АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 8 АВГУСТ, 1972 ВЫПУСК 3

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЗВЕЗД

О. Х. ГУСЕЙНОВ, Ф. К. КАСУМОВ

Поступила 22 февраля 1971
Пересмотрена 26 мая 1972

Получены аналитические выражения параметров вращающихся звезд в одном частном случае псевдополитропы, введенной как „степенар". Установлена однозначная связь между политропами и степенарами по наиболее существенным — энергетическим параметрам.

1. При рассмотрении ряда вопросов, касающихся конечной стадии эволюции звезд, а также теории внутреннего строения, обычно применяются модели политропных газовых шаров. Политропное описание оправдано в ряде физически осуществимых случаев. Однако получить аналитические выражения параметров звезд в таких моделях не представляется возможным, кроме случаев $n = 0$; 1; 5, где n — индекс политропии, в то время как знание таких выражений весьма полезно для построения наглядной картины эволюции звезд, вплоть до релятивистского самозамыкания.

Для того, чтобы иметь возможность получить аналитические выражения массы, момента вращения, вращательной и гравитационной энергий звезды поступим следующим образом. Выберем степенной вид зависимости плотности вещества ρ от расстояния $r' = R - r$ до поверхности звезды

$$\rho = \rho_c (r'/R)^\nu = \rho_c (1 - z)^\nu, \qquad (1)$$

где ρ_c — центральная плотность, $z = r/R$ — отношение текущего радиуса к полному и $\nu \geqslant 0$. Данное степенное распределение довольно близко к политропному, $n_1 = 3$ и $n_2 = 1.5$, при значениях показателя степени ν равных, соответственно, $\nu_1 = 4.924$ и $\nu_2 = 1.401$. При этих значениях n

и ν — отношения центральной плотности к средней равны, соответственно, $(\rho_c/\bar{\rho}) = 54.18$ и $(\rho_c/\bar{\rho}) = 5.99$ (см. формулу (3)).

2. Используя (1), получим интегральные параметры вращающейся звезды (деформацией за счет вращения пренебрегаем).

2.1. Масса звезды есть

$$M(R) = 4\pi \int_0^R \rho(r)\, r^2 dr = 4\pi\rho_c R^3 \int_0^1 (1-z)^\nu z^2 dz = \frac{4\pi}{3}\bar{\rho}R^3. \qquad (2)$$

Интегрируя, получим значение средней плотности

$$\bar{\rho} = \frac{6\rho_c}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}. \qquad (3)$$

Текущее значение массы внутри сферы на радиусе r в единицах полной массы равно

$$\frac{M(r)}{M(R)} = \frac{\int_0^z (1-z)^\nu z^2 dz}{\int_0^1 (1-z)^\nu z^2 dz} = 1-(1-z)^{\nu+1}\left[1+\sum_{k=1}^{2}\prod_{l=1}^{k}(\nu+l)\,\frac{1}{kl}\,z^k\right]. \qquad (4)$$

График изменения функции $M(r)$ приведен на рис. 1.

2.2. Момент инерции звезды относительно оси равен

$$I = 2\pi \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \int_0^R \rho(r)\, r^4 dr = \frac{8\pi}{3}\int_0^R \rho r^4 dr = 64\,\pi\rho_c R^5 \prod_{l=1}^{5}\frac{1}{(\nu+l)}. \qquad (5)$$

Тогда вращательная энергия твердотельно вращающейся звезды равна

$$W_{\text{вр.}} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \eta M\omega^2 R^2 = \varepsilon K^2 M^{-5/3}\rho_c^{2/3}, \qquad (6)$$

где

$$K = I\omega, \qquad \eta = \frac{4}{(\nu+4)(\nu+5)}, \qquad \varepsilon = \frac{\pi^{2/3}(\nu+4)(\nu+5)}{4[(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)]^{2/3}}, \qquad (7)$$

K — вращательный момент, η, ε — постоянные, зависящие только от ν; ω — угловая скорость вращения звезды.

Выражения текущих значений момента и энергии вращения в единицах полных момента и энергии вращения звезды получаются в следующем виде:

$$\frac{W_{\text{гр.}}(r)}{W_{\text{гр.}}(R)} = \frac{K(r)}{K(R)} = \frac{\int_0^z (1-z)^\nu z^4 dz}{\int_0^1 (1-z)^\nu z^4 dz} = \tag{8}$$

$$= 1 - (1-z)^{\nu+1}\left[1 + \sum_{k=1}^{4}\prod_{l=1}^{k}(\nu+l)\frac{1}{k!}z^k\right].$$

График зависимости $W_{\text{гр.}}(r)/W_{\text{гр.}}(R)$ приведен на рис. 2.

