АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 8 НОЯБРЬ, 1972 ВЫПУСК 4

РЕЗОНАНСНОЕ ЗАТУХАНИЕ КОЛЕБАНИЙ МОДЕЛИ ШАРОВОГО СКОПЛЕНИЯ ЗВЕЗД

В. С. СЫНАХ, А. М. ФРИДМАН, И. Г. ШУХМАН

Поступила 6 мая 1970
Пересмотрена 13 октября 1972

В работе исследуется устойчивость сферически-симметричной системы вращающихся по круговым траекториям масс. Плотность системы в соответствии с наблюдаемыми данными по шаровым скоплениям звезд выбрана спадающей к краю квадратично с расстоянием.

Показано, что в такой системе: а) отсутствуют апериодические возмущения; б) отсутствуют нейтральные колебания; в) имеет место резонансное затухание колебаний.

Отсутствие комплексных собственных значений доказано в работе [8].

1. *Введение*. В качестве модели шарового скопления звезд выберем сферически-симметричную систему вращающихся по круговым траекториям масс (подробнее о модели см. [1]). Однако, в отличие от [1], плотность системы ρ не будем предполагать однородной. В реально наблюдаемых шаровых скоплениях плотность падает к краю довольно резко $\rho(r) \sim r^{-2} \div r^{-3}$ [2]. В дальнейшем для определенности будем считать плотность $\rho(r) \sim r^{-2}$.

Основной целью настоящей работы является выяснение вопроса о существовании нейтральных колебаний неоднородной сферически-симметричной системы вращающихся масс. Для однородной системы ответ на этот вопрос в [1] был дан положительный, однако, как мы увидим ниже, колебания неоднородной системы описываются уравнением, исключающим нейтральные колебания.

Преобладающей неустойчивостью в гравитирующих системах является апериодическая неустойчивость джинсовского типа [3]. И хотя, как указывалось, например, в [4, 5], „неустойчивость“ Джинса [3] связана с отсутствием равновесия, тем не менее апериодический характер гравитационных неустойчивостей джинсовского типа сохраняется и в равновесных системах [5—7]. По этой причине в настоящей работе особо исследуется вопрос о возможности апериодической неустойчивости. Показано, что она отсутствует. Это находится в согласии с результатами работы [8], где доказано отсутствие комплексных собственных значений уравнения, описывающего малые возмущения потенциала рассматриваемой выше неоднородной системы. Отмеченное выше уравнение получено в разделе 2 настоящей работы интегрированием по траекториям бесстолкновительного кинетического уравнения Больцмана-Власова [5, 9—12]. Поскольку полученное уравнение оказалось обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка, после приведения к уравнению типа Шредингера его оказалось удобным исследовать с помощью вариационного принципа [13, 14]. В разделе 3 соответствующее исследование показывает отсутствие чисто мнимых собственных значений системы. В разделе 4 доказана невозможность существования нейтральных колебаний. Причины отсутствия нейтральных колебаний в неоднородной системе в отличие от однородной излагаются в заключении работы, в разделе 5.

2. *Вывод уравнения малых колебаний для неоднородной системы.* Итак, рассматривается сферически-симметричная система гравитирующих частиц, вращающихся в самосогласованном поле. Полной системой уравнений являются кинетическое уравнение Больцмана-Власова и уравнение Пуассона:

$$\hat{L}f + v_r\left(\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{v_\perp}{r}\frac{\partial f}{\partial v_\perp}\right) + \left(\frac{v_\perp^2}{r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)\frac{\partial f}{\partial v_r} - \nabla_\perp \Phi \frac{\partial f}{\partial v_\perp} = 0, \qquad (1)$$

$$\Delta\Phi = 4\pi G\int f d^3v \qquad (2)$$

$f = f(r, v, t)$ — функция распределения; Φ — гравитационный потенциал. Здесь и ниже используется шестимерное фазовое пространство r, θ, φ, v_r, v_θ, v_φ. В этих переменных введены следующие обозначения:

$$v_\perp^2 = v_\varphi^2 + v_\theta^2 \qquad (3)$$

$$\nabla_\perp \Phi \frac{\partial}{\partial v_\perp} = \frac{1}{r}\left(\cos\alpha\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial}{\partial v_\perp} - $$
$$ - \frac{1}{rv_\perp}\left(\sin\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} - \frac{\cos\alpha}{\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha} \qquad (4)$$

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_\perp}{r}\left(\cos\alpha \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} - \operatorname{ctg}\theta \sin\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}\right). \tag{5}$$

Для получения уравнения малых колебаний неоднородной системы воспользуемся методом, разработанным в [1] для аналогичной, но однородной системы.

