АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 8 АВГУСТ, 1972 ВЫПУСК 3

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЗВЕЗДЫ

Ю. В. ВАНДАКУРОВ

Поступила 24 января 1972

Рассмотрена устойчивость зоны лучистого равновесия жестко вращающейся неоднородной по составу звезды относительно произвольных мелкомасштабных возмущений. Показано, что для устойчивости неосесимметричных возмущений необходимо, чтобы поверхности постоянного молекулярного веса совпадали с изобарическими (или изотермическими) поверхностями. Неустойчивость может быть также подавлена в присутствии сравнительно слабого тороидального магнитного поля.

Голдрейх и Шуберт [1], а также Фрике [2], рассмотрели устойчивость дифференциального вращения в зоне лучистого равновесия звезды и нашли, что наиболее трудно стабилизируются мелкомасштабные колебания, для которых существенны отклонения от адиабатичности движения. В случае однородной по составу среды условия устойчивости имеют вид

$$\frac{\partial (s^2\Omega)}{\partial s} > 0, \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

где $\Omega = \Omega(s, z)$ — угловая скорость вращения, s, φ, z — цилиндрические координаты. Наличие стратификации молекулярного веса, убывающего от центра к периферии, способствует подавлению неустойчивости [1]. Все эти результаты относятся только к осесимметричным возмущениям ($m = 0$). В настоящей работе будет показано, что для неосесимметричных возмущений ($m \neq 0$ и велико) и в неоднородной по составу среде для устойчивости однородно вращающейся конфигурации необходимо, чтобы поверхности постоянного молекулярного веса ($\mu = \text{const}$) совпадали с изобарическими или изотермическими поверхностями.

В предположении лучистого равновесия однородно вращающейся среды запишем исходную систему уравнений в системе координат, вращающейся вместе со звездой (с учетом возможных отклонений от адиабатичности движения, но без учета вязкости и давления излучения),

$$\rho\left[\frac{d\vec{v}}{dt}+2\vec{\Omega}\times\vec{v}-\vec{G}\right]=-\nabla p, \qquad \vec{G}=\vec{g}+\vec{s}\Omega^2, \tag{2}$$

$$\frac{d\rho}{dt}=-\rho\operatorname{div}\vec{v}, \quad \frac{d\mu}{dt}\equiv\frac{\partial\mu}{dt}+\vec{v}\cdot\nabla\mu=0, \qquad \operatorname{div}\vec{g}=-4\pi G_0\rho, \tag{3}$$

$$\frac{dp}{dt}-\frac{\gamma p}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=\operatorname{div}\left(\frac{\chi\rho}{\mu}\nabla\frac{\mu p}{\rho}\right)+(\gamma-1)\rho\varepsilon, \tag{4}$$

где $\vec{g}$ и ε — сила тяготения и скорость выделения энергии на единицу массы, $\gamma=5/3$ — показатель адиабаты, G_0 — постоянная тяготения, χ — температуропроводность среды. В состоянии равновесия в системе (2) — (4) $\vec{v}=0$, и все величины не зависят от φ и t, вектор $\vec{G}=(g_s+s\Omega^2,\ 0,\ g_z)$.

Рассмотрим теперь устойчивость этого состояния относительно мелкомасштабных возмущений с длиной волны $\lambda\ll\lambda_0$, где λ_0 — характерный масштаб изменения равновесных величин ($\lambda_0\sim\rho/|\nabla\rho|$ или $\lambda_0\sim\mu/|\nabla\mu|$ и т. п.). В этом случае применимо локальное приближение, и решение линеаризованных уравнений колебаний можно представить в виде $\exp[qt+i(k_s s+m\varphi+k_z z)]$, где $k\equiv(k_s^2+k_z^2+m^2/s^2)^{1/2}=2\pi/\lambda$, $\lambda\ll\lambda_0$. Пусть еще скорость звука $v_T\gg|q|/k$ (условие, что колебания низкочастотные).

