

РАССЕЯНИЕ РЕЗОНАНСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ШАРЕ

Д. И. НАГИРЧЕР

Поступила 18 мая 1972

Рассматривается рассеяние излучения в резонансной линии в однородном шаре со сферически симметричными источниками излучения. Исследуется резольвента интегрального уравнения задачи и число рассеяний фотона. Для случая чистого рассеяния и оптически толстого шара найдены асимптотики резольвенты, среднего числа и дисперсии числа рассеяний фотона. Получена также асимптотическая формула для интенсивности выходящего излучения при равномерном распределении источников. Результаты могут представлять интерес для физики планетарных туманностей.

В большинстве работ по теории переноса изучается рассеяние излучения в средах простейшей — плоской геометрии. Следующий по трудности случай — сферическая симметрия. Рассеянию излучения при сферической симметрии среды посвящено сравнительно небольшое число исследований. Аналитические методы к изучению монохроматического рассеяния применялись в работах [1—5] и др. Для этого же случая разработаны и численные методы решения задач с радиальной симметрией сред (см., например, [6, 7]).

Такие среды были предметом изучения и в теории переноса резонансного излучения. Решены простейшие задачи: о стационарном и нестационарном свечении бесконечной однородной среды с точечным источником в ней [8, 9], найдено среднее число рассеяний фотонов в конечном шаре при равномерном распределении источников [10] и асимптотика его при произвольном распределении их [11]. В работе [12] найдены асимптотики функций источников в задаче о шаре с центральным точечным источником.

В настоящей статье мы рассмотрим рассеяние резонансного излучения в однородном шаре и получим аналитические решения неко-

торых задач, связанных с таким рассеянием. В частности, мы найдем асимптотики резольвенты основного уравнения при чистом рассеянии, а также выражения для среднего числа рассеяний фотона и его дисперсии.

1. *Основные соотношения.* Пусть в однородном шаре происходит рассеяние излучения в изолированной резонансной линии. При каждом акте рассеяния происходит полное перераспределение по частотам, а поглощение в непрерывном спектре отсутствует. Пусть мощность первичных источников зависит лишь от расстояния от центра шара. Тогда задача расчета поля излучения сводится к нахождению функции $R(\tau, \tau_1, \tau_0)$, определяемой уравнением [8]

$$R(\tau, \tau_1, \tau_0) = \lambda \int_{|\vec{\tau}'| < \tau_0} K_0(|\vec{\tau} - \vec{\tau}'|) \left[R(\tau', \tau_1, \tau_0) + \frac{\delta(\tau' - \tau_1)}{4\pi\tau_1^2} \right] d^3\tau'. \quad (1)$$

Здесь $\vec{\tau}$ — оптический радиус-вектор точки шара, рассчитанный для центра линии, $\tau = |\vec{\tau}|$, τ_0 — оптический радиус шара, $d^3\tau'$ — элемент объема, а интегрирование происходит по всему шару. Далее $\delta(\tau)$ — δ -функция Дирака, а λ — вероятность выживания фотона при рассеянии в линии. Ядерная функция $K_0(\tau)$ определяется формулой

$$K_0(\tau) = \frac{A}{4\pi\tau^2} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) e^{-\tau\alpha(x)} dx, \quad (2)$$

где $\alpha(x)$ — профиль коэффициента поглощения в линии, x — безразмерная частота, отсчитываемая от центра линии, $\alpha(0) = 1$, а A — нормировочная постоянная.

Функция $R(\tau, \tau_1, \tau_0)$ является резольвентой. Если мощность источников в интервале частот $x, x + dx$ в слое между сферами радиусов τ и $\tau + d\tau$ равна $4\pi\tau^2 4\pi g(\tau) d\tau \alpha(x) dx$, то функция источников задачи равна

$$g(\tau) + \int_0^{\tau_0} 4\pi\tau_1^2 g(\tau_1) R(\tau, \tau_1, \tau_0) d\tau_1. \quad (3)$$

Интенсивность излучения, рассчитанная на единицу частоты x , получается путем интегрирования произведения (3) на $\alpha(x)$ вдоль луча.

