АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 9 МАЙ, 1973 ВЫПУСК 2

ЗАВИСИМОСТЬ ЧИСЛА ИСТОЧНИКОВ ОТ ПОТОКА И МЕТОД V/V_m В ИССЛЕДОВАНИИ ЭВОЛЮЦИИ КВАЗИЗВЕЗДНЫХ РАДИОИСТОЧНИКОВ

В. Ю. ТЕРЕБИЖ

Поступила 19 марта 1973

Получены точные выражения, описывающие распределение величины V/V_m для квазизвездных радиоисточников при произвольном характере их эволюции. Найдена количественная характеристика связи между методами $N-S$ и V/V_m. Зависимость между указанными методами оказалась существенной. Приводятся аргументы в пользу эволюции плотности квазизвездных радиоисточников, основанные на анализе распределения этих объектов на диаграмме светимость—красное смещение.

Статистические характеристики внегалактических радиоисточников исследуются обычно посредством определения числа объектов N, поток от которых на некоторой частоте превосходит заданную величину S. В последнее время наряду с подсчетами источников в зависимости от величины потока широкое применение получил метод V/V_m, развитый в работах Кафки [1], Роуэна-Робинсона [2] и Шмидта [3]. Результаты применения обоих методов к различным выборкам квазизвездных радиоисточников определенно указывают на существование эволюционных эффектов, связанных с этими объектами.

Начиная с 1970 г., когда Лонгейр и Шейер [4] пришли к заключению, что методы $N-S$ и V/V_m весьма тесно связаны, соотношение между двумя указанными методами обсуждалось неоднократно. Наиболее обстоятельно вывод Лонгейра и Шейера о том, что использование метода V/V_m позволяет принять во внимание лишь небольшую дополнительную информацию по сравнению с методом $N-S$, критиковался Рисом и Шмидтом [5], а также Линдсом и Петросяном [6], возражения которых касались в основном роли наблюдательной селекции и чувствительности метода V/V_m по отношению к индивидуальным значениям z.

Целью данной заметки является вывод точных выражений для функции распределения величины V/V_m и применение их к интерпретации наблюдательных данных, относящихся к квазизвездным радиоисточникам. Полученные результаты позволяют, в частности, дать количественную характеристику связи между методом V/V_m и прямым подсчетом источников.

Напомним кратко сущность метода V/V_m для двумерной выборки объектов, определяемой условиями

$$S_r \geqslant S_r^*, \quad S_o > S_o^*, \tag{1}$$

где S_r и S_o — потоки излучения в радио- и оптическом диапазонах, S_r^* и S_o^* — соответствующие предельные потоки. Монохроматический поток излучения $S(\nu)$ от источника на частоте ν связан со светимостью этого источника $L[\nu(1+z)]$ на частоте $\nu(1+z)$ соотношением

$$S(\nu) = \frac{L[\nu(1+z)](1+z)}{4\pi D^2(z)}, \tag{2}$$

где $D(z)$ — фотометрическое расстояние источника (в часто использующейся модели с $\Lambda = 0$, $q_0 = +1$ величина $D(z) = cz/H_o$). Предполагая, что зависимость светимости от частоты является степенной, и зная красные смещения и спектральные индексы объектов выборки, из (2) можно определить светимости L_r и L_o объектов на некоторых заранее выбранных частотах, соответствующих радио- и оптическому диапазонам.

Далее, полагая в (2) последовательно $S = S_r^*$ и $S = S_o^*$, для объекта с известными L_r и L_o можно найти соответствующие предельные значения z_m^r и z_m^o. Объект будет включен в выборку (1) при условии, что его красное смещение $z \leqslant z_m$, где

$$z_m = \min\{z_m^r, z_m^o\}. \tag{3}$$

Обозначим посредством $V(z)$ объем пространства в настоящий момент времени, соответствующий объекту с красным смещением z, и рассмотрим для произвольно взятого из выборки источника отношение

$$\frac{V}{V_m} = \frac{V(z)}{V[z_m(L_r, L_o)]}. \tag{4}$$

Метод V/V_m (не следует смешивать понятия тест светимость — объем и метод V/V_m, так как первый метод не связан с образованием собственно отношения объемов) заключается в анализе наблюдаемого распределения случайной величины V/V_m.