Как показано в работе [1], в рассматриваемом приближении для эйлеровых компонент возмущения $p^*\approx0$, $\vec{g}^*\approx0$, $\operatorname{div}\vec{v}^*\approx0$, поскольку возмущения давления, силы тяготения и скорости входят, соответственно, в уравнения движения, Пуассона и непрерывности с дополнительным множителем порядка ks. В связи со сказанным, уравнение движения нужно заменить на следующее:

$$\operatorname{rot}[\rho(q\vec{v}^*+2\vec{\Omega}\times\vec{v}^*)-\rho^*\vec{G}]=0. \tag{5}$$

Исключая далее $\mu^*=-(\vec{v}^*.\nabla\mu)/q$ и оставляя в правой части (4) только члены с наивысшей производной по координатам от $(\mu p/\rho)^*$, из уравнений (5), (4) и $\operatorname{div}\vec{v}^*=0$ получим

$$
\begin{aligned}
&sk_s(qv_\varphi^* + 2\Omega v_s^*) - mqv_s^* + mG_s(\rho^*/\rho) = 0,\\
&k_z(qv_s^* - 2\Omega v_\varphi^*) - k_s qv_z^* - (k_z G_s - k_s G_z)(\rho^*/\rho) = 0,\\
&q\vec{f}\cdot\vec{v}^* - k^2\chi\,\vec{\nu}\cdot\vec{v}^* - q(\gamma q + k^2\chi)(\rho^*/\rho) = 0,\\
&sk_s v_s^* + mv_\varphi^* + sk_z v_z^* = 0,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где $\vec{f} = \nabla\ln(p\rho^{-\gamma})$, $\vec{\nu} = \nabla\ln\mu$. Равенство нулю определителя системы (6) является дисперсионным уравнением для q.

$$
q^4\gamma k^2 + q^3k^4\chi + q^2B_2 + qB_3 + B_4 = 0 \tag{7}
$$

$$
B_2 = 4\gamma\Omega^2k_z^2 - (m^2/s^2)(f_sG_s + f_zG_z) - (k_zG_s - k_sG_z)(k_zf_s - k_sf_z),
$$

$$
B_3 = k^2\chi\,\{4\Omega^2k_z^2 + (m^2/s^2)(\nu_sG_s + \nu_zG_z) + (k_zG_s - k_sG_z)(k_z\nu_s - k_s\nu_z)\},
$$

$$
B_4 = (2mk_z\Omega/s)\,k^2\chi\,(G_s\nu_z - G_z\nu_s).
$$

Здесь в формуле для B_3 опущен член $(2mk_z\Omega/s)\;(G_zf_s - G_sf_z)$, который равен нулю в силу уравнения равновесия: $\nabla p = \rho\vec{G}$ (это является следствием совпадения поверхностей $p=\mathrm{const}$, $\rho=\mathrm{const}$ и $\Phi-(1/2)\,s^2\Omega^2=\mathrm{const}$, где $\nabla\Phi = -\vec{g}$). При $m=0$ соотношение (7) вытекает из уравнений работы [1].

Равновесное состояние неустойчиво, если хотя бы один из коэффициентов B_i в уравнении (7) отрицателен. Для адиабатических колебаний (когда $k^2\chi \ll |q|$ и член B_4 мал) отличен от нуля только коэффициент B_2. Он равен сумме трех положительных слагаемых, потому что в рассматриваемой зоне лучистого равновесия $\vec{f}\cdot\vec{G}<0$ и третий член равен $-(\vec{f}\cdot\vec{G})\;(k_zG_s - k_sG_z)^2G^{-2} > 0$. Относительно неадиабатических возмущений с малой длиной волны по φ (когда $m \sim ks$), равновесие всегда неустойчиво, если коэффициент B_4, знак которого зависит от знаков m и k_z, не равен нулю. Условие $B_4=0$ удовлетворяется в следующих трех случаях: а) ν любое, $\Omega=0$, б) $\nu=0$, в) $\nu\neq0$, $\Omega\neq0$, но поверхности $\mu=\mathrm{const}$ и $\Phi-(1/2)\,s^2\Omega^2=\mathrm{const}$ совпадают, т. е.

$$
\vec{\nu}\parallel(\vec{g} + \vec{s}\Omega^2). \tag{8}
$$

При выполнении условия а) для устойчивости необходимо, чтобы вращение отсутствовало не только в зоне неоднородности, но также и внутри соответствующего цилиндра (что вытекает из второго условия (1)).

