

КВАЗИРАДИАЛЬНЫЕ ПУЛЬСАЦИИ ВРАЩАЮЩИХСЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ПОЛИТРОП

В. В. ПАПОЯН, Д. М. СЕДРАКЯН, Э. В. ЧУБАРЯН

Поступила 23 ноября 1971

Пересмотрена 29 мая 1972

Найдены частоты квазирадиальных пульсаций вращающихся релятивистских политропов с $n=1; 1.5; 2; 2.5; 3$, а также критические в смысле нарушения устойчивости значения параметра релятивизма z . Показано, что для политропы $n=3$, вращающейся с максимально возможной без истечения вещества угловой скоростью, неустойчивость наступает при $r_0 < 140 r_g$.

1. Одной из форм параметрических уравнений состояния звезд со сложным составом является политропное уравнение состояния

$$P = K \rho^{1+1/n}. \quad (1)$$

Линейная комбинация политропов с различными показателями n довольно хорошо аппроксимирует состояние вещества „холодных“ белых карликов и барионных звезд. При соответствующем подборе связанной с энтропией постоянной K уравнение (1) можно использовать для изучения „горячих“ моделей, причем при фиксированном n полученное семейство будет семейством изоэнтропных конфигураций. Различным показателям политропы соответствуют разные звездные модели. Случаю $n=0$ соответствует модель несжимаемой жидкости, случаю $n=1.5$ — идеальный, невырожденный, нерелятивистский газ, случаю $n=3$ — релятивистский газ или смесь газа с излучением, в котором преобладает давление излучения. Последний случай наиболее интересен в том смысле, что состояние вещества сверхмассивных звезд обычно отождествляют с политропой $n=3$.

В рамках ньютоновской теории тяготения политропные конфигурации изучены достаточно подробно как в отсутствие вращения (см.,

например, [1]), так и при наличии его [2–5]. Внутренняя структура и интегральные характеристики невращающихся релятивистских политропных моделей получены Тупером [6]. В работах [7, 8] рассматривались медленно вращающиеся релятивистские политропные конфигурации и предпринята попытка связать часть наблюдательных данных о квазарах с вращающейся политропой $l = 3$. Однако любые заключения о свойствах изучаемой последовательности моделей имеют смысл лишь в том случае, если решен вопрос их устойчивости.

Весьма удовлетворительным в смысле выяснения устойчивости звездных конфигураций является „энергетический“ подход Фаулера, использованный им для политроп в после-ньютоновском приближении и в отсутствие вращения [9]. Влияние вращения на стабильность политропы $l = 3$ тем же методом изучалось Роксбургом [10]. Довольно точный метод определения динамической устойчивости и частот радиальных пульсаций релятивистских моделей разработан Чандрасекаром [11], который применил его для невращающихся политроп. В случае вращающихся белых карликов и релятивистской политропы $l = 3$ аналогичная задача решена в работах [12, 13], причем вклад вращения учтен лишь ньютоновским членом, тогда как величина связанных с вращением релятивистских поправок на расстояниях порядка радиуса изучаемого объекта сравнима с релятивистскими поправками, обусловленными распределением масс. Эта непоследовательность устранена авторами настоящей статьи, которые недавно предложили метод рассмотрения адиабатических пульсаций малой амплитуды около равновесных состояний вращающихся релятивистских объектов [14]. В [14] учет вращения ограничен членами, пропорциональными Ω^2 , отклонения от сферической симметрии вследствие вращения считаются пренебрежимо малыми и, как было отмечено, в отличие от [12, 13], приняты во внимание связанные с вращением релятивистские эффекты. Хорошее совпадение результатов выполненной этим методом работы [15] с полученными другим методом результатами Мелтцера и Торна [16] в отсутствие вращения говорит в пользу его применимости.

В настоящей статье на основе предложенного в [14] метода рассматривается вопрос динамической устойчивости вращающихся релятивистских политроп с $l = 1; 1.5; 2; 2.5; 3$ и найдены частоты квазирадимальных пульсаций этих моделей.

