Известия НАН Армении, Математика, том 55, н. 2, 2020, стр. 3 – 8

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ СЛУЧАЙНЫМИ ТОЧКАМИ В ТЕЛЕ ИЗ R^3

Н. Г. АГАРОНЯН, В. ХАЛАТЯН

Ереванский государственный университет[1]
E-mails: *narine78@ysu.am*; *khalatyan96@gmail.com*

Аннотация. В настоящей работе получена формула для вычисления функции плотности $f_\rho(x)$ растояния между двумя случайными независимыми точками, случайно и равномерно выбранными в ограниченном выпуклом теле D. Формула позволяет найти явный вид функции плотности $f_\rho(x)$ для тела D с известным распределением длины хорды. В частности, получено явное выражение для $f_\rho(x)$ для случая шара диаметра d в R^3.

MSC2010 numbers: 60D05; 52A22; 53C65.

Ключевые слова: функция распределения длины хорды; кинематическая мера в R^3; ограниченное выпуклое тело.

1. Введение

В прошлом веке немецкий математик В. Бляшке сформулировал проблему исследования ограниченного выпуклого тела вероятностными методами. В частности, проблему распознавания ограниченных выпуклых тел по распределению длины хорды. В этой статье рассматривается задача для трехмерных тел. Результат для плоских областей см. в [11] и [12].

Пусть D - ограниченное выпуклое тело в трехмерном евклидовом пространстве R^3 с объемом $V(D)$ и площадью поверхности $S(D)$. Пусть P_1 и P_2 - две точки, выбранные случайным образом, независимо и с равномерным распределением в D, мы собираемся найти вероятность того, что расстояние $\rho(P_1, P_2)$ между P_1 и P_2 равно или меньше x, то есть мы хотели бы найти функцию распределения $F_\rho(x)$ расстояния $\rho(P_1, P_2)$. По определению имеем

$$F_\rho(x) = P(P_1, P_2 \in D : \rho(P_1, P_2) \leq x) = \frac{\iint\limits_{\{P_1, P_2 \in D\,:\,\rho(P_1,P_2)\leq x\}} dP_1 dP_2}{\iint\limits_{\{P_1, P_2 \in D\}} dP_1\, dP_2} \tag{1.1}$$

[1]Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 18T-1A252.

где dP_i, $i = 1, 2$ - мера Лебега в пространстве R^3. Так как

$$\iint\limits_{\{P_1,\, P_2 \in D\}} dP_1 dP_2 = V^2(D) \tag{1.2}$$

(здесь мы используем, что точки P_1 и P_2 выбираются независимо в D), мы получаем

$$F_\rho(x) = \frac{1}{V^2(D)} \iint\limits_{\{P_1, P_2 \in D\,:\, \rho(P_1, P_2) \le x\}} dP_1\, dP_2. \tag{1.3}$$

Из выражения элемента площади в сферической системе координат, где в качестве начала координат мы выбираем точку P_1, получаем

$$\begin{cases} x = r\cos\psi\sin\theta \\ y = r\sin\psi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

где r - расстояние между P_1 и P_2, ψ - угол между проекцией отрезка P_1P_2 на XOY и осью OX. θ - это угол, образованный осью OZ и отрезком P_1P_2. Таким образом, используя преобразование из декартовой системы координат в сферическую систему координат, получаем

$$dP_2 = dx_2 d\,y_2\, dz_2 = r^2\, \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\psi.$$

Используя это выражение, мы имеем

$$dP_1 dP_2 = r^2\, dr\, \sin\theta\, d\theta\, d\psi = r^2\, dr \cdot dK, \tag{1.4}$$

где dK - элемент кинематической меры в R^3.

Кинематическая плотность в евклидовом пространстве была впервые введена Пуанкаре. В современной терминологии это мера Хаара группы движений (сдвигов и вращений), которая действует в пространстве. Пусть R^3 - евклидово трехмерное пространство, и dK - кинематическая плотность, нормированная так, что мера всех положений относительно точки равна $8\pi^2$. Другими словами, мера всех положений тела D с объемом $V(D)$, для которого D содержит неподвижную точку, равна $8\pi^2 V(D)$.

Используя (1.4), мы можем переписать (1.3) в следующем виде:

$$F_\rho(x) = \frac{1}{V^2(D)} \int_0^x r^2 K(D, r) dr \tag{1.5}$$

где $K(D,r)$ - кинематическая мера всех ориентированных отрезков длины r, лежащих внутри D. Таким образом, мы получаем связь между функцией плотности $f_\rho(x)$ расстояния $\rho(P_1,P_2)$ и кинематической мерой $K(D,x)$:

$$f_\rho(x) = \frac{x^2 K(D,x)}{[V(D)]^2} \tag{1.6}$$

Следует отметить, что мы можем вычислить кинематическую меру всех неориентированных отрезков, которые лежат внутри D, а затем умножить результат на 2.

