АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 9 МАЙ, 1973 ВЫПУСК 2

ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ИЗЛУЧЕНИЯ МНОГОУРОВЕННОГО АТОМА

А. Г. НИКОГОСЯН

Поступила 22 января 1973

Рассматривается задача об образовании мультиплетов в спектрах атомов с расщепленным верхним энергетическим уровнем. Первая часть работы посвящается постановке и решению указанной задачи в случае истинного закона перераспределения, причем для простоты рассматривается одномерный случай. Во втором пункте рассматривается трехмерная задача об образовании резонансных линий в полубесконечной изотермической атмосфере, заполненной атомами, обладающими тремя энергетическими уровнями, схематическое расположение которых соответствует случаю образования D-линий натрия, H- и K-линий ионизованного кальция. Находятся интенсивности излучения, выходящего из среды в каждой из линий в случае полного перераспределения по частотам. Указанные величины выражаются через обобщенные на матричный случай ϕ-функции Амбарцумяна.

При изучении вопроса об образовании спектральных линий представляет определенный интерес задача о переносе излучения в среде, состоящей из многоуровенных атомов, у которых радиативные переходы совершаются лишь между верхними и общим нижним энергетическими уровнями. К данному классу проблем относятся, в частности, задачи об образовании мультиплетов в спектрах некоторых атомов, как например, D-линий натрия (5896 A, 5890 A), H и K-линий ионизованного кальция (3968 A, 3933 A), кислородного триплета (7772 A, 7774 A, 7775 A) и т. д. Указанные резонансные линии являются одними из наиболее интенсивных линий в спектре Солнца.

Работами Уодделла [1, 2] было положено начало систематическому изучению изменений профилей мультиплетов вдоль солнечного диска. В дальнейшем появился целый ряд работ, посвященных определению функций источника мультиплетов в зависимости от глубины. В работах Калькофена и Авретта [2], Финна [4], Финна и Джефриса [5] рассматривался трехмерный аналог этой задачи в случае полного пере-

распределения по частотам. Для функций источника была получена система связанных линейных интегральных уравнений, которая решалась приближенно методом ступенчатых функций (step function method).

Как известно, решение задач переноса излучения в случае, когда отсутствует условие о локальном термодинамическом равновесии, сводится к совместному решению условий статистического равновесия и уравнений переноса. Указанными уравнениями можно пользоваться и в случае полного перераспределения по частотам, поскольку последние претерпевают лишь небольшое, с математической точки зрения, несущественное видоизменение. Положение дел коренным образом меняется, когда мы пытаемся сформулировать рассматриваемую задачу в случае истинного закона перераспределения. Если обычно в уравнениях стационарности фигурирует количество всех атомов в единице объема, находящихся на том или ином энергетическом уровне, то в данном случае приходится иметь дело в отдельности с каждым из атомов, обладающих той или иной энергией внутри одного и того же размытого уровня. В результате этого обычный путь решения задач подобного рода оказывается чрезвычайно затруднительным.

В настоящей работе мы укажем на новый подход к решению рассматриваемой задачи, который является пригодным и особенно эффективным в общем случае некогерентного рассеяния. При этом мы будем опираться на результаты предыдущих работ автора настоящей статьи, выполненных совместно с Н. Б. Енгибаряном [6, 7].

1. *Одномерная задача.* В общем случае пусть дан многоуровенный атом, расположение энергетических уровней которого схематически изображено на рис. 1.

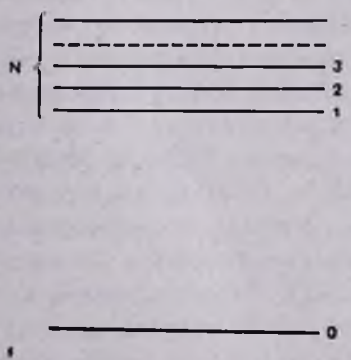

Рис. 1.

Выше основного уровня, который для удобства будем называть нулевым, близко друг от друга расположены N уровней. Между любы-

ми двумя уровнями возможны переходы вследствие столкновений, в то время, как радиативные переходы совершаются лишь между основным и верхними состояниями.