2. Как показано в [14], уравнение, определяющее частоты ω и амплитуды η квазирадимальных пульсаций вращающихся релятивистских моделей, имеет вид

$$\begin{aligned}
 & \rho^2 \int_0^{r_0} S(r) \cdot f \cdot \frac{\rho + P/c^2}{1 - \frac{2Gm}{c^2 r}} \gamma^2 r^2 dr = \int_0^{r_0} S(r) \cdot \left[\frac{4P'}{r} - \frac{P'^2/c^2}{\rho + P/c^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{8\pi GP(\rho + P/c^2)}{c^2 \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)} \right] \gamma^2 r^2 dr + \int_0^{r_0} \gamma P S(r) \left[\frac{(r^2 \gamma)'}{r^2} + \frac{P' \gamma / c^2}{\rho + P/c^2} \right]^2 r^2 dr + \\
 & + \frac{c^2}{2} \int_0^{r_0} S(r) (\rho + P/c^2) [\gamma' (r^2 L_0)' - 2L_0 \gamma] \gamma dr + \\
 & + \frac{2}{3} \frac{\Omega^2}{c^2} \int_0^{r_0} S(r) \left[\gamma P \gamma'^2 + \left(P' + \frac{2\gamma P}{r} \right) \gamma \gamma' + \frac{4}{r} P' \gamma^2 \right] r^4 dr.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 S(r) &= \frac{1}{\sqrt{f \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)}}, & \gamma &= \frac{\rho + P/c^2}{P} \frac{dP}{d\rho}, \\
 L &= \frac{2}{3} \frac{\Omega^2 r^2}{c^2} \cdot f \cdot (1 + 2q).
 \end{aligned} \tag{3}$$

r_0 — радиус, Ω — угловая скорость вращения, f и q — компоненты метрического тензора рассматриваемой конфигурации.

Выберем пробную функцию в виде $\eta = r + \lambda r^2$, перейдем к удобным в случае политропного уравнения состояния (1) безразмерным переменным

$$\begin{aligned}
 \xi &= Ar, & v(\xi) &= \frac{A^3 m(r)}{4\pi \rho_c}, & \theta(\xi) &= \left(\frac{\rho(r)}{\rho_c} \right)^{1/n}, \\
 A^2 &= \frac{4\pi G \rho_c^{\frac{n-1}{n}}}{K(n+1)}
 \end{aligned}$$

и введем параметр релятивизма $a = P_c / \rho_c c^2$. Тогда основное уравнение проблемы (2) переписется в виде

$$\sigma^2 = \frac{J_4 + 2\lambda J_5 + \lambda^2 J_6 + \frac{4}{3} \beta (J_7 + 2\lambda J_8 + \lambda^2 J_9)}{J_1 + 2\lambda J_2 + \lambda^2 J_3}, \tag{4}$$

где

$$J_i = \int_0^{\xi_0} \theta^n \cdot f^i \cdot S^3(\xi) (1 + \alpha \theta) \xi^{i+3} d\xi, \quad i = 1, 2, 3; \quad (5)$$

$$J_j = \int_0^{\xi_0} \theta^n (1 + \alpha \theta) S(\xi) \left\{ \frac{3(j-1) + \delta_{jn}}{n} \theta + 2\alpha \xi^2 f \theta^{n+1} S^2(\xi) - \right. \\ \left. - \alpha f(n+1) \left(\frac{v}{\xi} + \alpha \xi^2 \theta^{n+1} \right) \left[\left(1 - \frac{n+1}{n} \alpha \theta \right) \left(\frac{v}{\xi} + \alpha \xi^2 \theta^{n+1} \right) S^2(\xi) f + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{4}{\alpha(n+1)} + \frac{j+2}{n} \theta \right] S^2(\xi) \right\} \xi^{j-2} d\xi, \quad j = 4, 5, 6. \quad (6)$$

$$J_k = \int_0^{\xi_0} \theta^n \sqrt{f} S(\xi) \left[(k-2) \sqrt{f} + 2(k-2)q + \frac{k+3}{2} \gamma \xi - \right. \\ \left. - (k+1) \alpha(n+1) \frac{v}{\xi} + \frac{2n(2k-7) + 3(k-4) + (n+1)\delta_{k9}}{n} \alpha \theta \right] \xi^{k-3} d\xi, \\ k = 7, 8, 9. \quad (7)$$

$$S(\xi) = \frac{1}{\sqrt{f[1 - 2\alpha(n+1)v/\xi]}}; \quad \beta = \frac{v(\xi_0)}{2\xi_0^3}, \quad (8)$$