Пусть $S_1 = MS$ - образ отрезка S при евклидовом движении. M - группа всех евклидовых движений в пространстве R^3. Для локально компактной группы M существует локально конечная мера Хаара, т. е. локально конечная, не тождественно равная нулю борелевская мера, инвариантная как слева, так и справа. Отрезок S_1 можно определить с помощью двух координат (γ, t), где $\gamma \in J$ (J - пространство всех прямых в R^3) содержит отрезок S_1, а t - одномерная координата центра отрезка S_1 на прямой γ. В пространстве M определим меру по ее элементу следующим образом:

$$m(dS_1) = d\gamma\, dt, \tag{1.7}$$

где $d\gamma$ - локально конечная мера в пространстве J, инвариантная относительно группы M, а dt - одномерная мера Лебега на γ. Мера $m(\cdot)$ называется кинематической мерой на группе M.

2. Основная формула

В этом разделе приведена основная формула для вычисления кинематической меры $K(D,x)$ в терминах функции распределения длины хорды тела D. Как известно (см. [1] - [3] или [10]), решение задачи о нахождении кинематической меры $K(D,x)$ отрезков постоянной длины x, целиком лежащих в D, непростое и существенно зависит от формы D. Очевидно, что

$$K(D,r) = 0, \quad \text{если } r \geq diam(D)$$

где $diam(D)$ - диаметр D, т.е. $diam(D) = max\{\rho(x,y) : x,y \in D\}$, где $\rho(x,y)$ - расстояние между точками x и y. Следовательно, только случай $0 \leq r \leq diam(D)$ рассматривается в статье. Очевидно, что в указанном случае

$$K(D,r) = \int\limits_{[D]} \int\limits_{t \in (0,\chi(\gamma)-r)} d\gamma\, dt = \int (\chi(\gamma) - r)^+ d\gamma, \tag{2.1}$$

где $[D]=\{\gamma\in J:\gamma\cap D\neq\varnothing\}$ - множество прямых в R^3, пересекающих тело D, $\chi(\gamma)=\gamma\cap D$ - хорда в D, а

$$x^+=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0\\ x, & \text{если } x\ge 0.\end{cases}$$

Известно, что (см. [1] или [4])

$$\int\chi(\gamma)\,d\gamma=2\pi V(D),\qquad \int d\gamma=\frac{\pi}{2}S(D) \tag{2.2}$$

поэтому,

$$K(D,r)=\int\limits_{\chi(\gamma)>r}\chi(\gamma)\,d\gamma-r\int\limits_{\chi(\gamma)>r}d\gamma=2\pi\,V(D)-G(r)-r\,\frac{\pi}{2}S(D)\,[1-F_D(r)], \tag{2.3}$$

где

$$G(x)=\int_{\chi(\gamma)\le x}\chi(\gamma)\,d\gamma \tag{2.4}$$

и $F_D(\cdot)$ - функция распределения длины хорды тела D, определяемая как

$$F_D(y)=\frac{2}{\pi S(D)}\cdot\int_{\chi(\gamma)\le y}d\gamma \tag{2.5}$$

(так как $\int_{[D]}d\gamma=\frac{\pi}{2}\cdot S(D)$). Теперь докажем следующую формулу:

$$G(x)=\frac{\pi}{2}S(D)\int_0^x u\,f_D(u)\,du, \tag{2.6}$$

где $f_D(x)$ - функция плотности длины хорды тела D, т. е. $f_D(x)=F'_D(x)$ - первая производная функция распределения. Теперь вычислим производную функции $G(x)$. Имеем

$$\frac{G(x+\Delta x)-G(x)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\int_{x<\chi(\gamma)\le x+\Delta x}\chi(\gamma)\,d\gamma$$
$$=(x+\theta\Delta x)\,\frac{\pi}{2}S(D)\,\frac{F_D(x+\Delta x)-F_D(x)}{\Delta x}.$$

Тогда, предполагая, что функция распределения $F_D(x)$ обладает плотностью $f_D(x)$, при $\Delta x\to 0$, получим $G'(x)=\frac{\pi}{2}S(D)\,x\,f_D(x)$, откуда следует

$$G(x)=G(0)+\frac{\pi}{2}S(D)\int_0^x u\,f_D(u)\,du=\frac{\pi}{2}S(D)\int_0^x u\,f_D(u)\,du, \tag{2.7}$$

поскольку $G(0)=\int_{\chi(\gamma)\le 0}\chi(\gamma)\,d\gamma=0$. Теперь преобразуем формулу (2.7) путем интегрирования по частям:

$$G(x)=\frac{\pi}{2}S(D)\int_0^x uf_D(u)du=-\frac{\pi}{2}S(D)\int_0^x u\,d[1-F_D(u)] \tag{2.8}$$
$$=-\frac{\pi}{2}x\,S(D)\,[1-F_D(x)]+\frac{\pi}{2}S(D)\int_0^x[1-F_D(u)]\,du.$$