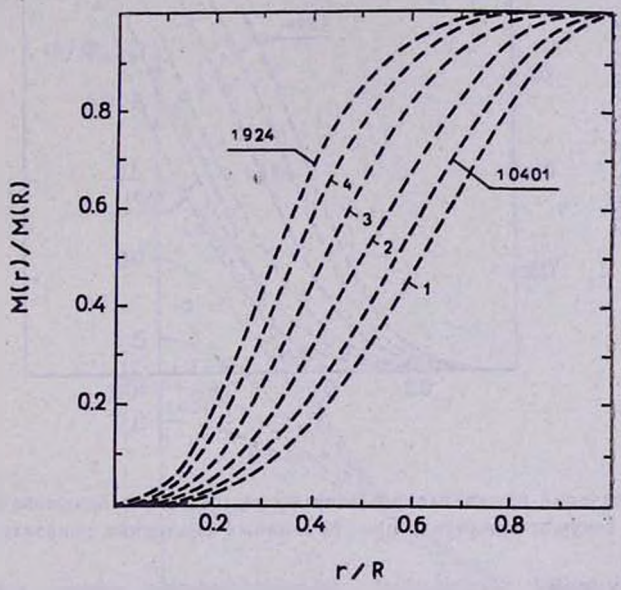

Рис. 1. Зависимость массы звезды от текущего радиуса при степенном законе распределения плотности для различных значений показателя степени ν.

2.3. Для нахождения гравитационной энергии звезды воспользуемся выражением энергии гравитационного взаимодействия массы M [1]:

$$W_{\text{гр.}} = \frac{1}{2}\int_v \rho(r)\varphi dv = \frac{1}{2}\int_M \varphi\, dm, \tag{9}$$

где φ — гравитационный потенциал в точке, где находится элемент массы $dm = \rho dv$. Используя общее выражение потенциала для сферически-симметрического распределения вещества из [2], в случае степенного распределения плотности, после элементарных, но громоздких преобразований получим

$$\varphi = -\frac{8\pi G\rho_c R^2}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}\frac{1}{z}\left\{1-(1-z)^{\nu+2}\left[1+\frac{(\nu+1)}{2}z\right]\right\}, \quad (10)$$

где G — гравитационная постоянная.

Из (10) при $\nu = 0$ имеем потенциал внутри однородной звезды, а при $z = 1$ — значение потенциала на поверхности $\varphi(1)$.

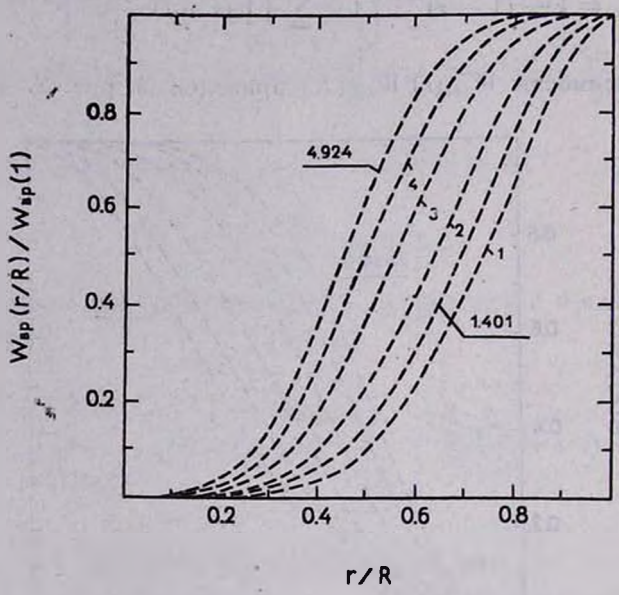

Рис. 2. Значения вращательной энергии твердотельно вращающейся звезды в зависимости от текущего радиуса, при различных значениях показателя степени ν.

Для получения потенциала вблизи центра можно ограничиться двумя членами разложения потенциала по z, что дает

$$\varphi = -2\pi G\rho_c R^2\left(\frac{2}{(\nu+1)(\nu+2)} - \frac{z^2}{3}\right), \quad (11)$$

где первый член есть потенциал $\varphi(0)$ в центре звезды. Значения потенциала $\varphi(z)$ при различных значениях показателя степени ν приведены на рис. 3. Максимальное значение $\varphi(z)/\varphi(1)$ зависит только от ν и достигается в центре (см. (10) и (11)):

$$\frac{\varphi(0)}{\varphi(1)} = 1.5 + \frac{\nu}{2}. \quad (12)$$

С уменьшением ν, т. е. с уменьшением неоднородности вещества, $\varphi(0)/\varphi(1)$—уменьшается.