Переходя к изложению нашего подхода, введем величину $R_{ij}(x', x)\,dx$, представляющую собой вероятность того, что квант безразмерной частоты $x' = (\nu - \nu_0^i)/\Delta\nu_0$ поглотится в i-той линии, а затем будет переизлучен в j-той линии в интервале частот x, $x + dx$. Здесь $\Delta\nu_D = (\nu_0/c)\sqrt{2kT/m}$ (центральные частоты для простоты мы полагаем равными) представляет собой доплеровскую полуширину линий. Касаясь закона перераспределения по частотам, заметим, что при рассмотрении задачи об образовании мультиплетов в атмосфере Солнца помимо доплеровского уширения следует также учесть уширение линий вследствие излучения и вследствие столкновений. Введенная функция $R_{ij}(x', x)$ является естественным обобщением функции перераспределения по частотам на случай нескольких линий. По аналогии, указанную величину будем называть функцией перераспределения по частотам и линиям.

Обращаясь к вопросу об определении $R_{ij}(x', x)$, введем в рассмотрение величину $r_{ij}(\nu', \nu)\,d\nu$, представляющую собой вероятность излучения кванта в j-той линии с частотой, лежащей в интервале ν, $\nu + d\nu$ в системе, связанной с атомом, при условии, что поглотился квант частоты ν' в i-той линии:

$$r_{ij}(\nu', \nu) = \varphi_j(\nu) = \frac{\delta_j}{\pi}\,\frac{\lambda_{ij}}{(\nu - \nu_0)^2 + \delta_j^2}, \qquad (1.1)$$

где $\varphi_j(\nu)\,d\nu$ — вероятность поглощения квантов в интервале частот ν, $\nu + d\nu$ внутри j-той линии; δ_j — полуширина j-той линии, обусловленная затуханием вследствие излучения и столкновений; величины λ_{ij} представляют собой вероятность того, что квант, поглощенный в i-той линии, переизлучится затем внутри j-той линии. Тот факт, что функция $r_{ij}(\nu', \nu)$ не зависит от первого аргумента, является следствием того, что в системе, связанной с атомом, имеет место полное перераспределение по частотам, независимо от того, переизлучается ли квант в той же линии, или в другой.

Исходя из вероятностного смысла величин λ_{ij}, нетрудно получить систему алгебраических уравнений, которой они удовлетворяют:

$$\lambda_{ij} = \left(1 - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^{N} p_{im}\right)\delta_{ij} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^{N} p_{im}\lambda_{mj} \qquad (i, j = 1, 2 \ldots N), \qquad (1.2)$$

где δ_{ij} — символ Кронеккера; величины

$$p_{ik} = \frac{C_{ik}}{A_{i0} + \sum\limits_{\substack{m=0 \\ m \neq i}}^{N} C_{im}}, \qquad (i \neq k \neq 0) \tag{1.3}$$

представляют собой вероятность переходов, совершающихся с i-того уровня на k-тый уровень в результате столкновений. Здесь A_{i0} и C_{ik} — суть эйнштейновские коэффициенты, соответственно, спонтанного перехода и переходов в результате столкновений.

Перемножив величины λ_{ij}, $r_{ij}(\nu', \nu)$, $\varphi_i(\nu')$ и перейдя к системе координат, связанной с наблюдателем, проинтегрируем по всем направлениям и скоростям, когда последние распределены по максвелловскому закону. В результате будем иметь:

$$R_{ij}(x', x) = \frac{\lambda_{ij}}{\pi^{5/2} A_j} \int_0^\infty e^{-u^2} f_i(x, u) f_j(x', u)\, du, \tag{1.4}$$

где введены следующие обозначения:

$$f_i(x, u) = \operatorname{arctg} \frac{x+u}{\sigma_i} - \operatorname{arctg} \frac{x-u}{\sigma_i}; \qquad \sigma_i = \frac{\delta_i}{\Delta\nu_D}; \quad A_j = U(\sigma_j, 0);$$

$$U(\sigma, y) = \frac{\sigma}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-u^2} du}{(y-u)^2 + \sigma^2} \text{ — нормированная функция Фойгта.}$$