В случае однородной системы функция распределения в нулевом приближении есть [1]:

$$f_0 = \frac{n_0}{2\pi v_0}\delta(v_\perp - v_0)\,\delta(v_r) \tag{6}$$

n — плотность звезд, $v_0 = \Omega r$, $\Omega = \mathrm{const}$, δ — дельта-функция Дирака. Индексы „0“ обозначают нулевое приближение. Как видно из (6), траектории звезд есть окружности. В линейном приближении из (1) следует:

$$\begin{gathered}\hat{L}f_1 + v_r\left(\frac{\partial f_1}{\partial r} - \frac{v_\perp}{r}\frac{\partial f_1}{\partial v_\perp}\right) + \left(\frac{v_\perp^2}{r} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial r}\right)\frac{\partial f_1}{\partial v_r} = \\ = \frac{\partial \Phi_1}{\partial r}\frac{\partial f_0}{\partial v_r} + \frac{1}{r}\left(\cos\alpha\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} + \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial f_0}{\partial v_\perp}.\end{gathered} \tag{7}$$

Учитывая (6), легко проверить, что решение уравнения (7) есть

$$f_1 = \delta(v_r)\left[A\delta(v_\perp - v_0) + B\delta'(v_\perp - v_0)\right] - C\delta'(v_r)\,\delta(v_\perp - v_0), \tag{8}$$

где штрих — производная по аргументу, а функции A, B, C находятся из уравнений

$$\hat{L}^0 A - \frac{1}{r\Omega}\left(\hat{L}^0 - \frac{\partial}{\partial t}\right)B + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rC) = 0, \tag{9}$$

$$\hat{L}^0 B - 2\Omega C = \frac{n_0}{2\pi\Omega^2 r^2}\left(\hat{L}^0 - \frac{\partial}{\partial t}\right)\Phi_1, \tag{10}$$

$$\hat{L}^0 C + 2\Omega B = -\frac{n_0}{2\pi\Omega r}\frac{\partial \Phi_1}{\partial r}. \tag{11}$$

Оператор $\hat{L}^0$ отличается от оператора $\hat{L}$ заменой $v_\perp/r$ на Ω. Подставляя (8) в линеаризованное уравнение (2), получим

$$\Delta\Phi_1 = 4\pi G\int_0^{2\pi}(\Omega r A - B)\,d\alpha. \tag{12}$$

В [1] с помощью довольно громоздких выкладок удалось выразить функции A и B через возмущенный потенциал Φ_1. Нам не представляется возможным (и целесообразным) приводить хотя бы вкратце изложенный в [1] метод вычисления функций A и B. Заметим только, что обобщение его на случай неоднородной плотности не представляет труда.

Решая систему, аналогичную (9)—(11) для случая $n(r) \sim r^{-2}$ и проделав все выкладки, согласно [1], получим следующее уравнение для возмущенного потенциала:

$$\frac{d}{dr}(r^2 A_l \chi_l') - B_l \chi_l = 0, \tag{13}$$

где

$$A_l = 1 + \sum_{s=-l}^{l} |P_{s0}^l(0)|^2 \frac{\Omega^2}{\omega_s^2 - 2\Omega^2}, \tag{14}$$

$$B_l = l(l+1) + \sum_{s=-l}^{l} |P_{s0}^l(0)|^2 \left[\frac{s^2\Omega^2}{\omega_s^2 - 2\Omega^2} + \frac{s\Omega^3}{\omega_s(\omega_s^2 - 2\Omega^2)} \times \right.$$
$$\left. \times \left(-6 + \frac{\omega_s^2}{\Omega^2} - 4\frac{2\Omega^2 - s\Omega\omega}{\omega_s^2 - 2\Omega^2} \right) \right], \tag{15}$$

$$|P_{s0}^l(0)|^2 = \frac{(l+s)!\,(l-s)!}{\left|\left(\frac{l+s}{2}\right)!\left(\frac{l-s}{2}\right)!\right|^2} 2^{-2l}. \tag{16}$$

В (16) $|l-s|$ — четно, для $|l-s|$ нечетных $|P_{s0}^l(0)|^2 = 0$; $\omega_s \equiv \omega - s\Omega$.