Параллельность векторов $\vec{\nu}$ и $\vec{G}$ не имеет места, например, в протозвезде, образовавшейся из химически неоднородного протооблака. Конечно, такая протозвезда будет вращаться, скорее всего, дифференциально, однако принятое при выводе (8) допущение, что вращение однородное, не является существенным для природы неустойчивости.

В нормальной жестко вращающейся звезде, имеющей в начальный момент однородный состав, условие (8) будет всегда удовлетворяться, если не учитывать эффекты меридиональной циркуляции и диффузии вещества. Циркуляция будет выводить систему из устойчивого состояния, и неясно, какое состояние установится в результате развития неустойчивости. Вообще говоря, возможен переход к любой из трех упомянутых конфигураций, однако процесс вытеснения углового момента из зоны выгорания представляется маловероятным. Возможно, что неустойчивость будет способствовать перемешиванию вещества по всей звезде. Если будет поддерживаться состояние, для которого удовлетворяется условие (8), то меридиональную циркуляцию, как более медленный процесс, можно не учитывать.

Рассмотрим основные характеристики неустойчивости, возникающей при невыполнении равенства $B_4 = 0$. Примем для простоты, что вращение является медленным ($s\Omega^2 \ll |g|$) и пусть еще $|\vec{\nu} \times \vec{G}| \sim s\Omega^2\nu \sim s\Omega^2/\lambda_0$. Возбуждающиеся колебания имеют длины волн от λ_{min} до λ_{max} и время развития неустойчивости, за исключением длинноволновой области, порядка $\tau \sim q^{-1} \sim |B_3/B_4| \sim |g|/s\Omega^3$. Величина λ_{min} определяется вязкостью среды [1]. При $\lambda \sim \lambda_{max}$ время τ велико из-за того, что колебания становятся близкими к адиабатическим. Это дает $\lambda_{max} \sim 2\pi(|g|\chi/s\Omega^3)^{1/2}$. Будем приводить в дальнейшем численные оценки для слоя Солнца, находящегося на расстоянии $r \sim 0.2\,R_\odot$ от центра, принимая угловую скорость приблизительно однородной. Тогда $\Omega \sim 3\cdot10^{-6}$ *сек*$^{-1}$, $g \sim 2.3\cdot10^5$ *см/сек*^{2}, $\chi \sim 10^6$ *см*^{2}*/сек*, $\lambda_{max} \sim 5\cdot10^9$ *см*, $\tau \sim 2\cdot10^4$ *лет* (время развития неустойчивости τ будет меньше последней величины для возмущений с волновым вектором, почти параллельным силе $\vec{G}$, в зоне, не близкой к экваториальной плоскости).

Обозначим характерное время нестационарных процессов (например, перемешивания вещества), возникающих из-за неустойчивости, через τ_D. Можно привести аргументы в пользу того, что время τ_D не будет заметно превышать время установления теплового равновесия τ_T. Оценим для этого отношение N основных квадратичных членов в уравнении переноса энергии (4) к равновесной величине правой части (4), имеющей порядок $\chi p \lambda_0^{-2}$. С учетом соотношений (6) получим

$$N \sim \frac{p\rho^{-1}|\vec{v}^* \cdot \nabla\rho^*|}{\chi p \lambda_0^{-2}} \sim \frac{\lambda_0 |v^* \rho^*|}{\chi \rho} \sim \frac{\lambda_0^2 q}{\chi}\left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)^2. \tag{9}$$

Если $\lambda_0 \sim r \sim 0.2\, R_\odot$, то $N \sim 300\,(\rho^*/\rho)^2$. Видно, что при $\rho^* \sim 0.06\,\rho$ (или $v^* \sim 10^{-3}$ *см/сек*) неустойчивость приводит к существенному изменению условий теплопереноса. Поэтому время τ_D не будет, по-видимому, заметно отличаться от τ_T.