Введем теперь в рассмотрение дифференциальную форму $\tilde{P}_{ij}(\tau, x', x)dx$, представляющую собой вероятность того, что квант, имеющий при поглощении в i-той линии на глубине τ безразмерную частоту x', выйдет из среды в j-той линии в виде кванта частоты, лежащей в интервале x, $x + dx$. С другой стороны, введем величину $g_{ij}(x', x)\, dx$, представляющую собой вероятность переизлучения кванта в j-той линии в интервале частот x, $x + dx$ при условии, что поглотился квант частоты x' в i-той линии. Существует простая связь между функцией $g_{ij}(x', x)$ и введенной выше функцией перераспределения $R_{ij}(x', x)$

$$R_{ij}(x', x) = \bar{\alpha}_i(x')\, g_{ij}(x', x), \tag{1.5}$$

где $\bar{\alpha}_i(x) = \dfrac{U(\sigma_i, x)}{U(\sigma_i, 0)}$ — профиль коэффициента поглощения в i-той линии. Исходя из физического смысла функций $\tilde{P}_{ij}(\tau, x', x)$, нетрудно получить следующее уравнение:

$$\bar{P}_{ij}(\tau, x', x) = g_{ij}(x', x)\, e^{-c_j \bar{\alpha}_j(x)\tau} + \\ + \sum_{m=1}^{N} c_m \int_{-\infty}^{\infty} g_{im}(x', x'')\, \bar{\alpha}_m(x'')\, dx'' \int_0^{\infty} e^{-c_m \bar{\alpha}_m(x)|\tau-\tau'|} \tilde{P}_{mj}(\tau', x'', x)\, d\tau', \tag{1.6}$$

где $c_j = k_j(\nu_0)/k_1(\nu_0)$, $k_j(\nu)$ — коэффициент поглощения в j-той линии, рассчитанный на один атом. Умножая обе части уравнения (1.6) на $\bar{\alpha}_i(x')$ и учитывая соотношение (1.5), для функции $P_{ij}(\tau, x', x) = \bar{\alpha}_i(x')\, \bar{P}_{ij}(\tau, x', x)$ получаем уравнение

$$P_{ij}(\tau, x', x) = R_{ij}(x', x)\, e^{-c_j \bar{\alpha}_j(x)\tau} + \\ + \sum_{m=1}^{N} c_m \int_{-\infty}^{\infty} R_{im}(x', x'')\, dx'' \int_0^{\infty} e^{-c_m \bar{\alpha}_m(x'')|\tau-\tau'|} P_{mj}(\tau', x'', x)\, d\tau'. \tag{1.7}$$

Опираясь на исследования, проведенные в работе [7], представим функцию перераспределения по частотам и линиям, задающуюся посредством (1.4), в виде

$$R_{ij}(x', x) = \Lambda_{ij} \sum_{k=1}^{\infty} a_k a_{ik}(x')\, a_{ik}(x), \tag{1.8}$$

где $\Lambda_{ij} = \lambda_{ij} A_j \pi^{-5/2}$. В упомянутой работе приводится ряд методов построения представления вида (1.8) в случае перераспределения излучения по частотам внутри одной и той же спектральной линии. Эти методы можно легко обобщить на случай, когда учитывается также и перераспределение энергии между различными спектральными линиями. Один из способов построения представления (1.8) заключается в разложении функций $f_k(x, u)$ $(-\infty < u < \infty)$ в ряд по нечетным полиномам Эрмита. В этом случае

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, 2^{2k-1}(2k-1)!} \qquad (k = 1, 2\ldots). \tag{1.9}$$

Разложим теперь искомую функцию $P_{ij}(\tau, x', x)$ в ряд по системе функций $\{a_{ik}(x)\}$

$$P_{ij}(\tau, x', x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k a_{ik}(x')\, Q_k^{ij}(\tau, x). \tag{1.10}$$

В n-ом приближении относительно функций $Q_k^{ij}(\tau, x)$ получим следующее уравнение:

$$Q_k^{ij}(\tau, x) = \Lambda_{ij}\alpha_{jk}(x)\, e^{-c_j\bar{\alpha}_j(x)\tau} + \\ + \sum_{m=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} K_{ks}^{im}(|\tau-\tau'|)\, Q_s^{mj}(\tau', x)\, d\tau', \tag{1.11}$$

где

$$K_{ks}^{im}(\tau) = \Lambda_{im}c_m\alpha_s\int_{-\infty}^{\infty}\alpha_{mk}(x')\,\alpha_{ms}(x')\, e^{-c_m\bar{\alpha}_m(x')\tau}\, dx'. \tag{1.12}$$