3. *Отсутствие чисто мнимых собственных значений.* Уравнение (13) подстановкой $\chi = \xi\eta$ приводится к уравнению типа Шредингера

$$\xi'' + [E - U_l(r)]\xi = 0, \tag{17}$$

где $m = \hbar = 1$, $E = 0$, $U_l(r) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}k' + \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{r^2}\frac{B_l}{A_l}\right)$,

$$\eta'/\eta = -k/r, \quad k = ln'(A_l r^2). \tag{18}$$

Явный вид $U_l(r)$ для моды $l = 2$ выписан в препринте авторов [20] и представляет собой дробно-рациональную функцию аргумента $\alpha = z^2 = \omega^2/\Omega^2$.

Пусть $\omega = i\gamma$, тогда $z^2 < 0$. Исследование выражения для $U(\alpha)$ показало, что $U_2(\alpha) > E = 0$ при всех $\alpha < 0$, что означает отсутствие чисто мнимых собственных значений. Можно проверить, что с ростом l $U_l(\alpha)$ остается положительным. Это доказывает отсутствие чисто мнимых собственных значений для произвольных l.

4. *Отсутствие нейтральных собственных колебаний и затухание собственных колебаний.* Перепишем (17) в виде

$$\xi' = f(r, \omega)\xi. \tag{19}$$

Умножим (19) на ξ^* и вычтем из полученного выражения комплексно сопряженное:

$$\frac{d}{dr}\left(\xi^* \frac{d\xi}{dr} - \xi \frac{d\xi^*}{dr}\right) = [f(r, \omega) - f^*(r, \omega)]\,|\xi|^2. \tag{20}$$

Интегрируем это уравнение от 0 до ∞:

$$W\Big|_0^\infty = \int_0^\infty [f(r, \omega) - f^*(r, \omega)]\,|\xi|^2\,dr, \tag{21}$$

где

$$W = \xi^* \frac{d\xi}{dr} - \xi \frac{d\xi^*}{dr}.$$

Определяя η из равенства (18), получим для ξ выражение: $\xi = r\sqrt{A}\,\chi$. Пользуясь выражением для ξ и определением A (14), оценим член W на границах интегрирования:

$$\xi^* \frac{d\xi}{dr} = \left(\sqrt{A}\chi + r\frac{A'}{\sqrt{A}}\chi + r\sqrt{A}\chi'\right)(r\sqrt{A}\,\chi)^*. \tag{22}$$

Из условия поведения потенциала при $r = 0$ и $r \to \infty$ имеем: $W(0) = W(\infty) = 0$, т. е.

$$\int_0^\infty [f(r, \omega) - f^*(r, \omega)]\,|\xi|^2\,dr = 0. \tag{23}$$

Для комплексного $z = z_0 + i\gamma/2$ при $\gamma \ll z_0$ имеем $z^2 \approx z_0^2(1 + i\gamma/z_0)$. Обозначив $z_0^2 = \alpha$, перепишем интеграл (23) в виде

$$\gamma \int_0^\infty \mathrm{Im}\, U(\alpha)\,|\xi|^2 d\alpha = 0. \tag{24}$$

В работе [8] доказано отсутствие комплексных собственных значений рассматриваемой задачи. Это означает, что равенство (24) не может выполняться ни при каком конечном γ.

Перейдем теперь к рассмотрению нейтральных колебаний, для чего устремим $\gamma \to 0$. Используя (18) и известное представление δ-функции

$$\delta(x) = \lim_{\gamma \to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{x^2 + \gamma^2}, \tag{25}$$

нетрудно убедиться в том, что в окрестностях всех точек, где подынтегральная функция (без $|\xi|^2$) терпит разрыв, она имеет вид $\delta'(x)$, если $\delta(x)$ определяется формулой (25). Обозначив интеграл (24) буквой I, получим

$$I \sim \operatorname{sign} \gamma \, (A(r) \, |\chi(r)|^2)' \; r = r_i. \tag{26}$$

Из (26) следует, что нейтральные колебания, если их рассматривать как предельный случай колебаний с $\gamma \neq 0$, невозможны.