1. *Случай одномерной выборки.* Рассмотрим сначала случай, когда выборка ограничена лишь одним условием $S > S^*$, так что $z_m = z_m(L)$, где S и L могут относиться как к радио-, так и к оптическому диапазону. Ниже будет показано, что результаты, полученные для одномерной выборки, могут служить основой при рассмотрении практически более важного случая двумерной выборки.

Обозначим посредством $\varphi(L, z)$ и $\rho(z)$ соответственно нормированную к 1 функцию светимости и плотность объектов в сопутствующих координатах (остающуюся постоянной при отсутствии эволюции) в момент времени, соответствующий красному смещению z. Число объектов со светимостью из промежутка $[L, L+dL]$ и красным смещением из промежутка $[z, z+dz]$ равно

$$n(L, z)\,dL\,dz = \varphi(L, z)\,dL \cdot \rho(z)\,dV(z), \tag{5}$$

причем выборка, ограниченная предельным значением потока, занимает область $0 \leqslant L < \infty$, $z \leqslant z_m(L)$.

Для того, чтобы определить число $n(L, x)\,dL\,dx$ объектов, светимость которых находится в промежутке $(L, L+dL)$, а значение величины V/V_m, являющейся функцией L и z, — в промежутке $[x, x+dx]$ необходимо решить относительно z уравнение

$$\frac{V(z)}{V[z_m(L)]} = x \tag{6}$$

и подставить решение в (5). Учитывая, что $V(x)$ монотонно возрастает с ростом z, и обозначая посредством $\zeta(x, L)$ решение уравнения (6), получаем

$$n(L, x)\,dL\,dx = \varphi[L, \zeta(x, L)]\,\rho[\zeta(x, L)]\,V'[\zeta(x, L)]\,\frac{\partial \zeta(x, L)}{\partial x}\,dL\,dx. \tag{7}$$

Из определения функции $\zeta(x, L)$ следует, что она удовлетворяет соотношению

$$V'[\zeta(x, L)]\,\frac{\partial \zeta(x, L)}{\partial x} = V[z_m(L)]. \tag{8}$$

Из (7) и (8) окончательно находим

$$n(L, x) = \varphi[L, \zeta(x, L)]\,\rho[\zeta(x, L)]\,V[z_m(L)]. \tag{9}$$

Объекты выборки занимают теперь область $0 \leqslant L < \infty$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Поскольку имеющиеся сейчас наблюдательные данные о квазизвездных радиоисточниках недостаточны для построения распределений V/V_m для объектов, находящихся в узких интервалах светимости, обычно рассматривается суммарное распределение V/V_m для объектов всех светимостей. Это распределение определяется выражением

$$n(x) = \int_0^\infty \varphi[L, \zeta(x, L)]\,\rho[\zeta(x, L)]\,V[z_m(L)]\,dL. \tag{10}$$

Плотность распределения случайной величины V/V_m очевидно равна $f(x) = n(x) \Big/ \int_0^1 n(x)\,dx.$

В частном случае, когда $\varphi(L, z) \equiv \varphi(L)$, принято говорить об эволюции плотности объектов, а при $\rho(z) \equiv \rho_0 = \mathrm{const}$ — об эволюции светимости. Формулы, относящиеся к этим случаям, непосредственно следуют из (9) и (10). При полном отсутствии эволюции n не зависит от x, $f(x) \equiv 1$, так что величина V/V_m распределена равномерно на отрезке [0, 1]. Этот факт и используется обычно при интерпретации наблюдательных данных.