Отметим, что в приведенной системе уравнений (1.11) возникновение верхних индексов у искомых функций связано с существованием различных спектральных линий, между которыми происходит перераспределение лучистой энергии; соответственно, нижние индексы обусловлены рассмотрением n-ого приближения при аппроксимации функции перераспределения. В случае одной спектральной линии одна из сумм и верхние индексы исчезают и вместо (1.11) мы приходим к системе интегральных уравнений, детально изученной в работах [6—8]. Интенсивности выходящего излучения выражаются через функции $Q_k^{ij}(\tau, x)$ следующим образом:

$$I_j(0, x) = \sum_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty} dx'\int_{0}^{\infty} q_i(\tau, x')\,\bar{P}_{ij}(\tau, x', x)\, d\tau = \\ = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha_{ik}(x')}{\bar{\alpha}_i(x')}\, dx'\int_{-\infty}^{\infty} q_i(\tau, x')\, Q_k^{ij}(\tau, x)\, d\tau, \tag{1.13}$$

где величина $q_i(\tau, x')\, dx' d\tau$ представляет собой количество энергии, приходящее непосредственно от источников излучения в i-той линии в интервале частот x', $x' + dx'$ и поглощаемое в интервале оптических глубин от τ до $\tau + d\tau$. В случае равномерно распределенных источников указанная величина не зависит от оптической глубины, и вместо (1.13) будем иметь

$$I_j(0, x) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ik}\int_{0}^{\infty} Q_k^{ij}(\tau, x)\, d\tau, \tag{1.14}$$

где

$$\gamma_{ik} = a_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_{ik}(x')}{\bar{\alpha}_i(x')} q_i(x')\, dx'.$$

В том простейшем случае, когда в разложении функции $R_{ij}(x', x)$ ограничиваемся одним членом ($n = 1$), уравнение (1.11) принимает следующий вид:

$$Q^{ij}(\tau, x) = \Lambda_{ij} e^{-c_j \alpha_j(x)\tau} + \sum_{m=1}^{N} \int_0^{\infty} K^{im}(|\tau - \tau'|) Q^{mj}(\tau', x)\, d\tau', \qquad (1.15)$$

где $Q^{ij}(\tau, x) = \dfrac{Q_1^{ij}(\tau, x)}{\alpha_{j1}(x)}$. Вместо формулы (1.14) тогда будем иметь

$$I_j(0, x) = \bar{\alpha}_j(x) \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \int_0^{\infty} Q^{ij}(\tau, x)\, d\tau, \qquad (1.16)$$

где

$$\gamma_i = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_{i1}(x')}{\bar{\alpha}_i(x')} q_i(x')\, dx'.$$

Ниже, во втором разделе, мы обратимся к вопросу о нахождении интеграла, входящего в правую часть соотношения (1.16), завершив тем самым решение задачи о нахождении интенсивностей излучения, выходящего из среды в каждой из спектральных линий.

2. *Трехмерная задача.* В настоящем разделе мы рассмотрим трехмерный аналог рассмотренной задачи в случае полного перераспределения по частотам и линиям и покажем, как на основе результатов предыдущих работ [6—9] могут быть получены явные выражения для интенсивностей выходящего излучения без предварительного знания функций источника. Указанные интенсивности выражаются непосредственно через решения некоторых функциональных уравнений, являющихся обобщением известного уравнения Амбарцумяна для функции φ.

Итак, пусть полубесконечная изотермическая атмосфера заполнена атомами с тремя энергетическими уровнями, расположение которых схематически изображено на рис. 2. С такой конфигурацией энергетических состояний мы сталкиваемся, в частности, в вышеупо-

мянутых задачах об образовании натриевого дублета и линий H и K ионизованного кальция. На рис. 2 схематически отмечены возможные переходы между различными уровнями.

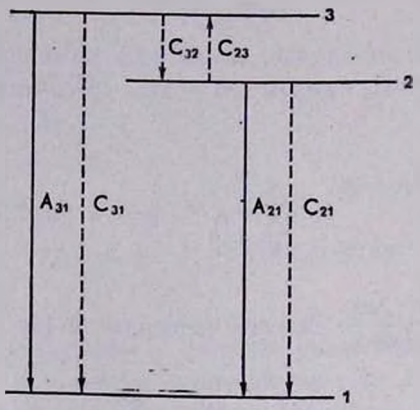

Рис. 2.

Наша цель заключается в нахождении интенсивностей выходящего излучения в обеих линиях в зависимости от частоты и угла. Указанные трехмерные задачи могут быть поставлены и решены в случае общего закона перераспределения, однако здесь, ради простоты, мы ограничимся рассмотрением случая, соответствующего полному перераспределению по частотам.