Знак правой части в (26) зависит от того, приходим ли мы к случаю $\gamma = 0$ от $\gamma > 0$ или $\gamma < 0$. Равенство (20), которое является дифференциальным эквивалентом (26), показывает, что от знака γ зависит знак скачка функции $W(r)$ в точке $r = r_i$. Во всем остальном интервале $(0, \infty)$ при $\gamma = 0$ $dW/dr \equiv 0$.

В работе [8] показано, что величина возмущенного потенциала χ во всех точках r обращается в нуль за исключением окрестностей точек $r = r_i$, где r_i — корни коэффициента A. В окрестностях этих точек потенциал χ имеет логарифмическую особенность

$$\chi \sim C \ln (r - r_i). \tag{27}$$

Устраним неоднозначность решения. Для этого будем считать координату r комплексной величиной. Резонансные точки определяются из равенства нулю разности $\omega - a\Omega$, где $a > 0$. Здесь $\Omega = \Omega(r)$ является уже комплексной величиной, поскольку r — комплексно. В комплексной плоскости r из точек r_i, определяемых из уравнения (точки r_i соответствуют точкам a_i — нулям коэффициента A)

$$\omega - a\Omega(r_i) = 0, \tag{28}$$

проведем разрезы. Тогда решение (27) будет однозначным на всей плоскости комплексного переменного r. Из (28) имеем

$$\operatorname{Im} \omega = -\frac{a v_0}{r_i^2} \operatorname{Im}(r - r_i). \tag{29}$$

Из (29) следует, что при $\operatorname{Im}\omega > 0$ особая точка смещается с действительной оси вниз, а при $\operatorname{Im}\omega < 0$ — вверх. Если разрез проведен из особой точки вниз, то решение на действительной оси регулярно при $\operatorname{Im}\omega > 0$, а при $\operatorname{Im}\omega < 0$ имеет разрыв в точке пересечения разреза с действительной осью (см. рис.1). Если разрез проведен из особой точки вверх, то затухающие и нарастающие решения меняются местами.

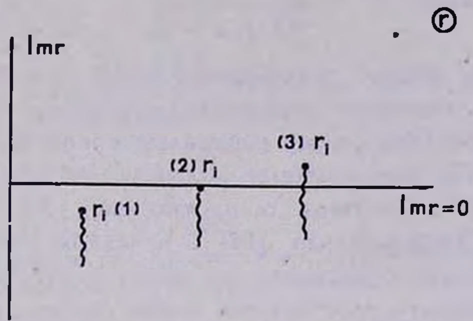

Рис. 1. 1) $\operatorname{Im}\omega > 0$; 2) $\operatorname{Im}\omega = 0$; 3) $\operatorname{Im}\omega < 0$. Волнистая линия — разрез.

Вопрос о направлении обхода особых точек, который в данном случае эквивалентен вопросу о положении разреза, встречается во всех задачах на собственные колебания среды, где колебания могут резонировать с движением частиц среды. Для колебаний покоящейся плазмы Ландау было указано, что резонансная точка должна обходиться таким образом, чтобы получающиеся выражения были аналитическими при $\operatorname{Im}\omega > 0$. Это правило обхода получается автоматически, если рассматривать задачу на собственные колебания как часть более широкой задачи об эволюции начальных возмущений и решать эту последнюю методом преобразования Лапласа [15—17].

Если принять это правило обхода, то уравнение (21) не может быть удовлетворено, поскольку левая часть равенства равна нулю, а правая часть, согласно (26), расходится. Для колебаний с $\operatorname{Im}\omega < 0$ в левой части равенства (21) появляется дополнительное слагаемое, равное величине скачка на разрезе. Можно убедиться в том, что это слагаемое в точности совпадает с величиной интеграла в правой части равенства.

