АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 8 НОЯБРЬ, 1972 ВЫПУСК 4

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СФЕРОИДОВ, ВЫТЯНУТЫХ ВДОЛЬ ОСИ ВРАЩЕНИЯ ТОРОИДАЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Р. С. ОГАНЕСЯН, М. Г. АБРАМЯН

Поступила 9 июня 1972

Рассматривается вопрос устойчивости жидких сфероидов, вытянутых вдоль оси вращения тороидальным магнитным полем. Устойчивость рассмотрена по отношению к малым поверхностным возмущениям типа $n=m=2$, являющегося определяющим в теории жидких фигур [3, 4]. Установлено, что эти вытянутые магнитным полем сфероиды являются устойчивыми конфигурациями.

В работе [1] нами было показано, что структура силовых магнитных полей, которые оказывают существенное влияние на равновесие самогравитирующей космической плазмы, при стационарном и твердотельном вращении, определяется уравнением

$$\operatorname{rot}\left\{\frac{\vec{B}\cdot\operatorname{rot}\vec{B}}{\rho}\right\}=0. \tag{1}$$

В предположении тороидального характера магнитных полей $\vec{B}=(0;\ 0;\ B)$, найдем следующее решение уравнения (1) [2, 1]:

$$B(r,\ \vartheta)=\gamma\rho r\sin\vartheta \quad \text{или} \quad B(r,\ \vartheta)=B_0\left(\frac{r}{a}\right)\sin\vartheta, \tag{2}$$

где

$$B_0=\gamma\rho a \tag{3}$$

представляет магнитное поле на экваторе. Далее нами было установлено [1], что эллипсоиды Маклорена ($a=b>c$), при индукции поля больше некоторого критического ($B_0>B_c=\omega a\sqrt{2\pi\rho}$), вытягиваются вдоль оси вращения ($a=b<c$), образуя новый тип равновесных фи-

гур в виде вытянутых сфероидов. Притом критическому значению магнитного поля $B_0 = B_c$ соответствует стационарно-вращающаяся фигура равновесия в форме сферы.

В настоящей работе мы рассмотрим устойчивость этих вытянутых сфероидов.

Уравнение поверхности сфероида (S_e) в равновесном состоянии представим в виде

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{4}$$

где предполагается, что вращение происходит вокруг оси z, а начало координат находится в центре конфигурации.

Рассмотрение задачи намного упрощается введением вытянутых сфероидальных координат. С этой целью введем следующие параметры:

$$k^2 = c^2 - a^2 = c^2 e^2; \qquad E = \frac{a}{k} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}. \tag{5}$$

Очевидно, что при $e=0$ сфероид превращается в сферу, а при $e \to 1$ — приблизительно в бесконечный цилиндр.

Вытянутые сфероидальные координаты $(\zeta;\ \vartheta;\ \varphi)$ определим так:

$$\begin{aligned} x &= k\zeta \sin\vartheta \cos\varphi;\\ y &= k\zeta \sin\vartheta \sin\varphi;\\ z &= k(1+\zeta^2)^{1/2}\cos\vartheta. \end{aligned} \tag{6}$$

При этом коэффициенты Ламе имеют вид

$$\begin{aligned} h_\zeta^2 &= k^2\frac{1+\zeta^2-\mu^2}{1+\zeta^2};\\ h_\vartheta^2 &= k^2(1+\zeta^2-\mu^2);\\ h_\varphi^2 &= k^2\zeta^2(1-\mu^2), \end{aligned} \tag{7}$$

где $\mu = \cos\vartheta$. Легко видеть, что $\zeta = \text{const}$ поверхности являются семейство софокусных вытянутых сфероидов. Притом поверхность (4) имеет следующий простой вид:

$$\zeta = E. \tag{8}$$

В дальнейшем нам необходимо условие равновесия, полученное нами для вытянутых сфероидов [1]

$$\frac{p}{\rho} - V - \left(\frac{1}{2}\omega^2 - \rho\frac{\gamma^2}{4\pi}\right) = \text{const}, \tag{9}$$

выразить через параметр e. Здесь $V(x, y, z)$ есть потенциал внутри вытянутого сфероида, имеющий вид

$$\frac{V}{\pi G\rho a^2 c} = \text{const} - A_1(x^2 + y^2) - A_3 z^2, \tag{10}$$

