delta = \lambda_2/\lambda_1 + \lambda_3/\lambda_1 - (\lambda_2\lambda_3)/\lambda_1$ в момент попадания частицы на фронт ударной волны.

Таким образом, в окрестности высоких максимумов λ_1 приближенный закон движения (1) позволяет с хорошей точностью определить как ускорение, так и скорость частицы.

Выводы. Совокупность изложенных выше результатов позволяет сделать следующие выводы:

1. Решение (1) качественно правильно описывает реальное движение вещества в масштабах скоплений галактик во фридмановской модели Вселенной в областях повышенной плотности на стадии, когда можно пренебречь давлением (от момента рекомбинации до возникновения ударных волн). Являясь точным в одномерном случае, решение (1) хорошо описывает движение вещества в окрестности образующегося объекта высокой плотности (протоскопления галактик), где движение имеет преимущественно одномерный характер. В областях пространства, где одномерность движения нарушается на нелинейной стадии, решение (1) неприменимо, но гравитационное влияние на область возникновения дисков повышенной плотности мало из-за эффекта усреднения.

2. Хорошее представление о точности решения (1) дает величина Δ (5), (9), которая зависит от соотношения собственных значений тензора $\partial s_i / \partial q_k$ в рассматриваемой частице.

Движение не менее 46% всего вещества (доля вещества, для которого $|\Delta| < 1$ вплоть до момента падения частицы на фронт ударной волны) достаточно точно описывается формулой (1).

3. Анализ результатов численного счета показывает, что скорость падения вещества на фронт ударной волны, полученная по формулам (1), может несколько отличаться от истинной (рис. 5). Это связано с тем, что в окрестности возникающего диска повышенной плотности в решении (1) недостаточно хорошо учитывается движение в плоскости диска. Если в плоскости диска происходит сжатие, то реальная скорость падения на фронт ударной волны, который в первом приближении параллелен плоскости диска, будет выше, чем скорость, полученная с помощью (1); если же в плоскости диска происходит расширение ($\Delta < 0$), то реальная скорость будет ниже.

Пользуясь случаем, благодарим Я. Б. Зельдовича за полезные обсуждения и замечания.

Приложение

Обсудим более подробно вопросы, связанные с методикой численного расчета.

С точки зрения численного расчета задача об эволюции возмущения от малой амплитуды вплоть до возникновения ударных волн имеет следующие особенности:

1. Пространственная трехмерность задачи.

2. Возмущения растут на нестационарном фоне (что связано с космологическим расширением).

3. Из-за дальнего действия гравитации область, вклад которой в силу, действующую на данную частицу, существенен, велика и, кроме того, ее трудно определить *априори*.

В расчетах приходится иметь дело с ограниченным объемом, в то время как в действительности на рассматриваемом этапе еще нет гравитационного обособления тел. Отсюда возникает проблема границ. Как показали расчеты, для рассматриваемого типа задач оказывается довольно существенной непрерывность распределения вещества, что, естественно, очень трудно смоделировать на ЭВМ, так как в рассматриваемой трехмерной задаче нужно вести расчеты с очень большим числом точек, а это требует значительного машинного времени. Ниже изложены соображения, которыми мы руководствовались в наших попытках преодолеть эти трудности.

Уравнения гидродинамики и тяготения, при условии, что можно пренебречь давлением, имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0 \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \Delta) \vec{u} = \vec{w} \\ \operatorname{div} \vec{w} = 4\pi G \rho \end{array} \right. \quad (16)$$

где ρ — плотность, $\vec{w}$ — ускорение, $\vec{u} = H\vec{r} + \vec{v}$ и $G = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г сек}$. С помощью преобразований

$$\vec{r}' = \frac{1}{a} \vec{r}, \quad \vec{v}' = a \vec{v}, \quad dt' = a^{-1} dt, \quad \rho' = a^3 \rho, \quad \vec{w}' = a^{-3} \vec{w}, \quad G' = aG \quad (17)$$