Выполняя в правой части (1) интегрирование по сферическим углам, получим уравнение

$$R(\tau, \tau_1, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} \tau'^2 d\tau' \frac{K(|\tau - \tau'|) - K(\tau + \tau')}{\tau\tau'} \left[R(\tau', \tau_1, \tau_0) + \frac{\delta(\tau' - \tau_1)}{4\pi\tau_1^2} \right], \quad (4)$$

где

$$K(\tau) = 4\pi\tau^2 \int_0^1 K_0\left(\frac{\tau}{\mu}\right) \frac{d\mu}{\mu^3} = 4\pi \int_{\tau}^{\infty} K_0(\tau') \tau' d\tau' = A \int_{-\infty}^{\infty} x^2(x) E_1[\tau a(x)] dx. \quad (5)$$

Легко показать, что $R(\tau, \tau_1, \tau_0)$ выражается через резольвенту уравнения, описывающего рассеяние в плоском слое толщиной $2\tau_0$, которую мы обозначим $\Gamma(\tau, \tau', 2\tau_0)$. Функция $\Gamma(\tau, \tau', \tau_0)$ определяется уравнением

$$\Gamma(\tau, \tau', \tau_0) = \frac{\lambda}{2} K(|\tau - \tau'|) + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - t|) \Gamma(t, \tau', \tau_0) dt. \quad (6)$$

Сравнивая (1) и (6), находим

$$R(\tau, \tau_1, \tau_0) = \frac{\Gamma(\tau_0 + \tau, \tau_0 + \tau_1, 2\tau_0) - \Gamma(\tau_0 + \tau, \tau_0 - \tau_1, 2\tau_0)}{4\pi\tau\tau_1}. \quad (7)$$

Для монохроматического рассеяния эта формула была установлена в [5]. Поскольку $R(\tau, \tau_1, \tau_0)$ выражается через резольвенту для плоского слоя, мы приведем известные результаты, относящиеся к рассеянию в нем.

Резольвенту $\Gamma(\tau, \tau', \tau_0)$ легко выразить через ее частное значение $\Phi(\tau, \tau_0) = \Gamma(\tau, 0, \tau_0)$. Это было сделано В. В. Соболевым [13] (см. также [14]). При $\tau_0 \rightarrow \infty$ функция $\Gamma(\tau, \tau', \tau_0)$ стремится к $\Gamma(\tau, \tau')$ — резольвенте для полубесконечной среды, а $\Phi(\tau, \infty) = \Phi(\tau) = \Gamma(\tau, 0)$. Величина же $\Gamma(\tau_0 + \tau, \tau_0 + \tau_1, 2\tau_0)$ имеет пределом $\Phi_{\infty}(|\tau - \tau_1|)$ — резольвенту для бесконечной в обе стороны среды. При чистом рассеянии ($\lambda = 1$) $\Phi_{\infty}(\tau)$ существует не всегда, об этом будет сказано подробнее ниже.

Все эти функции подробно изучены [8, 12]. Для них найдены асимптотические, приближенные, а для бесконечной и полубесконечной сред и точные аналитические выражения. Функции $\Phi_{\infty}(\tau)$ табу-

лированы для ряда значений λ при доплеровском и лоренцовском коэффициентах поглощения [15, 16]. В [16] табулирована и функция

$$S_P(\tau) = \lim_{\tau_1 \rightarrow 0} \frac{\Phi_{-}(|\tau - \tau_1|) - \Phi_{-}(\tau + \tau_1)}{4\pi\tau\tau_1} = -\frac{1}{2\pi\tau} \frac{d\Phi_{-}(\tau)}{d\tau}, \quad (8)$$

являющаяся решением уравнения, описывающего рассеяние излучения точечного источника в бесконечной однородной среде.

Нам понадобятся также функции

$$\Psi(\tau, \tau_0) = 1 + \int_0^{\tau} \Phi(\tau', \tau_0) d\tau' \quad (9)$$

и

$$\begin{aligned} P(\tau, z, \tau_0) &= e^{-\frac{\tau}{z}} + \int_0^{\tau} e^{-\frac{\tau-\tau'}{z}} \Gamma(\tau, \tau', \tau_0) d\tau' = \\ &= X(z, \tau_0) \left[e^{-\frac{\tau}{z}} + \int_0^{\tau} e^{-\frac{\tau-\tau'}{z}} \Phi(\tau', \tau_0) d\tau' \right] - \\ &\quad - Y(z, \tau_0) \int_0^{\tau} e^{-\frac{\tau-\tau'}{z}} \Phi(\tau_0 - \tau', \tau_0) d\tau'. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь X и Y -функции — частные значения $P(\tau, z, \tau_0)$: $X(z, \tau_0) = P(0, z, \tau_0)$, $Y(z, \tau_0) = P(\tau_0, z, \tau_0)$. При $|z| \neq 0$ они раскладываются в ряды [8]

$$X(z, \tau_0) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x_k(\tau_0)}{k!} \frac{1}{z^k}, \quad (11)$$

$$Y(z, \tau_0) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y_k(\tau_0)}{k!} \frac{1}{z^k}, \quad (12)$$