где, при $c > a$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)^2(c^2+u)^{1/2}} = \frac{1}{2k^3}\left[\frac{2e}{1-e^2} - \ln\frac{1+e}{1-e}\right]; \\ A_3 &= \int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)(c^2+u)^{3/2}} = \frac{1}{k^3}\left[\ln\frac{1+e}{1-e} - 2e\right]. \end{aligned} \tag{11}$$

Следовательно, условие (9) с учетом (10) примет вид

$$\frac{p}{\rho} = \text{const} - \pi G\rho a^2 c\left[\left(A_1 - \frac{\omega^2}{2\pi G\rho a^2 c} + \frac{\gamma^2}{4\pi^2 G a^2 c}\right)(x^2 + y^2) + A_3 z^2\right].$$

Так как на поверхности (4) гидростатическое давление должно обращаться в нуль, то p можно представить в виде

$$p = \pi G\rho a^2 c^3 A_3\left[1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}\right]. \tag{12}$$

При этом мы предполагали, что

$$a^2\left(A_1 - \frac{\omega^2}{2\pi G\rho a^2 c} + \frac{\gamma^2}{4\pi^2 G a^2 c}\right) = c^2 A_3. \tag{13}$$

Отсюда, с учетом (11) и (3), получим:

$$\omega^2 - \frac{B_0^2}{2\pi\rho a^2} = \frac{2\pi G\rho}{e^3}\left[3e - \frac{3 - e^2}{2}\ln\frac{1+e}{1-e}\right]. \tag{14}$$

Отметим, что правая часть формулы (14) при $0 \leqslant e \leqslant 1$ есть величина существенно отрицательная. То есть (14) имеет место при $B_0 \geqslant B_c = a\omega\sqrt{2\pi\rho}$.

Теперь применим метод теории малых колебаний к исследованию устойчивости вытянутых сфероидов по отношению к малым поверхностным возмущениям. Исходная система уравнений есть

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}\vec{u} = 0. \\ &\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + 2\vec{\omega}\times\vec{u} = -\nabla\Pi_1 - \frac{1}{4\pi\rho}\,[\vec{B}\operatorname{rot}\vec{B}] \end{aligned}\right| \tag{15}$$

где

$$\Pi_1 = \frac{p}{\rho} - V - \frac{1}{2}\,\omega^2(x^2 + y^3).$$

На возмущенной свободной поверхности гидростатическое давление должно обращаться в нуль:

$$[p]_s = 0. \tag{16}$$

Это представляет граничное условие задачи.

Представим решения системы (15) в виде

$$p = p_e + \delta p; \quad V = V_e + \delta V; \quad \vec{B} = \vec{B}_e + \delta\vec{B}, \tag{17}$$

где индекс „e" указывает на значения параметров равновесной конфигурации.

Отметим, что гидродинамическое поле скоростей $\vec{u}$ возмущений предполагается соленоидальной

$$\operatorname{rot}\vec{u} = 0. \tag{18}$$

Введем также вектор отклонения частиц жидкости от равновесного положения $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$, которое в линейном приближении суть:

$$\vec{u} \simeq \frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t}.$$

Тогда граничное условие (16) на невозмущенной поверхности S_e примет следующий вид:

$$\begin{aligned} [p]_s = [p_e]_s + [\delta p]_{s_e} = [p_e + \vec{\xi}\operatorname{grad} p_e]_{s_e} + [\delta p]_{s_e} = \\ = [\vec{\xi}\operatorname{grad} p_e + \delta p]_{s_e} = 0, \end{aligned} \tag{19}$$

где мы учли условие $[p_e]_{s_e} = 0$. Запишем условие (19) в виде, удобном для расчетов. С этой целью преобразуем магнитный член во втором уравнении системы (15). Имея в виду условие (18), можно написать

$$\vec{\xi} = \operatorname{grad}\psi, \tag{20}$$

откуда с учетом несжимаемости жидкости, для функции ψ получим уравнение Лапласа:

$$\Delta\psi = 0. \tag{21}$$

Из решений (21) нас будет интересовать только гармоника с $m=n=2$ [3, 4]. Для этого случая легко доказать, что

$$\begin{gathered}[\vec{B}\operatorname{rot}\vec{B}] \simeq [\vec{B}_e \operatorname{rot}\vec{B}_e] + [\vec{B}_e \operatorname{rot}\delta\vec{B}] + [\delta\vec{B}\operatorname{rot}\vec{B}_e] = \\ = -\operatorname{grad}\left\{\vec{\xi}\operatorname{grad}\frac{B_e^2}{2} - B_e^2\right\}.\end{gathered} \tag{22}$$