с учетом соотношений для невозмущенных величин система (16) преобразуется к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \operatorname{div}(\rho' \vec{v}') = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + (\vec{v}' \Delta) \vec{v}' = \delta \vec{w}' \\ \operatorname{div}(\delta \vec{w}') = 4\pi G' \delta \rho' \\ \delta \rho' = \rho' - \bar{\rho}' \end{array} \right. \quad (18)$$

операции пространственного дифференцирования производятся по координате r' . В (18) космологическое расширение учитывается с помощью формального изменения постоянной гравитационного взаимодействия. Переход от полного ускорения к возмущению позволяет избавиться от проблемы граничных условий следующим образом. На однородном неограниченном фоне создадим возмущение, локализованное в конечном объеме. Очевидно, что вклад в возмущение силы в данной точке даст только возмущенная область, и в расчетах можно принять, что вне области возмущения вещества нет.

Сила гравитационного взаимодействия точечных масс убывает $\sim r^{-2}$, поэтому нельзя заранее выделить область, влияние которой на данную частицу существенно. Уменьшение влияния на данную частицу, имеющую координаты $\vec{r}_0$, с ростом расстояния связано только со взаимной компенсацией сил взаимодействия с равноудаленными от $\vec{r}_0$ частицами. Чем больше $|\vec{r}_i - \vec{r}_0|$, тем больше частиц лежит в сферическом слое $|\vec{r}_i - \vec{r}_0| \approx \text{const}$ и тем меньше сумма $\sum \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_0}{|\vec{r}_i - \vec{r}_0|^3}$ (сумма берется по частицам, лежащим в слое $|\vec{r}_i - \vec{r}_0| \approx \text{const}$).

Учитывая это обстоятельство, будем вычислять возмущение ускорения $\delta \vec{w}'$ по следующей схеме. В рассматриваемой пробной точке вычислим полное ускорение $\vec{w}' = G' \sum m_i \frac{\vec{r}'_0 - \vec{r}'_i}{|\vec{r}'_0 - \vec{r}'_i|^3}$. Затем найдем возмущенное ускорение $\vec{w}'_k$ в точке $\vec{r}'_0$, создаваемое тяготением вещества, однородно распределенного в области локализации возмущения.

$$\vec{w}'_k = G' \bar{\rho}' \int \frac{\vec{r}'_0 - \vec{r}'}{|\vec{r}'_0 - \vec{r}'|^3} d^3 r'. \quad (19)$$

Если область локализации возмущения имеет простую форму (в наших расчетах это был куб), то интеграл (19) выражается через элементарные функции и ускорение $\vec{w}_k$ находится по аналитической формуле.

При вычислении суммы (11) использовались два типа различных по массе частиц. Вблизи $\vec{r}_0$ частицы имели малую массу и были расположены гуще, а вдали от точки $\vec{r}_0$ частицы имели большую массу и расположены реже, так что при $b(t) = 0$ вещество было распределено квазиоднородно. Это позволило в несколько (5–10) раз сократить время расчетов при достаточно высокой точности и без существенного усложнения алгоритма. Конечно, можно использовать не два, а больше различных по массе видов частиц.