Используя (1), (9), (10), найдем значения полной и текущей гравитационной энергий:

$$W_{гр} = -\frac{8\pi^2 p_c^2 G R^5 (5\nu + 8)}{(\nu + 1)^2 (\nu + 2)^2 (2\nu + 3)(2\nu + 5)}, \tag{13}$$

$$\frac{\tilde{W}_{гр}(r)}{W_{гр}(R)} = 1 - \frac{2(2\nu + 3)(2\nu + 5)}{(\nu + 3)(5\nu + 8)}[1 + (\nu + 1)z](1 - z)^{\nu + 1} + \tag{14}$$

$$+ \frac{3(\nu + 1)(\nu + 2)}{(\nu + 3)(5\nu + 8)}\left[1 + (2\nu + 3)z + \frac{z^2}{3}(\nu + 1)(2\nu + 3)\right](1 - z)^{2\nu + 3}.$$

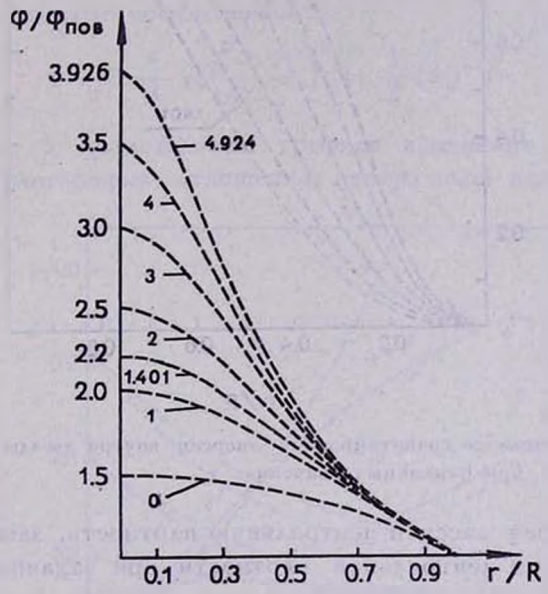

Рис. 3. Изменение потенциала внутри звезды в зависимости от текущего радиуса, при различных значениях показателя степени ν.

На рис. 4 показано распределение гравитационной энергии внутри звезды в единицах полной энергии. Как видно из рис. 4, с уменьшением неоднородности вещества (с уменьшением ν) значение относительной гравитационной энергии на данном радиусе уменьшается. С другой стороны, из (15) и рис. 5 следует, что при уменьшении ν уменьшается и z, т. е. полная гравитационная энергия звезды данной массы и радиуса. Следовательно, уменьшение гравитационной энергии на данном радиусе носит абсолютный характер.

Умножая обе части (13) на $R/M^2(R)$, с помощью (2) и (3) представим гравитационную энергию в удобном виде

$$W_{гр} = -\frac{1}{8}\frac{(\nu+3)^2(5\nu+8)}{(2\nu+3)(2\nu+5)}\frac{GM^2(R)}{R} = -\alpha\frac{GM^2(R)}{R}. \qquad (15)$$

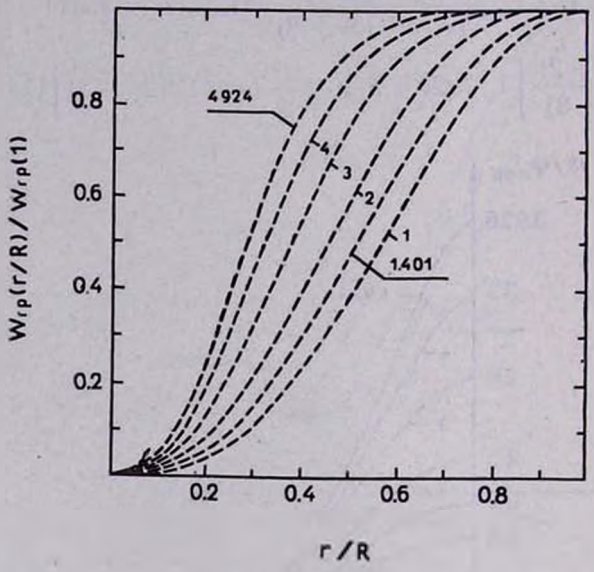

Рис. 4. Распределение гравитационной энергии внутри звезды в зависимости от текущего радиуса, при различных значениях ν.

Или, выражая через массу и центральную плотность, запишем ее значение в функции от центральной плотности при заданной массе конфигурации:

$$W_{гр} = -\frac{\pi^{1/3}}{4}\left[\frac{(\nu+3)^2}{(\nu+1)(\nu+2)}\right]\left[\frac{(\nu+3)(5\nu+8)}{(2\nu+3)(2\nu+5)}\right]GM^{5/3}\rho_c^{1/3} = -\beta GM^{5/3}\rho_c^{1/3}. \qquad (16)$$

Значения гравитационной энергии, определенные согласно (3) с помощью выражения $W_{гр} = -G\int_0^M \frac{mdm}{r}$ и нашим методом, совпадают. На первый взгляд может показаться, что $\varphi = -2Gm/r$. Однако, согласно (4) и (10),

$$\varphi = -\frac{2Gm}{r} - \frac{2\varphi(0)}{(\nu+3)}\frac{1}{z}\times$$
$$\times\left\{1-(1-z)^{\nu+1}\left|1+\frac{(3\nu+5)}{2}z+\frac{(\nu+1)(2\nu+5)}{2}z^2\right|\right\}. \quad (17)$$

Вклад же разности $(\varphi + 2Gm/r)$ в гравитационную энергию равен нулю.