При преобразовании (22), мы воспользовались соотношениями (18), (2) и тем, что

$$\delta\vec{B} = \operatorname{rot}[\vec{\xi}\vec{B}_e] + (\vec{\xi}\nabla)\vec{B}_e = -(\vec{B}_e\nabla)\vec{\xi}. \tag{23}$$

Тогда, с учетом (22), второе уравнение системы (15) можно представить в виде

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + 2\vec{\omega}\cdot\vec{u} = -\nabla\Pi, \tag{24}$$

где

$$\Pi = \Pi_1 + \frac{B_e^2}{4\pi\rho} - \vec{\xi}\operatorname{grad}\frac{B_e^2}{8\pi\rho} = \mathrm{const} + \frac{1}{\rho}\left\{\delta p - \rho\delta V - \vec{\xi}\operatorname{grad}\frac{B_e^2}{8\pi}\right\}. \tag{25}$$

Здесь мы учли (17) и (19). Следовательно, граничное условие (19), представляющее возможность определения частоты малых колебаний, можно представить в виде

$$[\Phi + \rho\Pi]_{S_e} = 0, \tag{26}$$

где введено обозначение

$$\Phi = \rho\delta V + \vec{\xi}\operatorname{grad}p_e + \vec{\xi}\operatorname{grad}\frac{B_e^2}{8\pi}. \tag{27}$$

Функция Φ имеет простое физическое истолкование. Действительно, $\int\Phi d\tau$ есть необходимая работа для квазистатических $\vec{\xi}$ деформаций поверхности конфугурации.

Теперь вычислим Φ и Π на поверхности равновесной конфигурации.

Решение уравнения (21), в системе координат (6), имеет вид [5]

$$\psi(\zeta, \vartheta, \varphi) \sim P_n^m(x) P_n^m(\mu) e^{im\varphi}, \tag{28}$$

где мы ввели обозначение $x = \sqrt{1+\zeta^2}$. Откуда с помощью (20), при $n = m = 2$ получим

$$[\xi_\zeta]_{s_e} = \frac{K_{2.2}}{h_\zeta} P_2^2(\mu) e^{2i\varphi}, \tag{29}$$

$$[\xi_\vartheta]_{s_e} = \frac{R_{2.2}}{h_\vartheta} P_2^1(\mu) e^{2i\varphi}, \tag{30}$$

где постоянные $K_{2.2}$ и $R_{2.2}$ выражаются следующими интегралами:

$$K_{2.2} = \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} [h_\zeta \xi_\zeta]_{s_e} \cdot e^{-2i\varphi} \sin\vartheta d\vartheta; \tag{31}$$

$$R_{2,2} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} [h_\vartheta \xi_\vartheta]_{s_e} \cdot e^{-2i\varphi} \cos\vartheta d\vartheta. \tag{32}$$

Гравитационный эффект этих отклонений можно представить [3] как увеличение на $\rho[\xi_\zeta]_{s_e}$ плотности поверхностного распределения массы к S_e поверхности. Изменение гравитационного потенциала, обусловленного этим эффектом, является общим решением уравнения Лапласа и следовательно, имеет вид [5]

$$\delta V = \begin{cases} c_{2.2}\dfrac{Q_2^2(x)}{Q_2^2(x_0)} P_2^2(\mu) e^{2i\varphi}; & \zeta \geqslant E, \\[2ex] c_{2.2}\dfrac{P_2^2(x)}{P_2^2(x_0)} P_2^2(\mu) e^{2i\varphi}; & \zeta \leqslant E, \end{cases} \tag{33}$$

где $x_0 = \sqrt{1+E^2}$, а $P_2^2(x)$; $Q_2^2(x)$ — есть присоединенные функции Лежандра комплексного аргумента первого и второго рода, соответственно. Вронскиан этих функций, который пригодится нам для вычисления δV, имеет следующий вид:

$$P_n^m(x)\frac{dQ_n^m(x)}{dx} - Q_n^m(x)\frac{dP_n^m(x)}{dx} = \frac{(-1)^m(n+m)!}{(n-m)}\,\frac{1}{1-x^2}. \tag{34}$$