Решение уравнения (6) зависит только от выбранной космологической модели и легко может быть построено с помощью имеющихся таблиц функции $V(z)$ (см., напр., [7]). В любой модели $\zeta(x, L)$ монотонно возрастает от 0 при $x = 0$ до $z_m(L)$ при $x = 1$. В некоторых случаях $\zeta(x, L)$ можно найти в явном виде*. Например, в модели Эйнштейна—де Ситтера ($\Lambda = 0$, $q_0 = +1/2$)

$$V(z) = \frac{32\pi}{3}\left(\frac{c}{H_0}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right)^3 \tag{11}$$

и решение уравнения (6) имеет вид

$$\zeta(x, L) = \left[1 - x^{1/3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + z_m(L)}}\right)\right]^{-2} - 1. \tag{12}$$

Следует отметить, что одно лишь знание из наблюдений плотности распределения $f(x)$ величины V/V_m не позволяет однозначно

* При практическом построении функции распределения величины V/V_m удобно представить $\varphi(L, z)$ и $\rho(z)$ в виде функций от $V(z)$ — это всегда можно сделать, не теряя общности. Полагая, например, $\rho(z) = D(V)$ и учитывая, что $\zeta(x, L)$ является решением уравнения (6), получаем: $\rho[\zeta(x, L)] = D[x \cdot V_m(L)]$. Таким образом, при желании можно избежать определения функции $\zeta(x, L)$ в явном виде. Указанный прием следует применять и при рассмотрении двумерной выборки.

решить, имеем ли мы дело только с эволюцией плотности или только с эволюцией светимости. Для решения этого вопроса необходимы дополнительные данные.

2. *Подсчеты источников до данной величины и метод* V/V_m. Обратимся снова к формулам (2) и (4) и перепишем их, имея в виду одномерную выборку, в сокращенном виде

$$\begin{cases} S = \dfrac{L}{u(z)}, \\ \dfrac{V}{V_m} = v(L, z), \end{cases} \qquad (13)$$

где явно указано, что S и V/V_m представляют собой две случайные величины, зависящие от двух других величин L и z. Распределение последних известно и определяется формулой (5). Поэтому из (13) могут быть найдены как частные функции распределения величин S и V/V_m, так и их *совместная* функция распределения. Частная функция распределения V/V_m была найдена в предыдущем разделе; распределение потоков, следующее из (5) и (13), определяется известной формулой

$$N(S) = \int_0^\infty \rho(z)\, dV(z) \int_{Su(z)}^\infty \varphi(L, z)\, dL. \qquad (14)$$

Мы не будем приводить выражение для совместной функции распределения S и V/V_m. Отметим лишь, что, поскольку эти величины зависимы, Лонгейр и Шейер в определенном смысле правы, утверждая, что методы $N - S$ и V/V_m не независимы. Связь между распределениями, однако, имеет вероятностную природу и, зная лишь $N(S)$, нельзя, вообще говоря, получить полную информацию о распределении V/V_m. Лишь в следующих случаях: 1) когда функция светимости может считаться заданной и 2) для статического эвклидова пространства, когда формулы (13) принимают вид

$$\begin{cases} S \sim \dfrac{L}{r^2}, \\ \dfrac{V}{V_m} \sim \left(\dfrac{L}{r^2}\right)^{-3/2}, \end{cases} \qquad (15)$$

знание $N(S)$ позволяет однозначно определить распределение V/V_m и наоборот.

Вместе с тем, тот факт, что для статического эвклидова пространства распределения V/V_m и $(S^*/S)^{3/2}$ совпадают, весьма примечателен. Он показывает, что *в общем случае различие между распределениями обусловлено лишь отличием принимаемой космологической модели от статической эвклидовой.* До тех пор, пока это отличие мало, следует ожидать, что методы $N-S$ и V/V_m практически совпадают.

Для того, чтобы оценить степень зависимости рассматриваемых методов, мы вычислили коэффициент корреляции r между величинами V/V_m и $(S^*/S)^{3/2}$ для замкнутой модели Вселенной с $\Lambda=0$, $q_0=+1$, т. е. величину

$$r=\frac{\left\langle \frac{V}{V_m}\cdot\left(\frac{S^*}{S}\right)^{3/2}\right\rangle-\left\langle \frac{V}{V_m}\right\rangle\left\langle\left(\frac{S^*}{S}\right)^{3/2}\right\rangle}{\sigma\left(\frac{V}{V_m}\right)\cdot\sigma\left[\left(\frac{S^*}{S}\right)^{3/2}\right]}. \tag{16}$$

При этом считалось, что эволюционные эффекты отсутствуют, так что

$$\left\langle \frac{V}{V_m}\right\rangle=\frac{1}{2},\qquad \sigma\left(\frac{V}{V_m}\right)=\frac{1}{\sqrt{12}}. \tag{17}$$