причем $x_0(\tau_0) = y_0(\tau_0) = X(\infty, \tau_0) = \Psi(\tau_0, \tau_0)$.

Вернемся к рассеянию в шаре. Из (7) получаем выражение для $R(\tau, \tau_0, \tau_0)$, то есть при источниках на поверхности шара:

$$R(\tau, \tau_0, \tau_0) = \frac{1}{4\pi\tau\tau_0} [\Phi(\tau_0 - \tau, 2\tau_0) - \Phi(\tau_0 + \tau, 2\tau_0)]. \quad (13)$$

Из уравнения (4) легко получить

$$R(\tau, \tau_1, \tau_0) = \frac{1}{4\pi\tau_1} [\Phi_-(|\tau_0 - \tau_1|) - \Phi_-(|\tau + \tau_1|)] - \\ - 4\pi \int_{\tau_0}^{\infty} R(\tau, t, t) R(\tau_1, t, t) t^2 dt. \quad (14)$$

Эта формула справедлива при любых видах рассеяния, так как даже если $\Phi_-(\tau)$ при $\lambda \rightarrow 1$ стремится к бесконечности, разность $\Phi_-(\tau) - \Phi_-(\tau_1)$ имеет конечный предел. Повтому в [16] при $\lambda = 1$ и доплеровском профиле коэффициента поглощения табулирована величина $\Phi_-(\tau) - \Phi_-(1)$, хотя в этом случае $\Phi_-(\tau)$ расходится.

Отметим, что выбор функции $R(\tau, \tau_1, \tau_0)$ в принятой форме объясняется удобным свойством симметрии $R(\tau, \tau_1, \tau_0) = R(-\tau, \tau_1, \tau_0) = R(\tau, -\tau_1, \tau_0) = R(\tau_1, \tau, \tau_0)$ и возможностью предельного перехода $\tau_1 \rightarrow 0$. Действительно, если источник точечный — в центре шара, то, переходя в (14) к пределу при $\tau_1 \rightarrow 0$, получаем

$$R(\tau, 0, \tau_0) = S_p(\tau) - 4\pi \int_{\tau_0}^{\infty} R(\tau, t, t) R(0, t, t) t^2 dt, \quad (15)$$

где величина $R(0, t, t)$ получается из (13):

$$R(0, t, t) = \frac{1}{2\pi t} \left[2\Phi(2t, 2t) \Phi(t, 2t) - \frac{d\Phi(t, 2t)}{dt} \right]. \quad (16)$$

Таким образом, функция $R(\tau, \tau_1, \tau_0)$ выражена через свои пределы при $\tau_0 \rightarrow \infty$ и функцию $\Phi(\tau, \tau_0)$. Эти формулы понадобятся нам в дальнейшем при получении асимптотик $R(\tau, \tau_1, \tau_0)$ при $\tau_0 \gg 1$. Но сначала рассмотрим важный вопрос о числе рассеяний фотона.

2. Число рассеяний фотона. Нахождению среднего числа рассеяний фотона \bar{n} посвящена обширная литература (см., например, [17—20]). Обычно \bar{n} оценивалось для плоского слоя. В уже упоминавшихся исследованиях [10, 11] \bar{n} определялось и для шара. Наиболее близкими к излагаемому в этом пункте являются работы В. В. Соболева [18], Малликина [20] и В. Ю. Тербижа [21].