ξ_0 — радиус конфигурации. Необходимые для подсчета интегралов (5)–(7) функции являются решениями следующей системы уравнений

$$\frac{dv}{d\xi} = \theta^n \xi^3 \left[1 + \frac{4}{3} \beta \alpha(n+1) \xi^2 \right], \\ \frac{d\theta}{d\xi} = -(1 + \alpha \theta) f \left(\frac{v}{\xi^2} + \alpha \xi^2 \theta^{n+1} \right) S^2(\xi) + \\ + \frac{4}{3} \beta \xi \left[f + 2q + \gamma \xi + \alpha \theta - \alpha(n+1) \right], \quad (9) \\ \frac{dq}{d\xi} = \gamma, \quad \frac{d\gamma}{d\xi} = -\frac{4}{3} \gamma + 4\theta^n \alpha(n+1), \\ \frac{df}{d\xi} = -2\alpha(n+1) f^2 \left(\frac{v}{\xi} + \alpha \xi^2 \theta^{n+1} \right) S^2(\xi),$$

с начальными условиями $v(0) = 0$, $\theta(0) = 1$, $q(0) = q_c$, $\gamma(0) = 0$, $f(0) = f_c$. Постоянная q_c определяется условием непрерывности соответствующей компоненты метрического тензора и ее производной на границе ξ_0 конфигурации.

Согласно сформулированному Чандрасекаром [11] вариационному принципу (см. также [12, 13]) значения собственных частот и амплитуды γ пульсаций рассматриваемых моделей, удовлетворяющих основному уравнению (2), соответствуют тем значениям произвольного параметра λ , которые минимизируют выражение (4). Поэтому, если для каждого из n при заданных α и β найти семейство решений системы (9), подсчитать интегралы (5), (6), (7), а также значения λ , соответствующие минимуму σ^2 (4), то задача будет решена.

3. Численное интегрирование системы (9) и интегралов (5)–(7) выполнено на ЭВМ „Наири-2“. Интегрирование велось от $\xi = 0$ до границы конфигурации $\xi = \xi_0$, определенной как корень уравнения $\theta(\xi_0) = 0$. Результаты расчета представлены табл. 1 и рис. 1. В таблице для каждого из $n = 1; 1.5; 2; 2.5; 3$ можно найти величины ξ_0 , $v(\xi_0)$ и частоты квазирадиальных пульсаций σ , соответствующие различным значениям параметра релятивизма α , как при наличии вращения, так и в отсутствие его. Значения α , при которых $\sigma = 0$, являются критическими в смысле нарушения устойчивости. Все конфигурации с $\sigma^2 < 0$ нестабильны относительно рассматриваемых квазирадиальных пульсаций, тем не менее для полноты в таблице приводятся и их характеристики. Отметим, что во всех случаях критическая в смысле нарушения устойчивости величина α остается меньше, чем максимально возможное при данном n значение $\alpha_{\max} = n/n + 1$, полученное из условия, по которому скорость звука в среде не должна превышать скорости света в вакууме [6]. Для сравнения в таблице приводятся также найденные при $\alpha = 0$ параметры нерелятивистских конфигураций.

На рис. 1 показана зависимость критических в смысле нарушения устойчивости значений $\alpha_{\text{кр}}$ ($\sigma = 0$) от показателя политропы n . Пунктирная кривая относится к случаю отсутствия вращения, сплошная — случай с вращением. Легко видеть, что для одного и того же n при $n \lesssim 2.5$ значения $\alpha_{\text{кр}}$ больше в отсутствие вращения, в то время, как при $n \gtrsim 2.5$ большими становятся $\alpha_{\text{кр}}$, соответствующие вращающимся конфигурациям. Это означает, что вращение для политропных конфигураций с $n \lesssim 2.5$ приводит к уменьшению устойчивости звезды, а при $n \gtrsim 2.5$ — увеличивает устойчивость.