Для нахождения моментов S использовалось распределение (14), а для нахождения смешанного момента — (5). В соответствии с данными [3, 8] о функции радиосветимости квазизвездных радиоисточников, считалось, что

$$\varphi(L)=\begin{cases}0 &, \ L\leqslant L_1,\\ \mathrm{const}\left(\frac{L_1}{L}\right)^k, & L>L_1;\quad k>1.\end{cases} \tag{18}$$

Наконец, фигурирующая в расчетах характерная безразмерная величина $4\pi c^3S^*/H_0^2L_1$ была принята равной 10^{-2}.

Коэффициент корреляции оказался равным $r=0.74$ при $k=2$ и $r=0.76$ при $k=2.5$. Рассмотренная нами космологическая модель существенно отличается от статической эвклидовой; как уже отмечалось, при приближении к последней следует ожидать более высоких значений r вплоть до предельного значения $r=1$. Вследствие этого можно утверждать, что связь между методами $N-S$ и V/V_m существенна. Зная одно из распределений, можно достаточно определенно предсказать характерные свойства другого. На частных примерах это было продемонстрировано Лонгейром и Шейером [4].

3. ***Метод V/V_m в случае выборки, ограниченной двумя пределами.*** Неоднократно указывалось, что, в связи с самим процессом отождествления квазизвездных радиоисточников, выборка их необходимо ограничена двумя предельными значениями потоков излучения — радио- и оптическим. Обобщение приведенных выше результатов на случай двумерной выборки не представляет труда. Действительно, обозначая через $\varphi(L_r, L_o, z)$ совместную функцию светимости в радио- и оптическом диапазонах, находим вместо (9)

$$n(L_r, L_o, x) = \varphi[L_r, L_o, \zeta(x, L_r, L_o)]\rho[\zeta(x, L_r, L_o)]V[z_m(L_r, L_o)], \quad (19)$$

где $\zeta(x, L_r, L_0)$ — решение относительно z уравнения

$$\frac{V(z)}{V[z_m(L_r, L_o)]} = x. \quad (20)$$

Частное распределение $n(x)$ объектов по значениям V/V_m получается из (19) интегрированием по L_r и L_o в пределах от 0 до ∞. Как легко видеть, при отсутствии эволюции величина V/V_m распределена равномерно на отрезке [0, 1].

Для интерпретации данных, относящихся к двумерной выборке, существенное значение имеет отношение предельных потоков S_r^*/S_o^*, которое мы обозначим через γ. Как видно из формул (2) и (3), при $L_r > \gamma L_o$ имеет место неравенство $z_m^r > z_m^o$ и, следовательно, $z_m = z_m^o$. При $L_r < \gamma L_o$ имеет место обратное неравенство $z_m^r < z_m^o$, так что $z_m = z_m^r$. Это означает [5], что на диаграмме $S_r - S_o$ область, занимаемую выборкой, можно разделить прямой $S_r = \gamma S_o$ на две части: 1) R, где $z_m = z_m^r$ и 2) O, где $z_m = z_m^o$.

Выясним соотношение между характеристиками всей выборки (1) и выборками в областях R и O. Прежде всего, из сказанного выше непосредственно следует, что решение уравнения (20) $\zeta(x, L_r, L_o)$ есть просто решение для одномерной выборки $\zeta(x, L_r)$ в R и аналогичное решение $\zeta(x, L_o)$ в O. Поэтому распределение величины V/V_m для всей выборки можно представить в виде

$$n(x) = n_R(x) + n_O(x), \quad (21)$$

где

$$n_R(x) = \int_0^\infty \Phi_R[L_r, \zeta(x, L_r)]\rho[\zeta(x, L_r)]V[z_m(L_r)]\,dL_r \quad (22)$$

и

$$n_O(x) = \int\limits_0^\infty \Phi_O\,[L_0,\ \zeta(x, L_0)]\,\rho[\zeta(x, L_0)]\ V[z_m(L_0)]\,dL_0 \qquad (23)$$