Как известно [4, 5], задача при сделанных выше предположениях сводится к решению системы двух связанных интегральных уравнений относительно функций источника $S_{1i} = \dfrac{2h\nu_{1i}^3}{c^2} \dfrac{g_1}{g_i} \dfrac{n_i}{n_1}$ $(i = 2, 3)$.

$$(1 + a_1) S_{12} - a_1 \frac{\beta_2}{\beta_3} S_{13} = (1 - \Lambda_{21}) \frac{1}{2} \int_0^\infty S_{12}(t) K(|\tau - t|)\, dt + \Lambda_{21}\beta_2, \tag{2.1}$$

$$(1 + a_2) S_{13} - a_2 \frac{\beta_3}{\beta_2} S_{12} = (1 - \Lambda_{31}) \frac{1}{2} \frac{\varkappa}{r} \int_0^\infty S_{13}(t) K(\varkappa|\tau - t|)\, dt + \Lambda_{31}\beta_3,$$

где введены следующие обозначения:

$$\Lambda_{i1}=\frac{C_{i1}}{C_{i1}+A_{i1}}; \qquad \beta_i=\frac{2h\nu_{1i}^3}{c^2}e^{-\frac{h\nu_{1i}}{kT}} \ (i=2,\ 3);$$
$$a_1=\frac{C_{23}}{A_{21}+C_{21}}; \quad a_2=\frac{C_{32}}{A_{31}+C_{21}}; \quad r=\nu_{13}^0/\nu_{12}^0, \tag{2.2}$$

$\varkappa=B_{13}/B_{12}$ — представляет собой отношение оптических глубин в соответствующих линиях. В случае D_1 и D_2 линий натрия $\varkappa\approx 2$. Ядро системы интегральных уравнений имеет вид

$$K(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\alpha^2(x)\,E_1[\alpha(x)\tau]\,dx=\int_0^{\infty}G(s)\,e^{-\tau s}ds, \tag{2.3}$$

где

$$G(s)=\frac{1}{s}\int_{E(s)}^{\infty}\alpha^2(x)\,dx, \qquad E(s)=\begin{cases}0 & \text{при } s\geqslant 1\\ \alpha[x(s)]=s & s<1.\end{cases} \tag{2.4}$$

Для наших целей систему (2.1) удобно записать в виде

$$S_i(\tau)=S_i^0(T)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\int_0^{\infty}S_j(t)\,K_{ij}(|\tau-t|)\,dt \qquad (i=1,2), \tag{2.5}$$

где для краткости положено $S_{12}\equiv S_1$, $S_{13}\equiv S_2$, а также введены следующие обозначения:

$$K_{ij}(\tau)=\int_0^{\infty}G_{ij}(s)\,e^{-\tau s}\,ds; \quad G_{ij}(s)=\lambda_i^j G_j(s),$$
$$G_1(s)\equiv G(s) \text{ (см. 2.4), а } G_2(s)=\frac{1}{r}G\left(\frac{s}{\varkappa}\right). \tag{2.6}$$

Далее

$$\lambda_1^1=\frac{A_{21}}{C_{21}}\frac{\Lambda_{21}(1+a_2)}{\Delta}; \qquad \lambda_2^1=\frac{a_2}{1+a_2}\frac{\beta_2}{\beta_1}\lambda_1^1;$$
$$\lambda_2^2=\frac{A_{31}}{C_{31}}\frac{\Lambda_{31}}{C_1}\frac{\Lambda_{31}(1+a_1)}{\Delta}; \qquad \lambda_1^2=\frac{a_1}{1+a_1}\frac{\beta_2}{\beta_3}\lambda_2^2; \qquad \Delta=1+a_1+a_2, \tag{2.7}$$

$$S_1^0(T)=\frac{\beta_2}{\Delta}[(1+a_2)\Lambda_{21}+a_1\Lambda_{31}]; \qquad S_2^0(T)=\frac{\beta_3}{\Delta}[a_2\Lambda_{21}+(1+a_1)\Lambda_{31}].$$

В предыдущих работах [8, 9] были разработаны методы решения системы интегральных уравнений (2.5) в случае конечней и полубесконечной сред. Кратчайший путь решения указанной системы, основанный на факторизации матричных интегральных операторов, изложен в работах [7, 10]. Мы не остановимся на применении этих методов к нашей задаче, поскольку здесь нас будут интересовать лишь интенсивности излучения, выходящего из среды в каждой из линий. С целью нахождения этих величин рассмотрим следующую вспомогательную систему интегральных уравнений:

$$U_{im}(\tau, s) = \delta_{im} e^{-\tau s} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} \int_0^\infty K_{ij}(|\tau - t|)\, U_{jm}(t, s)\, dt. \qquad (2.8)$$