Качественно этот вывод следует также из формулы

Вращения нет				n	С вращениями			
α	ξ_0	$\nu(\xi_0)$	σ		α	ξ_0	$\nu(\xi_0)$	σ
0	3.142	3.142	0.3595	n = 1	0	3.835	4.635	0.2262
0.01	3.119	2.935	0.3499		0.01	3.686	4.279	0.2125
0.05	2.850	2.315	0.2454		0.05	3.287	3.088	0.1979
0.1	2.599	1.751	0.1804		0.1	2.981	2.394	0.0797
0.2	2.277	1.143	0.0860		0.178	2.595	1.719	0
0.3	2.064	0.8191	0.0349		0.2	2.496	1.559	-0.01743
0.4	1.913	0.6249	0.00469		0.3	2.220	1.082	-0.0709
0.43	1.865	0.5751	0	0.4	2.066	0.8021	-0.1025	
0.5	1.801	0.4981	-0.01432	0.5	1.813	0.6567	-0.1530	
0	3.70	2.715	0.1505	n = 1.5	0	4.365	3.483	0.0988
0.01	3.60	2.525	0.1365		0.01	4.306	3.132	0.0906
0.05	3.30	1.949	0.0880		0.05	3.818	2.406	0.0512
0.1	3.088	1.481	0.0468		0.1	3.386	1.841	0.0117
0.2	2.699	0.9603	0		0.12	3.30	1.613	0
0.3	2.493	0.6882	-0.0233		0.2	3.005	1.138	-0.034
0	4.35	2.412	0.0606	n = 2	0	5.181	2.751	-0.0495
0.01	4.30	2.239	0.0518		0.01	5.064	2.551	0.0409
0.05	3.90	1.716	0.0235		0.05	4.604	1.912	0.016
0.1	3.697	1.298	0		0.083	4.423	1.552	0
0.2	3.398	0.8402	-0.0266		0.1	4.345	1.423	-0.0073
0.3	3.271	0.6054	-0.0375		0.2	3.866	0.9154	-0.035
0	5.355	2.187	0.0198	n = 2.5	0	6.265	2.360	0.0233
0.01	5.320	2.028	0.014		0.01	6.247	2.163	0.0163
0.038	5.068	1.678	0		0.045	5.931	1.686	0
0.05	4.98	1.548	-0.0046		0.05	5.898	1.63	-0.0043
0.1	4.782	1.169	-0.0189		0.1	5.515	1.235	-0.020
0	6.9	2.0182	0		n = 3	0	8.158	2.0956
0.001	6.87	2.0024	$-4.17 \cdot 10^{-4}$	0.001		8.140	2.0786	$1.054 \cdot 10^{-3}$
0.003	6.864	1.9716	$-1.258 \cdot 10^{-3}$	0.003		8.061	2.05	$2.180 \cdot 10^{-4}$
0.006	6.84	1.9267	$-2.482 \cdot 10^{-3}$	0.0035		8.049	2.043	0
0.01	6.83	1.8695	$-4.08 \cdot 10^{-3}$	0.006		8.0065	2.0038	$-1.09 \cdot 10^{-3}$
0.05	6.72	1.4245	-0.01721	0.01		7.905	1.9478	$-2.75 \cdot 10^{-3}$

$$\sigma^2 = \left(\gamma - \frac{4}{3}\right) + 4\beta \left(\gamma - \frac{5}{3}\right) - \frac{1}{42} \frac{r_g}{r_0} (54\gamma - 53) + \frac{2}{21} \frac{r_g}{r_0} \beta (81\gamma - 106), \quad (10)$$

полученной в работе [14] для модели жидкости с однородным распределением вещества. Действительно, при $\gamma \gtrsim \frac{5}{3}$ (малые n) релятивистские поправки незначительны, а второе слагаемое в (10), связанное с ньютоновским членом, учитывающим вращение, отрицательно и приводит к неустойчивости. При $\frac{4}{3} \leq \gamma \leq \frac{5}{3}$ ($n \sim 3$) картина меняется: вращение играет стабилизирующую роль (второе и четвертое слагаемые в (10)), т. е. противодействует тенденции к сжатию.