Для определения коэффициентов $c_{2.2}$ применим теорему Гаусса к массе, распределенной в элементарном объеме поверхности S_e [3]

$$\left[\frac{1}{h_\zeta}\frac{\partial}{\partial\zeta}\delta V\right]_{\zeta=E+0}-\left[\frac{1}{h_\zeta}\frac{\partial}{\partial\zeta}\delta V\right]_{\zeta=E-0}=-4\pi G\rho\,[\xi_\zeta]_{\zeta=E}. \tag{35}$$

Подставляя сюда выражения (29), (33), соответственно для величин $[\xi_\zeta]_{s_e}$ и δV, и используя соотношение (34), для $c_{2.2}$ получим

$$c_{2.2}=\frac{\pi G\rho}{6}\frac{(1-e^2)^{1/2}}{e^2}K_{2.2}P_2^2(x_0)\,Q_2^2(x_0).$$

Отсюда, имея в виду, что

$$P_2^2(x_0)=3\,(x_0^2-1)=3\,\frac{1-e^2}{e^2},$$

$$Q_2^2(x_0)=\frac{3}{2}(x_0^2-1)\ln\frac{x_0+1}{x_0-1}+\frac{5x_0-3x_0^3}{x_0^2-1}=$$

$$=\frac{3}{2}\frac{1-e^2}{e^2}\ln\frac{1+e}{1-e}+\frac{5e^2-3}{e(1-e^2)},$$

находим

$$[\rho\delta V]_{s_e}=\frac{\pi G\rho^2}{2}\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3}\times$$
$$\times\left[\frac{3e^4-6e^2+3}{2e}\ln\frac{1+e}{1-e}+5e^2-3\right]K_{2.2}P_2^2(\mu)\,e^{2i\varphi}. \tag{36}$$

Далее, пользуясь формулой (12), легко получить

$$\operatorname{grad}p_e=-\frac{2\pi G\rho^2}{e\,(1-e^2)}a^3A_3\,h_\zeta\hat{e}_\zeta,$$

где $\hat{e}_\zeta$ — есть единичный вектор в направлении увеличения ζ. Следовательно, имея в виду (29), получим

$$[\vec{\xi}\operatorname{grad}p_e]_{s_e}=-\frac{2\pi G\rho^2a^3}{e\,(1-e^2)}A_3K_{2.2}P_2^2(\mu)\,e^{2i\varphi}. \tag{37}$$

Тем же способом находим

$$\left[\vec{\xi}\operatorname{grad}\frac{B_e^2}{8\pi}\right]_{s_e}=\frac{\gamma^2\rho}{4\pi}\times$$
$$\times\left[\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{1-\mu^2}{1-e^2\mu^2}+\frac{(1-e^2)\mu^2}{1-e^2\mu^2}\frac{R_{2.2}}{K_{2.2}}\right]K_{22}P_2^2(\mu)\,e^{2i\varphi}. \tag{38}$$

Исходя из системы уравнений (15), легко получить дифференциальное уравнение Пуанкарэ для определения функции Π:

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\left(1+\frac{4\omega^2}{s^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}\Pi=0. \tag{39}$$

При выводе этого уравнения предполагали, что $u\sim e^{st}$. Поскольку нас интересует гармоника $n=m=2$, то, следуя Картану [3], воспользуемся следующим частным решением уравнения (39):

$$\Pi=h(x+iy)^2 \quad (h=\mathrm{const}). \tag{40}$$

Тогда с помощью (24) легко установить, что

$$\begin{aligned}
u_x&=-\frac{1}{s^2+4\omega^2}\left(s\frac{\partial}{\partial x}+2\omega\frac{\partial}{\partial y}\right)\Pi=-\frac{2h(x+iy)}{s-2i\omega};\\
u_y&=-\frac{1}{s^2+4\omega^2}\left(s\frac{\partial}{\partial y}-2\omega\frac{\partial}{\partial x}\right)\Pi=-\frac{2hi(x+iy)}{s-2i\omega};\\
u_z&=-\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial z}\Pi=0.
\end{aligned} \tag{41}$$

Очевидно, что вектор $\vec{u}$, определяющийся через (41), удовлетворяет условиям несжимаемости и соленоидальности.