Наконец, подставляя (2.8) в формулу (2.3) для $K(D,r)$, приходим к основной формуле:

$$K(D,r) = 2\pi V(D) - \frac{\pi}{2} S(D) \int_0^r [1 - F_D(u)] du. \tag{2.9}$$

Теорема 2.1. *Для любого тела D в R^3*

$$K(D,r) = 2\pi V(D) - \frac{\pi}{2} S(D) \int_0^r [1 - F_D(u)] du.$$

Таким образом, если задана явная форма функции $F_D(u)$ для тела D, то можно вывести явное выражение для кинематической меры $K(D,r)$ с помощью (2.9). Формула (2.9) была получена для неориентированных отрезков. Для ориентированных отрезков эту формулу следует умножить на 2. Подставив (2.9) в (2.3) (и умножив на 2), получим основную формулу этой статьи:

$$f_\rho(r) = \frac{4\pi V(D) r^2 + \pi r^2 S(D) \int_0^r F_D(u)\, du - r^3 \pi\, S(D)}{V(D)^2} \tag{2.10}$$

Полученная формула позволяет рассчитать кинематическую меру $K(D,r)$ с помощью функции распределения длины хорды.

3. Случай шара в R^3

В случае шара $D = B_d$ с диаметром d, $V(B_d) = \frac{1}{6}\pi d^3$, $S(B_d) = \pi d^2$. Поэтому, используя теорему 2.1, получаем

$$K(B_d, r) = \frac{\pi^2 d^3}{3} + \frac{\pi^2 d^2}{2} \int_0^r F_D(u) du - \frac{r\pi^2 d^2}{2}. \tag{3.1}$$

Длина хорды Функция распределения длины хорды для шара B_d имеет следующий вид (см. [6], [7] или [8]):

$$F_{B_d}(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \le 0 \\ (y/d)^2, & \text{если } 0 \le y \le d \\ 1, & \text{если } y \ge d. \end{cases} \tag{3.2}$$

Следовательно, подставляя (3.2) в (3.1), получаем

$$K(B_d, r) = \frac{\pi^2 d^3}{3} + \frac{\pi^2 r^3}{6} - \frac{r\pi^2 d^2}{2}. \tag{3.3}$$

Подставляя этот результат в (1.6), получим функцию плотности расстояния между двумя точками, выбранные в шаре диаметром d

$$f_\rho(x) = \frac{24x^2}{d^3} + \frac{12x^5}{d^6} - \frac{36x^3}{d^4}.$$

Применение явной формы $f_\rho(x)$ (или $F_D(x)$) для некоторого тела D дает нам возможность использовать эти формы в кристаллографии (см. [9]).

Abstract. In the present paper a formula for calculation of the density function $f_\rho(x)$ of the distance between two independent points randomly and uniformly chosen in a bounded convex body D is given. The formula permits to find an explicit form of density function $f_\rho(x)$ for body D with known chord length distributions. In particular, we obtain an explicit expression for $f_\rho(x)$ in the case of a ball of diameter d in R^3.

Список литературы

[1] L. A. Santalo, Integral Geometry and Geometric Probability, Addision-Wesley, Reading MA (2004).

[2] R. Schneider, W. Weil, Stochastic and Integral Geometry, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2008).

[3] R. J. Gardner, Geometric Tomography, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2nd ed. (2006).

[4] G. Matheron, Random Sets and Integral Geometry, Wiley, New York (1975).

[5] G. Bianchi, G. Averkov, "Confirmation of Matheron's Conjecture on the covariogram of a planar convex body", Journal of the European Mathematical Society, **11**, 1187 – 1202 (2009).

[6] A. G. Gasparyan, V. K. Ohanyan, "Recognition of triangles by covariogram", Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences), **48**, no. 3, 110 – 122 (2013).

[7] V. K. Ohanyan, N. G. Aharonyan, "Tomography of bounded convex domains", SUTRA: International Journal of Mathematical Science, **2**, no. 1, 1 – 12 (2009).

[8] H. S. Harutyunyan, V. K. Ohanyan, "Chord length distribution function for regular polygons", Advances in Applied Probability, **41**, no. 2, 358 – 366 (2009).

[9] W. Gille, N. G. Aharonyan, H. S. Harutyunyan, "Chord length distribution of pentagonal and hexagonal rods: relation to small-angle scattering", Journal of Applied Crystallography, **42**, 326 – 328 (2009).

[10] Ren De-Lin, Topics in Integral Geometry, Series in PureMathematics, 19, World Scientific, Publishing CO. (1994).

[11] N. G. Aharonyan, "The distribution of the distance between two random points in a convex set", Russian Journal of Mathematical Research, Series A, **1**, 4 – 8 (2015).

[12] N. G. Aharonyan, H. S. Harutyunyan, V. K. Ohanyan, "Random copy of a segment within a convex domain", Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences), **45**, no. 6, 348 – 356 (2010).

Поступила 31 августа 2019

После доработки 17 января 2020

Принята к публикации 6 февраля 2020