Приведенные результаты можно обобщить на тот случай, когда существенно давление излучения. Уравнение (4) заменится на

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{3R}{2\mu}T + \frac{\sigma}{\rho}T^4\right) + p\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{3R}{2\rho}\operatorname{div}\left(\frac{\chi\rho}{\mu}\nabla T\right) + \varepsilon, \tag{10}$$

где $p = (R/\mu)\,\rho T + (\sigma/3)\,T^4 = (R/\mu\beta)\,\rho T$ — полное давление, β — отношение газового давления к полному, μ — молекулярный вес. Все последующие формулы остаются справедливыми, если понимать в них под γ и $\vec{f}$, соответственно, $[(32/3\beta^2) - (8/\beta) - 1]$ и $[(8 - 7\beta)/\beta^2]\,(\nabla \ln p - \Gamma \nabla \ln \rho)$. Здесь $\Gamma = [8\,(4 - 3\beta) - 3\beta^2]/3\,(8 - 7\beta)$. Как и прежде, при совпадении поверхностей $\mu = \text{const}$, $p = \text{const}$ и $T = \text{const}$ и условиях $\vec{f}\cdot\vec{G} < 0$, $\vec{\nu}\cdot\vec{G} > 0$ конфигурация устойчива.

В заключение заметим, что в присутствии сравнительно слабого тороидального магнитного поля рассматриваемая неустойчивость должна подавляться, поскольку возмущения с большими m сильно искажают поле. Расчет этого эффекта проведем в локальном приближении в предположении идеальной проводимости среды и для возмущений с небольшими $m\,(m^2 \ll k^2 s^2)$. Считаем еще, что давление излучения мало ($\beta = 1$). Напряженность поля и отношение магнитного давления к газовому будем обозначать, соответственно, через $H \equiv H_\varphi$ и $(1/2)\,\alpha = H^2/8\pi p$. В уравнении (2) нужно учесть магнитную силу, так что в условие равновесия вместо $\vec{g}$ и p войдут $\vec{g} - H^2\vec{s}/4\pi\rho s^2$ и $p + H^2/8\pi$, а в левой части (5) появится дополнительный член $\operatorname{rot}\left\{\frac{1}{4\pi s}\left[\frac{2\vec{s}}{s}HH_\varphi^* - \mathrm{i}m H\vec{H}^* - s\,(\vec{H}^*\cdot\nabla \ln sH)\,\vec{H}\right]\right\}$. Кроме того, систему (2)—(5) нужно дополнить уравнением $\partial\vec{H}/\partial t = \operatorname{rot}(\vec{v}\times\vec{H})$, которое в линейном приближении после исключения $\operatorname{div}\vec{v}^*$ при помощи уравнения непрерывности дает

$$q\left(\frac{H_\varphi^*}{H}-\frac{\rho^*}{\rho}\right)+\vec{h}\cdot\vec{v}^*-\frac{\mathrm{im}}{s}v_\varphi^*=0,\quad qH_s^*=\frac{\mathrm{im}H}{s}v_s^*,\quad qH_z^*=\frac{\mathrm{im}H}{s}v_z^*,$$

где $\vec{h}=\nabla\ln(H/s\rho)$. Уравнение $p^*=0$ заменится на $p^*+HH_\varphi^*/4\pi=0$, тогда как уравнения $\vec{g}^*=0$ и $\operatorname{div}\vec{v}^*=0$ остаются в силе. В случае $\Omega=0$ дисперсионное соотношение будет

$$q^5k^2(\gamma+\alpha)+q^4k^4\lambda(1+\alpha)+q^3A_2+q^2A_3+qA_4+A_5=0, \tag{11}$$

$$A_2=(C-\alpha D)(k_zf_s-k_sf_z)+\alpha(C+\gamma D)(k_zh_s-k_sh_z)+(2\gamma+\alpha)k^2m^2b^2,$$

$$A_3=k^2\lambda\{\alpha(C+D)(k_zh_s-k_sh_z)-(C-\alpha D)(k_z\nu_s-k_s\nu_z)+$$
$$+(2+\alpha)k^2m^2b^2\},$$