3. Между коэффициентами в выражениях вращательной (η, ε) и гравитационной (α, β) энергий, а также отношениями центральной плотности к средней при любом распределении плотности существуют следующие простые соотношения:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{3}{4\pi}\frac{\rho_c}{\bar{\rho}}\right)^{1/3} = \frac{1}{2}(\varepsilon\gamma_1)^{-1/2}. \quad (18)$$

На рис. 5 представлены графики изменения α, γ_1, ε, β, n и ν в функции от логарифма отношения центральной плотности к средней.

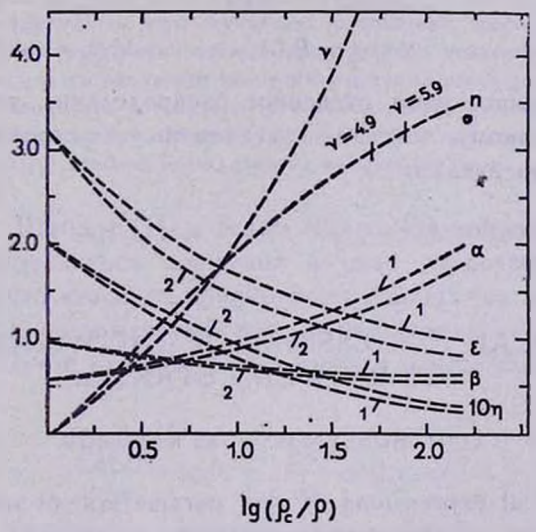

Рис. 5. График изменения энергетических коэффициентов, показателя степени ν и индекса политропии n в зависимости от $\lg \rho_c/\bar{\rho}$. 1—политропы, 2—степенары.

Цифра 1 на кривых соответствует значениям коэффициентов для политроп, цифра 2 — для степенной функции распределения. Из анализа графика следует:

3.1. Предельные значения коэффициентов α, γ_1, ε, β как для политроп, так и для степенного закона распределения совпадают и равны

при $\rho_c/\bar{\rho} = 1$ $\quad \varepsilon = 5\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2/3} = 3.25, \quad \beta = \left(\frac{36\pi}{125}\right)^{1/3} = 0.966,$

$\alpha = 0.6, \quad \gamma_1 = 0.2,$

при $\rho_c/\bar{\rho} = \infty$ $\quad \varepsilon = \frac{\pi^{2/3}}{4} = 0.535, \quad \beta = \frac{5}{16}\pi^{1/3} = 0.457,$

$\alpha = \infty, \quad \gamma_1 = 0.$

3.2. При одинаковой неоднородности распределения вещества степенного и политропного приближений звезды заданной массы, для тех же значений индекса политропии ($n = 3$ и $n = 1.5$) относительные отклонения коэффициентов следующие ($\alpha_s - \alpha_p = \Delta\alpha$ и т. д.):

а) $n = 3$ $\quad \Delta\alpha/\alpha_p = -0.11, \quad \Delta\varepsilon/\varepsilon_p = -0.13,$

$\Delta\gamma_1/\gamma_{1_p} = 0.2, \quad \Delta\beta/\beta_p = -0.10,$

б) $n = 1.5$ $\quad \Delta\alpha/\alpha_p = -0.07, \quad \Delta\varepsilon/\varepsilon_p = -0.13,$

$\Delta\gamma_1/\gamma_{1_p} = 0.01, \quad \Delta\beta/\beta_p = -0.10.$

Итак, введенное нами степенное распределение тем точнее подходит к политропному, чем меньше степень неоднородности распределения вещества звезды.

Шемахинская астрофизическая
обсерватория

ANALYTICAL EXPRESSIONS OF THE PARAMETERS OF ROTATING STARS

O. H. HUSEYNOV, F. K. KASUMOV

The analytical expressions of the parameters of rotating stars in one particular case of the pseudopolytrope—introduced as „stepenar" have been obtained. A simple connection between the polytrope and „stepenar" along the most essential energetical parameters has been established.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц,* Теория поля, Наука, М., 1967.
2. *Л. Н. Сретенский,* Теория ньютоновского потенциала, Гостехиздат, М., 1946.
3. *С. Чандрасекар,* Введение в учение о строении звезд, ИЛ., М., 1950.