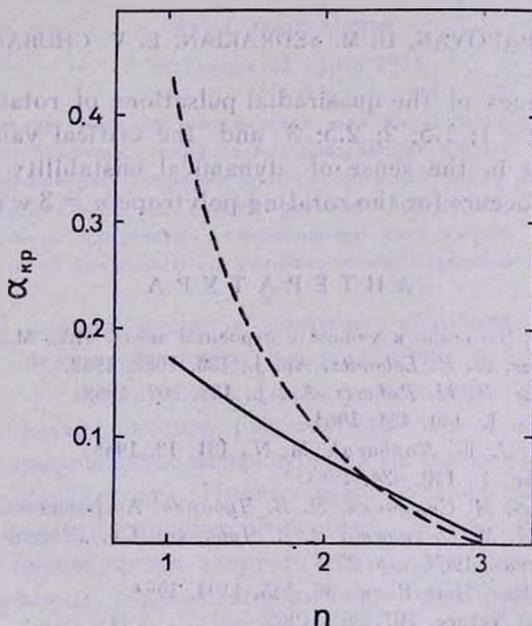


Рис. 1. Зависимость критических в смысле нарушения устойчивости значений $\alpha_{кр}$ от показателя политропы n . Пунктирная кривая относится к случаю отсутствия вращения, сплошная — случай с вращением.

Стабилизирующая относительно коллапса роль вращения для политропных конфигураций с $n = 3$, которые обычно отождествляют со сверхмассивными звездами, выяснена еще в работах [10, 13]. Было показано [13], что для $n = 3$ при вращении с максимально возможной без истечения вещества угловой скоростью неустойчивость наступает при $r_0 \leq 208 r_g$. Этот результат нуждается в уточнении, так как в [13]

вращение учтено лишь ньютоновским членом. Наше рассмотрение для $n = 3$ и $\beta = \beta_{\max}$ дает $\alpha_{\text{кр}} = 0.00348$ и нестабильность в случае $r_0 < 140 r_g$, что наглядно свидетельствует о стабилизирующей роли связанных с вращением релятивистских поправок.

Авторы благодарны профессору Г. С. Саакяну за полезные обсуждения и Г. Г. Арутюнян за помощь в проведении численных расчетов.

Ереванский государственный
университет

QUASIRADIAL PULSATION OF ROTATING RELATIVISTIC POLYTROPES

V. V. PAPOYAN, D. M. SEDRAKIAN, E. V. CHUBARIAN

The frequencies of the quasiradial pulsations of rotating relativistic polytropes for $n = 1; 1.5; 2; 2.5; 3$ and the critical value of the relativistic parameter in the sense of dynamical instability are calculated.

Unstability occurs for the rotating polytrope $n = 3$ when $r_0 < 140 r_g$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. С. Чандрасекар, Введение в учение о строении звезд, ИЛ., М., 1950.
2. S. Chandrasekhar, N. R. Lebovitz, Ap. J., 136, 1082, 1962.
3. S. Chandrasekhar, P. H. Roberts, Ap. J., 138, 809, 1963.
4. R. A. James, Ap. J., 140, 434, 1964.
5. J. J. Monaghan, J. W. Roxburgh, M. N., 131, 13, 1965.
6. R. F. Tooper, Ap. J., 140, 434, 1964.
7. В. В. Папоян, Д. М. Седракян, Э. В. Чубарян, *Астрофизика*, 5, 95, 1969.
8. В. В. Папоян, Д. М. Седракян, Э. В. Чубарян, Сб. "Звезды, туманности, галактики", Ереван, 1969, стр. 273.
9. W. A. Fowler, Rev. Mod. Phys., 36, 545, 1104, 1964.
10. J. W. Roxburgh, Nature, 207, 363, 1965.
11. S. Chandrasekhar, Ap. J., 140, 417, 1964.
12. B. R. Durney, J. W. Roxburgh, Z. Astrophys., 64, 504, 1966.
13. B. R. Durney, J. W. Roxburgh, Proc. Roy. Soc., 296, 189, 1967.
14. В. В. Папоян, Д. М. Седракян, Э. В. Чубарян, *Астрон. ж.* (в печати), 1971.
15. Г. Г. Арутюнян, Д. М. Седракян, Э. В. Чубарян, *Астрон. ж.* (в печати), 1972.
16. D. M. Meltzer, K. S. Thorne, Ap. J., 145, 514, 1966.