$$A_4=m^2b^2\{C(k_zf_s-k_sf_z)+\alpha(C+\gamma D)(k_zj_s-k_sj_z)+\gamma k^2m^2b^2\},$$

$$A_5=k^2\lambda m^2b^2\{\alpha(C+D)(k_zj_s-k_sj_z)-C(k_z\nu_s-k_s\nu_z)+k^2m^2b^2\},$$

$$C=-(k_zg_s-k_sg_z),\quad D=-\frac{2k_sp}{s\rho},\quad b^2=\frac{\alpha p}{s^2\rho},\quad \vec{j}=\nabla\ln(sH).$$

При $m=0$, $\nu=0$ это уравнение совпадает с тем, которое получено в работе [3]. Отметим еще, что в случае цилиндрически симметричного равновесия критерии устойчивости адиабатических возмущений $A_2\geqslant 0$ и $A_4>0$ те же, что и в работе [4], в которой при выводе локальное приближение не использовалось, а применялся энергетический принцип (для плазмы во внешнем гравитационном поле).

Если m достаточно велико, то в формулах для A_i главную роль играют последние слагаемые с $k^2m^2b^2$, и равновесие устойчиво, потому что все A_i положительны. В присутствии медленного вращения (и для слабого поля) вместо A_i в дисперсионное уравнение войдут $A_i+B_i-(B_i)_{\Omega=0}$. Неустойчивость возмущений с $m\sim ks$, возникающая из-за того, что $B_1\neq 0$, будет подавлена, если $A_4+B_3-(B_3)_{\Omega=0}>0$, или

$$\gamma m^3b^4s>|2k_s\lambda\Omega(G_s\nu_z-G_z\nu_s)|. \tag{12}$$

В случае рассмотренного выше численного примера, полагая еще $\rho\sim 40$ *г/см*^{3}, $T\sim 10^7$ °К, $\lambda\sim 10^9$ *см*, получим из условия (12) $H\gtrsim 600$ *э* или $\alpha\geqslant 10^{-12}$. Граничное значение отношения магнитного давления к газовому оказывается малым, и возбуждающиеся в присутствии поля добавочные неустойчивости могут быть несущественными. Для этого, однако, необходимо, чтобы отсутствовали наиболее важные неустойчивости, обусловленные зависимостью равновесных величин от радиуса $r = \sqrt{s^2 + z^2}$. При $m = 0$, $\nu = 0$, $\lambda \ll s$ коэффициент A_3 в уравнении (11) отрицателен, и система неустойчива, если $h_r < 0$ [3]. Аналогично, при $\nu = 0$, $\lambda_0^2 \ll s^2$, $m = 1, 2, \ldots$ условие неустойчивости $A_5 < 0$ дает $j_r < 0$ или $(\partial/\partial r) \ln (Hs) < 0$. В этом случае для стабилизации необходимо, чтобы поле с радиусом убывало медленнее, чем обратное расстояние до оси симметрии. Впрочем, в неоднородной среде, т. е. при $\nu_r < 0$ только что рассмотренные неустойчивости могут эффективно подавляться. При малых α необходимые для стабилизации значения ν_r порядка α (они определяются условиями $A_3 > 0$ и $A_5 > 0$).

Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе АН СССР

ON THE STABILITY OF A ROTATING INHOMOGENEOUS STAR

Yu. V. VANDAKUROV

The stability of a rigidly rotating chemically inhomogeneous star in respect of any small scale perturbations is considered. It is shown that to stabilize non-axi-symmetric oscillations in a radiative zone of the star the coincidence of the isothermal and isobaric surfaces is necessary. The instability can also be suppressed in the presence of a comparatively weak toroidal magnetic field.

ЛИТЕРАТУРА

1. *P. Goldreich, G. Schubert*, Ap. J., 150, 571, 1967.
2. *K. Fricke*, Z. Astrophys., 68, 317, 1968.
3. *G. Schubert*, Ap. J., 151, 1099, 1968.
4. *R. J. Tayler*, J. Nuclear Energy, Part C, 3, 266, 1961.