Сравнивая свободные члены приведенной системы и системы уравнений (2.5), находим что решение последней выражается через функции $U_{im}(\tau, s)$ следующим образом:

$$S_i(\tau) = \sum_{m=1}^{2} S_m^0(T)\, U_{im}(\tau, 0). \qquad (2.9)$$

С другой стороны, для интенсивностей выходящего излучения имеем

$$I_1(0, \mu, x) = \int_0^\infty S_1(t)\, e^{-\alpha(x)\frac{t}{\mu}}\, \alpha(x)\, \frac{dt}{\mu};$$
$$I_2(0, \mu, x) = \int_0^\infty S_2(t)\, e^{-\alpha(x)\varkappa\frac{t}{\mu}}\, \varkappa\alpha(x)\, \frac{dt}{\mu}. \qquad (2.10)$$

С учетом соотношений (2.9) будем иметь

$$I_1\left(0, \frac{\mu}{\alpha(x)}\right) = \frac{1}{\mu} \sum_{m=1}^{2} \rho_{1m}\left(0, \frac{1}{\mu}\right),$$
$$I_2\left(0, \frac{\mu}{\varkappa\alpha(x)}\right) = \frac{1}{\mu} \sum_{m=1}^{2} \rho_{2m}\left(0, \frac{1}{\mu}\right), \qquad (2.11)$$

где

$$\rho_{im}\left(0, \frac{1}{\mu}\right) = \int_0^\infty U_{im}(t, 0)\, e^{-\frac{t}{\mu}}\, \frac{dt}{\mu}. \qquad (2.12)$$

Как было показано в работе [8], величины ρ_{im} выражаются через функции, являющиеся, в известном смысле, аналогом φ-функции Амбарцумяна для скалярного случая. Однако следует помнить, что ввиду отсутствия симметрии ядер $K_{ij}(\tau)$ относительно индексов, в выражениях для $\rho_{im}(0, 1/\mu)$ будут фигурировать две системы функций, в противоположность случаю симметричных ядер, подробно рассмотренному в упомянутой работе:

$$\rho_{im}\left(0, \frac{1}{\mu}\right) = \mu \sum_{p=1}^{2} H_{pm}(0)\, \overline{H}_{pi}\left(\frac{1}{\mu}\right), \tag{2.13}$$

где функции $H_{pm}(s)$ и $\overline{H}_{pm}(s)$ определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} H_{pm}(s) &= \delta_{pm} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2} \sum_{q=1}^{2} \int_0^\infty G_{pk}(s') \frac{H_{qm}(s)\overline{H}_{qk}(s')}{s+s'}\, ds'. \\ \overline{H}_{pm}(s) &= \delta_{pm} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2} \sum_{q=1}^{2} \int_0^\infty G_{kp}(s') \frac{\overline{H}_{qm}(s) H_{qk}(s')}{s+s'}\, ds'. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Отметим здесь также, что приведенная система может быть преобразована в новую систему уравнений относительно функций

$$\varphi_{ip}(s) = \sum_{m=1}^{2} G_{mi}(s) H_{pm}(s); \qquad \overline{\varphi}_{ip}(s) = \sum_{m=1}^{2} G_{im}(s) \overline{H}_{pm}(s). \tag{2.15}$$

Указанная система имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi_{ip}(s) &= G_{ip}(s) + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{2} \int_0^\infty \frac{\varphi_{iq}(s)\overline{\varphi}_{pq}(s')}{s+s'}\, ds'. \\ \overline{\varphi}_{im}(s) &= G_{pi}(s) + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{2} \int_0^\infty \frac{\overline{\varphi}_{iq}(s)\varphi_{pq}(s')}{s+s'}\, ds'. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Принимая во внимание соотношения (2.13) и (2.11), для интенсивностей выходящего излучения окончательно получаем:

$$I_1(0,\ \mu,\ x) = b_1\overline{H}_{11}\left(\frac{\alpha(x)}{\mu}\right) + b_2\overline{H}_{21}\left(\frac{\alpha(x)}{\mu}\right),$$
$$I_2\left(0,\ \frac{\mu}{\chi},\ x\right) = b_1\overline{H}_{12}\left(\frac{\alpha(x)}{\mu}\right) + b_2\overline{H}_{21}\left(\frac{\alpha(x)}{\mu}\right), \tag{2.17}$$