Далее, легко показать также, что

$$[\Pi]_{s_e}=\frac{1}{3}a^2\zeta P_2^2(\mu)\,e^{2i\varphi}, \tag{42}$$

$$[h_\zeta u_\zeta]_{s_e}=-\frac{2a^2he(1-e^2)^{-1/2}}{3(s-2i\omega)}P_2^2(\mu)\,e^{2i\varphi}, \tag{43}$$

$$[h_\vartheta u_\vartheta]_{s_e}=-\frac{2a^2h}{3(s-2i\omega)}P_2^1(\mu)\,e^{2i\varphi}, \tag{44}$$

Тогда, интегрируя (31) и (32), с учетом (43) и (44), получим

$$K_{2.2}=-\frac{2a^2he(1-e^2)^{-1/2}}{3s(s-2i\omega)}; \tag{45}$$

$$R_{2.2}=-\frac{2a^2h}{3s(s-2i\omega)}. \tag{46}$$

Подставляя выражения (45) и (46) в (38), имеем

$$\left[\vec{\xi}\,\mathrm{grad}\frac{B_e^2}{8\pi}\right]_{s_e}=\frac{\gamma^2\rho}{4\pi}\frac{(1-e^2)^{1/2}}{e}K_{2.2}P_2^2(\mu)\,e^{2i\varphi}. \tag{47}$$

Следовательно, с учетом (36), (37), (42) и (47) граничное условие (26) примет следующий вид:

$$[\Phi + \rho\Pi]_{s_e} = \frac{a^2 h}{3}\left[1 - \frac{3\sqrt{1-e^2}}{2a^2 he} K_{2,2}\left(Q - \rho\frac{\gamma^2}{2\pi}\right)\right] P_2^2(\mu)\, e^{2i\varphi} = 0.$$

Или, имея в виду (45), получим уравнение для определения частоты рассматриваемых колебаний:

$$s(s - 2i\omega) + Q - \frac{B_0^2}{2\pi\rho a^2} = 0,$$

откуда находим

$$s_{1,2} = i\left[\omega \pm \left(Q + \omega^2 - \frac{B_0^2}{2\pi\rho a^2}\right)^{1/2}\right]. \tag{48}$$

Здесь введено обозначение

$$Q = \frac{\pi G\rho}{e^4}\left[3 - 13e^2 - \frac{3e^4 - 14e^2 + 3}{2e}\ln\frac{1+e}{1-e}\right]. \tag{49}$$

Существенно отметить, что функция Q в пределах изменения своего аргумента $0 \leqslant e \leqslant 1$ есть величина положительная.

Устойчивость системы определяется знаком подкоренного выражения формулы (48), которое с учетом (14) и (49) приводится к следующему виду:

$$Q + \omega^2 - \frac{B_0^2}{2\pi\rho a^2} = \frac{\pi G\rho}{2e^5} F(e),$$

где

$$F(e) = 2e(3 - 7e^2) - (3 - 8e^2 + e^4)\ln\frac{1+e}{1-e}.$$

В интервале изменения $1 \geqslant e > 0$ функция $F(e)$ положительна ($\infty > \geqslant F(e) > 0$). Следовательно, вытянутые магнитным полем вращающиеся сфероиды являются устойчивыми фигурами равновесия по отношению к рассматриваемым возмущениям.

Ереванский государственный
университет

ON THE STABILITY OF THE SPHEROIDS EXTRACTED ALONG THE AXIS OF ROTATION BY TOROIDAL MAGNETIC FIELD

R. S. HOVANESIAN, M. G. ABRAMIAN

The problem of the stability of liquid spheroids extracted along the axis of rotation by a toroidal magnetic field is considered. The stability concerning small surface perturbations of the type $n = m = 2$, which are decisive in the theory of liquid figures [3, 4] is studied. It is established that the figures extracted by a magnetic field are stable configurations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. С. Оганесян, М. Г. Абрамян*, Астрон. ж. (в печати).
2. *I. W. Roxburgh, B. R. Durney*, M. N., 135, 329, 1967.
3. *P. H. Roberts, K. Stewartson*, Ap. J., 137, 777, 1963.
4. *N. R. Lebovitz*, Ap. J., 134, 500, 1961.
5. *Е. В. Гобсон*, Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, М., 1952.