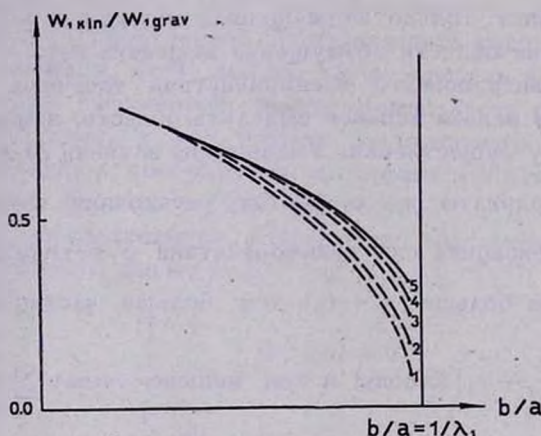


Рис. 6. Показано, как зависит величина w_{kin}/w_{grav} для одной пробной частицы в зависимости от параметров модели. Кривая, отмеченная цифрой 1, соответствует модели, состоящей из $51^3 \cdot 5^3 = 132526$ крупных и $5^3 \cdot 11^3 = 166375$ мелких частиц. Остальные кривые получены из расчетов моделей, состоящих 2 из $51^3 - 5^3 = 132526$ и $5^3 \cdot 31^3 = 3648875$, 3 из $51^3 - 7^3 = 132308$ и $7^3 \cdot 11^3 = 456533$, 4 из $51^3 - 9^3 = 131922$ и $9^3 \cdot 11^3 = 970299$ и 5 из $51^3 - 11^3 = 131320$ и $11^3 \cdot 11^3 = 1771561$ крупных и мелких частиц, соответственно.

Как правило, в расчетах участвовали $51^3 - 5^3 = 132526$ крупных и $5^3 \cdot 11^3 = 166375$ мелких частиц, причем мелкие частицы были расположены вблизи пробной частицы, их суммарная масса равнялась массе $5^3 = 125$ крупных частиц.

В тех случаях, когда параметр w_{kin}/w_{grav} слишком сильно отклонялся от 1 (что всегда бывало, когда возмущение плотности стано-

вилось значительным), предпринимался повторный расчет с большим числом мелких частиц. На рис. 6 показано, как зависит величина $w_{\text{мел}}/w_{\text{круп}}$ в момент, когда $\delta\rho/\rho \approx 52$, от числа мелких частиц и от величины области, в которой они располагались; число крупных точек при этом практически не меняется.

Точка 1 на рис. 6 соответствует описанной выше модели. Точка 2 соответствует модели с $5^3 \cdot 31^3 = 3723875$ мелкими частицами, их суммарная масса равнялась массе 125 крупных частиц. Точки 3, 4 и 5 соответствуют моделям с $7^3 \cdot 11^3 = 457533$ мелкими частицами (суммарная масса равна массе $7^3 = 343$ крупных частиц), с $9^3 \cdot 11^3 = 970299$ мелкими частицами (суммарная масса равна массе $9^3 = 729$ крупных частиц) и с $11^3 \cdot 11^3 = 1777561$ мелкими частицами (суммарная масса равна массе $11^3 = 1331$ крупных частиц), соответственно. Точки 1 и 2 соответствуют расчетам, когда одна и та же окрестность (в обоих случаях это ближайшие $5^3 = 125$ частиц) пробной частицы дробится с разной подробностью. Точка 2 соответствует более мелкому дроблению. Как видно, разница между этими вариантами относительно мала. Это связано, с тем, что точность расчета суммы (12) в большей степени зависит от точности расчета вклада от более удаленных частиц. Последовательность точек 1, 3, 4, 5 соответствует расчетам, в которых все большая окрестность пробной частицы подвергается одинаково подробному дроблению. Замечательным является то, что процесс улучшения результатов от 1 к 5 выходит на „насыщение“ (разница между точками 5 и 4 гораздо меньше, чем между 1 и 2).

Институт прикладной математики
АН СССР
Московский физико-технический
институт

NON-LINEAR THEORY OF DEVELOPMENT OF POTENTIAL PERTURBATIONS

A. G. DOROSHKEVICH, V. S. RIABENKIY, S. F. SHANDARIN

The process of increase of potential perturbations under gravitational instability from small amplitude to the formation of high density objects are investigated analytically and numerically. Motion of matter in the vicinity of forming objects is similar to the one-dimensional one and is well described by the approximate solution of hydrodynamic equations (with $p = 0$) and equation of gravitation suggested in [1].

Method of analytical estimation of accuracy of the approximate solution, based on a comparison of eigen-values of the deformation tensor is suggested and its connection with the numerical calculation results is discussed.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Я. Б. Зельдович, *Астрофизика*, 6, 319, 1970.
2. А. Г. Дорошкевич, *Астрофизика*, 6, 581, 1970.
3. Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников, *УФН*, 80, 391, 1963.
4. В. В. Воннов, *М. N.*, 117, 104, 1957.