где

$$b_i = S_1^0(T)\,H_{i1}(0) + S_2^0(T)\,H_{i2}(0) \quad (i=1,\ 2). \tag{2.18}$$

Из приведенных соотношений видно, что указанные интенсивности целиком выражаются через функции $H_{pm}(s)$ и $\overline{H}_{pm}(s)$, задающиеся посредством (2.14). С другой стороны, отчетливо вырисовывается роль изучения вспомогательной системы (2.8), имеющей фундаментальное значение как при рассмотрении задач переноса в частотах спектральных линий при общем законе перераспределения и неизотропном рассеянии, так и в задаче об образовании мультиплетов, рассмотренной в настоящей реботе.

Остановимся теперь несколько подробнее на случае, когда

$$C_{23} \gg A_{21} + C_{21}; \quad C_{32} \gg A_{31} + C_{31}, \tag{2.19}$$

или в наших обозначениях (см. 2.2; 2.6)

$$\lambda_1^1 \simeq \lambda_2^1 \equiv \lambda_1; \qquad \lambda_1^2 \simeq \lambda_2^2 \equiv \lambda_2. \tag{2.20}$$

Условия (2.19) приводились Уодделом в качестве необходимых и достаточных условий равенства функций источника на всех глубинах. Это нетрудно увидеть при рассмотрении уравнений (2.1), если положить, что выполняется приближенное равенство $(\beta_2/\beta_3 \approx 1)$. В случае же, когда имеет место равенство, касающееся функций источника, из формул (2.10) следует, что

$$I_1(0,\ \mu,\ x) = I_2\left(0,\ \frac{\mu}{\chi},\ x\right). \tag{2.21}$$

Вывод о существовании такой закономерности был сделан Уодделлом [1, 2] на основе наблюдательного материала, касающегося изменения интенсивностей выходящего излучения в частотах мультиплетов вдоль солнечного диска. Исходя из существующей теории образования спектральных линий, нетрудно убедиться, что при условии (2.19) выходящие интенсивности выражаются через функцию $\varphi(s)$ Амбарцумяна. Этот результат может быть получен также на основе соотношений (2.17) и (2.18), имеющих место в общем случае. В самом деле, ввиду (2.6) и (2.20) функции $G_{ij}(s)$ можно считать не зависящими от первого из индексов. В этом случае из (2.14) следует, что

$$H_{11}(s) \equiv 1 + H_{21}(s), \quad \overline{H}_{11}(s) \equiv 1 + \overline{H}_{12}(s),$$
$$H_{22}(s) \equiv 1 + H_{12}(s), \quad \overline{H}_{22}(s) \equiv 1 + \overline{H}_{21}(s), \tag{2.22}$$

и поскольку в данном случае $S_1^0(T) \simeq S_2^0(T) \equiv S^0$, то соотношение (2.17) перепишется в виде

$$I_1(0, \mu, x) = I_2\left(0, \frac{\mu}{\varkappa}, x\right) =$$
$$= S^0[H_{11}(0) + H_{22}(0) - 1]\left[\overline{H}_{11}\left(\frac{\alpha(x)}{\mu}\right) + \overline{H}_{22}\left(\frac{\alpha(x)}{\mu}\right) - 1\right]. \tag{2.23}$$

При выполнении вышеуказанных условий (2.19) можно показать, после ряда несложных выкладок, что

$$H_{11}(s) + H_{22}(s) = \overline{H}_{11}(s) = \overline{H}_{22}(s). \tag{2.24}$$

Тогда вместо (2.23) будем иметь

$$I_1(0, \mu, x) = I_2\left(0, \frac{\mu}{\varkappa}, x\right) = S^0 \varphi(0) \varphi\left(\frac{\alpha(x)}{\mu}\right), \tag{2.25}$$

где $\varphi(s)$ является решением следующего функционального уравнения:

$$\varphi(s) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^\infty R(s') \frac{\varphi(s)\varphi(s')}{s + s'} ds', \tag{2.26}$$

причем

$$R(s) = \lambda_1 G_1(s) + \lambda_2 G_2(s).$$

Вопрос о нахождении $\varphi(0)$ решается обычным способом (см. [11]). Для этой величины мы получаем

$$\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda_1 - \lambda_2}} \tag{2.27}$$

и окончательно

$$I_1(0, \mu, x) = I_2\left(0, \frac{\mu}{x}, x\right) = S^0 \frac{\varphi\left(\frac{\alpha(x)}{\mu}\right)}{\sqrt{1 - \lambda_1 - \lambda_2}}. \tag{2.28}$$

Таким образом, в рассматриваемом частном случае, когда связь между верхними двумя уровнями достаточно сильная, интенсивности выходящего излучения весьма просто выражаются через скалярную

ф-функцию. Такого результата можно было ожидать, исходя из интегрального уравнения, в которое переходит система (2.5) в нашем частном случае.