Затухание собственных колебаний неоднородной сферически-симметричной системы вращающихся масс доказано.

5. *Заключение.* Итак, существование нейтральных колебаний есть принципиальная граница, разделяющая однородную и неоднородную системы. В случае, когда траектории частиц—окружности, ко-

лебания вырождены. Об этом указывалось еще в [18]. При учете конечной радиальной дисперсии скоростей в однородной системе колебания становятся коллективными [19].

Можно пояснить причину, вследствие которой существование колебаний обязано исключительно факту однородности плотности. Действительно, в этом случае уравнение для возмущенного потенциала имеет вид (см. также [1])

$$f(\omega)\,\Delta\chi = 0. \tag{30}$$

Как известно из теории гидродинамической устойчивости [13, 16], уравнение (30) в точности аналогично уравнению малых возмущений течения Куэтта, описывающему нейтральные колебания.

Уравнение (13), описывающее малые колебания рассматриваемой в настоящей работе системы с плотностью $\rho(r) \sim r^{-2}$, аналогично уравнению Орра-Зоммерфельда [14] в невязком пределе ($\nu \to 0$). Как известно [13, 14], это уравнение не имеет в отсутствие точки перегиба профиля скорости собственных нейтральных колебаний. Колебания в этом случае могут быть только затухающими [13, 14].

Этот отрицательный результат, касающийся нейтральных колебаний шарового скопления звезд, и был получен в разделе 4. Однако для определения настоящего декремента затухания следует ввести в этом случае эффективную „вязкость“ в виде столкновительного члена в правую часть кинетического уравнения.

Новосибирский государственный
университет

THE RESONANCE DAMPING OF OSCILLATIONS IN A MODEL OF THE SPHERICAL STAR CLUSTER

V. S. SYNAKH, A. M. FRIDMAN, I. G. SHUKHMAN

The stability of a spherically-symmetric system of rotating masses is considered. The density of the system is assumed to be decreasing with the radius as r^{-2} in accordance with observations.

It is shown that aperiodical perturbations as well as neutral oscillations are absent and the resonance damping takes place in such systems.

The absence of the complex eigenvalues for the basic equations is proved in [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Б. Михайловский, А. М. Фридман, Я. Г. Эпельбаум,* ЖЭТФ, 59, 1608. 1970.
2. *U. B. Sawyer,* Handbuch der Physik, Band LIII, Astrophys. IV. Sternsysteme, Berlin, 1959.
3. *J. H. Jeans,* Astronomy and Cosmology, Cambr. Univ. Press, London and New York, 1929.
4. *Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков,* Релятивистская астрофизика, Наука, М., 1967.
5. *Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович, Р. З. Сагдеев, А. М. Фридман,* ПМТФ. № 3, 3, 1969.
6. *A. Toomre,* Ap. J., 139, 1217, 1964.
7. *В. Л. Поляченко, А. М. Фридман,* Астрон. ж., 49, 157, 1972.
8. *А. М. Фридман,* Астрон. ж., 48, 910, 1971.
9. *D. Lynden-Bell,* M. N., 124, 279, 1962.
10. *P. Sweet,* M. N., 125, 285, 1963.
11. *E. P. Lee,* Ap. J., 148, 185, 1967.
12. *C. S. Wu,* Phys. Fluids, 11, 545, 1968.
13. *Линь-Цзя-Цзяо,* Теория гидродинамической неустойчивости, ИИЛ, М., 1958.
14. *А. В. Тимофеев,* Резонансные явления в течениях плазмы и жидкости, препринт ИАЭ им. Курчатова, М., 1968.
15. *Л. Д. Ландау,* ЖЭТФ, 16, 574, 1946.
16. *K. M. Case,* Phys. Fluids, 3, 149, 1960.
17. *Л. А. Дикий,* ДАН СССР, 135, 1068, 1960.
18. *Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович, А. М, Фридман,* ДАН СССР, 182, № 4, 1968.
19. *А. М. Фридман, И. Г. Шухман,* ДАН СССР, 202, № 1, 1972.
20. *В. С. Сынах, А. М. Фридман, И. Г. Шухман,* Препринт ИЯФ СО АН СССР, № 22—70, Новосибирск, 1970.