суть распределения в областях R и O соответственно. Функции Φ_R и Φ_O равны

$$\Phi_R(L_r, z) = \int\limits_{L_r/\gamma}^\infty \varphi(L_r, L_0, z)\,dL_0, \qquad \Phi_O(L_0, z) = \int\limits_{\gamma L_0}^\infty \varphi(L_r, L_0, z)\,dL_r\,. \qquad (24)$$

Нетрудно заметить сходство полученных выше выражений (22) и (23) с соответствующим выражением (10) для одномерной выборки. Вместо одномерной функции светимости $\varphi(L, z)$ в (22) и (23) входят $\Phi_R(L_r, z)$ и $\Phi_O(L_0, z)$, т. е., с точностью до множителя, зависящего от z, функция радиосветимости в области R и функция оптической светимости в O. С учетом этого обстоятельства все результаты, полученные выше для одномерной выборки, легко перенести на двумерную выборку. В частности, при отсутствии эволюции величина V/V_m распределена равномерно не только во всей выборке, но и в каждой из выборок R и O.

Вместе с тем, формулы (24) показывают, что наличие лишь весьма частного вида эволюции, например, эволюции лишь оптической светимости, приводит к изменению функции распределения V/V_m не только в области O, но и, вообще говоря, в области R. Поэтому из того факта, что $\langle V/V_m \rangle_O$ для квазизвездных радиоисточников незначимо отклоняется от 1/2, а $\langle V/V_m \rangle_R$ отличается значимо, нельзя заключать, как это иногда делается, что преобладает эволюция радиосветимости. На это обстоятельство ранее указали Рис и Шмидт [5].

Обратимся теперь к вопросу о связи между методами $N-S$ и V/V_m для двумерной выборки. Легко показать, что выражения для числа источников до данного S_r в области R и до S_0 в области O, т. е. функции $N_R(S_r)$ и $N_O(S_0)$, получаются из (14) заменой $\varphi(L, z)$ соответственно на $\Phi_R(L_r, z)$ и $\Phi_O(L_0, z)$. Полная аналогия с одномерной выборкой позволяет заключить, что в общем случае метод V/V_m весьма тесно связан с подсчетами радиоисточников в зависимости от радиопотока в области R и от оптического потока в O. Разумеется, этот факт нисколько не умаляет строгости метода V/V_m и некоторых его преимуществ практического характера по сравнению с прямыми подсчетами источников. Поскольку, однако, наблюдательная информация используется в обоих методах сходным образом, даже их совместное применение не упрощает выбор между предположениями об эволюции плотности и эволюции светимости квазизвездных радиоисточников. Лишь при таком увеличении наблюдательных данных, которое позволит рассматривать отдельно объекты, находящиеся в узких интервалах расстояния или светимости, из анализа распределения величин V/V_m можно получить существенно бо́льшую информацию, чем из подсчета источников до данной величины. Подчеркнем, что этот вывод не относится к анализу полных диаграмм светимость — красное смещение или, что эквивалентно, светимость — объем. Наблюдательная информация теряется при образовании собственно отношения V/V_m.

4. *Выбор между предположениями об эволюции плотности и об эволюции светимости.* Как было показано Шмидтом [3] для выборки квазизвездных радиоисточников из каталога 3CR, имеется лишь слабая зависимость между светимостями этих объектов и величинами V/V_m для них. Это обстоятельство было использовано Шмидтом в качестве аргумента против возможности эволюции светимости. Аналогичный результат получили для выборки квазизвездных радиоисточников из каталога 4C Линдс и Уиллс [9]. В дальнейшем Шмидт [10] привел аргументы в пользу эволюции плотности, не основанные непосредственно на методе V/V_m.

Из соотношения (9) видно, что степень зависимости между L и V/V_m определяется не только изменением функции светимости с эпохой, но и изменением плотности объектов. Поэтому результаты, полученные Шмидтом, не позволяют дать однозначного указания на характер преимущественной эволюции квазизвездных радиоисточников.