В заключение остановимся вкратце на вопросе о вычислении интегралов, входящих в правую часть соотношения (1.16). Метод нахождения указанных интегралов практически совпадает с методом, примененным в настоящем разделе при вычислении интенсивностей выходящего излучения. Наряду с системой (1.15) рассмотрим вспомогательную систему уравнений (2.8) с соответствующей матрицей-ядром

$$K^{im}(\tau) = \int_0^1 G^{im}(s)\, e^{-\tau s} ds, \tag{2.29}$$

где

$$G^{im}(s) = 2c_m \Lambda_{im} \bar{\alpha}_m^2 [x_m(s)]\, x_m'(s); \quad \bar{\alpha}_m [x_m(s)] = s. \tag{2.30}$$

Повторяя далее шаг за шагом рассуждения, аналогичные тем, которые проводились выше, получаем

$$\int_0^\infty Q^{ij}(\tau, x)\, d\tau = \frac{\Lambda_{ij}}{c_j \bar{\alpha}_j(x)} \sum_{m=1}^{N} \sum_{p=1}^{N} H_{pl}(0)\, \bar{H}_{pm} [c_j \bar{\alpha}_j(x)], \tag{2.31}$$

где функции $H_{ik}(s)$ и $\bar{H}_{ik}(s)$ определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} H_{ik}(s) &= \delta_{ik} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{2} \sum_{m=1}^{2} \int_0^1 \frac{H_{mk}(s)\, \bar{H}_{mp}(s')}{s + s'} G_{ip}(s')\, ds', \\ \bar{H}_{ik}(s) &= \delta_{ik} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{2} \sum_{m=1}^{2} \int_0^1 \frac{\bar{H}_{mk}(s)\, H_{mp}(s')}{s + s'} G_{pl}(s')\, ds'. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Этим завершается решение задачи в одномерном случае при общем законе перераспределения по частотам.

Автор признателен академику В. А. Амбарцумяну и Н. Б. Енгибаряну за проявленный интерес к работе, обсуждения и ряд ценных замечаний.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория

LINEAR PROBLEM OF MULTILEVEL ATOM RADIATION

A. G. NICOGHOSSIAN

The problem of multiplets formation in the spectra of atoms with splitted upper level is considered.

The Section 1 of the paper is devoted to the formulation and solution of the problem in the case of real redistribution law. Purely for convenience, a one-dimensional problem is discussed.

The next Section is devoted to the three-dimensional problem of resonance lines formation in an semi-infinite, constant temperature atmosphere, filled by three-level atoms where the two upper levels are separated by a very small energy. The atom model is a prototype for studies of the D lines of Na, or the H and K lines of CaII. The intensities of radiation emerging within each of the lines from an atmosphere in the case of a complete redistribution in frequencies are obtained. These quantities are found in terms of generalised — for matrix case — Ambartsumian's φ-functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. H. Waddell*, Ap. J., 136, 231, 1962.
2. *J. H. Waddell*, Ap. J., 138, 1147, 1963.
3. *W. Kalkofen, E. H. Avrett*, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, 8, 219, 1968.
4. *G. D. Finn*, JQSRT, 8, 251, 1968.
5. *G. D. Finn, J. T. Jefferies*, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, 8, 1705, 1968.
6. *Н. Б. Енгибарян, А. Г. Никогосян*, Астрофизика, 8, 71, 1972.
7. *N. B. Yengibarian, A. G. Nicoghossian*, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, 1973 (в печати).
8. *Н. Б. Енгибарян, А. Г. Никогосян*, Астрофизика, 8, 213. 1972.
9. *Н. Б. Енгибарян*, Астрофизика, 7, 573, 1971.
10. *Н. Б. Енгибарян, М. А. Мнацаканян*, ДАН СССР, 206, 792, 1972.
11. *В. В. Соболев*, Курс теоретической астрофизики, Наука, М., 1967.