Вместе с тем, имеется возможность получить такие указания, основываясь на распределении объектов на диаграмме светимость — красное смещение. Поскольку объекты с красным смещением z попадают в выборку лишь при условии, что их радиосветимость L_r превосходит некоторое значение $L_m^r(z)$, а оптическая светимость L_o превосходит $L_m^o(z)$, наблюдательная селекция приводит к увеличению выборочной светимости объектов с ростом z. Если, однако, выделить только объекты выборки с красным смещением из промежутка $[0, z]$, попадающие в область $L_r > L_m^r(z)$, $L_o \geqslant L_m^o(z)$, то на их характеристиках наблюдательная селекция не скажется и по степени зависимости L_r и L_o от z можно судить об изменении светимости с эпохой. Следует, однако, иметь в виду, что сравнительно небольшой объем имеющихся в настоящее время полных выборок квазизвездных радиоисточников не позволяет считать полученные таким образом результаты окончательными.

В табл. 1, составленной на основе данных Шмидта [3] и Линдса и Уиллса [9] о выборках квазизвездных радиоисточников из каталогов 3CR и 4C, последовательно указаны: 1) выборка, 2) верхняя граница промежутка $[0, z]$, 3) число объектов из этого промежутка с $L_r > L_m^r(z)$, $L_o > L_m^o(z)$, 4) коэффициент корреляции между $\lg L_o$ и z для выбранных объектов и 5) коэффициент корреляции между $\lg L_r$ и z. Функции $L_m^r(z)$ и $L_m^o(z)$, являющиеся обратными функциями $z_m^r(L_r)$ и $z_m^o(L_o)$, определялись из уравнения (2) с учетом предельных значений потоков излучения, приведенных в [3] и [9].

Таблица 1

Выборка	z	n	$r(\lg L_o, z)$	$r(\lg L_r, z)$
	0.8	7	0.32 ± 0.34	0.05 ± 0.38
3CR	1.0	11	0.36 ± 0.26	0.08 ± 0.30
	1.2	8	-0.13 ± 0.35	-0.47 ± 0.28
	1.2	7	0.01 ± 0.38	0.18 ± 0.37
4C	2.0	8	0.29 ± 0.32	0.05 ± 0.35
	2.2	7	-0.06 ± 0.38	0.31 ± 0.34

В выборках 3CR и 4C содержится, соответственно, 33 и 30 источников; в каждую из выделенных нами областей попадает лишь около 10 источников, чем и обусловлена сравнительно большая неопределенность коэффициентов корреляции. Тем не менее, можно заключить, что существенной корреляции оптической и радиосветимости с красным смещением нет. Следует отметить также то обстоятельство, что нет разницы между значениями коэффициента корреляции для данных в радио- и оптическом диапазонах. Таким образом, приведенные результаты свидетельствуют в пользу эволюции плотности квазизвездных радиоисточников.

Автор признателен В. А. Амбарцумяну за полезные замечания и М. А. Аракеляну за стимулирующее обсуждение вопросов, рассматриваемых в данной статье.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория

SOURCE-COUNT ANALYSIS AND THE V/V_m TEST IN THE STUDY OF THE EVOLUTION OF QUASI-STELLAR RADIO SOURCES

V. Yu. TEREBIZH

The exact expressions concerning the distribution of V/V_m for quasi-stellar radio sources under the arbitrary character of their evolution are derived. The quantitative estimate of the dependence between $N-S$ and V/V_m methods is given. The above mentioned dependence is found to be significant. Arguments are rendered in favour of the density evolution of quasi-stellar radio sources based on the analysis of distribution of these objects on the luminosity-redshift diagram.

ЛИТЕРАТУРА

1. *P. Kafka*, Nature, 213, 346, 1967.
2. *M. Rowan-Robinson*, M. N., 138, 445; 141, 445, 1968.
3. *M. Schmidt*, Ap. J., 151, 393, 1968.
4. *M. S. Longair, P. A. G. Scheuer*, M. N., 151, 45, 1970.
5. *M. J. Rees, M. Schmidt*, M. N., 154, 1, 1971.
6. *R. Lynds, V. Petrosian*, Ap. J., 175, 591, 1972.
7. *S. Refsdal, R. Stabell, F. G. de Lange*, Mem. R.A.S, 71, 143, 1967.
8. *V. Petrosian*, Ap. Lett., 6, 71, 1970.
9. *R. Lynds, D. Wills*, Ap. J., 172, 531, 1972.
10. *M. Schmidt*, Ap. J., 176, 273, 1972.