Введем функцию $N(\tau, \tau_0, \lambda)$, определив ее уравнением

$$N(\tau, \tau_0, \lambda) = 1 + \lambda \int_{|\vec{\tau}'| < \tau_0} K_0(|\vec{\tau} - \vec{\tau}'|) N(\tau', \tau_0, \lambda) d^3\tau'. \quad (17)$$

Определим также итерированные ядра этого уравнения

$$R_0(\tau, \tau_1) = \frac{\delta(\tau - \tau_1)}{4\pi\tau_1^2}, \quad (18)$$

$$R_n(\tau, \tau_1) = \int_{|\vec{\tau}'| < \tau_0} K_0(|\vec{\tau} - \vec{\tau}'|) R_{n-1}(\tau', \tau_1) d^3\tau'.$$

Функции $R_n(\tau, \tau_1)$ являются коэффициентами разложения $R(\tau, \tau_1, \tau_0)$ в ряд Неймана, то есть по степеням λ .

Величина $K_0(|\vec{\tau} - \vec{\tau}'|) d^3\tau'$ есть вероятность того, что фотон, излученный в линии в точке $\vec{\tau}$, дойдет до точки $\vec{\tau}'$ и поглотится в элементе объема $d^3\tau'$. Исходя из этого, легко показать, что вероятности выйти фотону из шара или погибнуть в результате безизлучательного перехода ровно через n рассеяний, если первоначально он находился в поглощенном состоянии на расстоянии τ от центра шара, равны, соответственно, $(\lambda)^n$

$$\lambda^{n-1} \int_{|\vec{\tau}'| < \tau_0} R_{n-1}(\tau, \tau') d^3\tau' \left| 1 - \int_{|\vec{\tau}''| < \tau_0} K_0(|\vec{\tau}' - \vec{\tau}''|) d^3\tau'' \right|, \quad (19)$$

$$(1 - \lambda)^{n-1} \int_{|\vec{\tau}'| < \tau_0} R_{n-1}(\tau, \tau') d^3\tau', \quad (20)$$

а полная вероятность фотону испытать ровно n рассеяний (выйдя или погибнув) есть

$$\int_{|\vec{\tau}'| < \tau_0} [\lambda^{n-1} R_{n-1}(\tau, \tau') - \lambda^n R_n(\tau, \tau')] d^3\tau'. \quad (21)$$

Умножая величины (21) на e^{-np} и суммируя по n от 1 до ∞ , получим (вещественную при вещественных p) характеристическую функцию $\varphi(p)$ случайной величины — числа рассеяний фотона, которая выражается через функцию $N(\tau, \tau_0, \lambda)$:

$$\varphi(p) = 1 - (1 - e^{-p}) N(\tau, \tau_0, \lambda e^{-p}). \quad (22)$$

Средние значения степеней числа рассеяний получаются из (22) дифференцированием

$$\overline{n^m} = (-1)^m \varphi^{(m)}(0), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (23)$$

В частности, $\bar{n} = -\varphi'(0) = N(\tau, \tau_0, \lambda)$. Таким образом, характеристическая функция и моменты числа рассеяний непосредственно выражаются через среднее число рассеяний. Найдем для примера средний квадрат числа рассеяний. Из (22) и (23) имеем

$$\bar{n}^2 = N(\tau, \tau_0, \lambda) + 2\lambda \frac{\partial N(\tau, \tau_0, \lambda)}{\partial \lambda}. \quad (24)$$

Заметим, что приведенные рассуждения справедливы не только для рассеяния в шаре, а имеют самый общий характер и с небольшими изменениями применимы к любой выпуклой области. В частности, формулы (22) и (24) верны и для плоского слоя, только вместо $N(\tau, \tau_0, \lambda)$ надо подставить функцию $Q(\tau, \tau_0, \lambda)$, удовлетворяющую уравнению

$$Q(\tau, \tau_0, \lambda) = 1 + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau} K(|\tau - \tau'|) Q(\tau', \tau_0, \lambda) d\tau' \quad (25)$$

и выражающуюся через $\Psi(\tau, \tau_0)$ [18]:

$$Q(\tau, \tau_0, \lambda) = \Psi(\tau_0, \tau_0) [\Psi(\tau, \tau_0) + \Psi(\tau_0 - \tau, \tau_0) - \Psi(\tau_0, \tau_0)]. \quad (26)$$

Следует отметить также, что интерпретацию, подобную $N(\tau, \tau_0, \lambda)$, допускает и сама резольвента: $[R_0(\tau, \tau_1) + R(\tau, \tau_1, \tau_0)] d^3\tau_1$ — есть среднее число рассеяний, которое испытывает фотон, первоначально поглощенный в точке τ , до того, как он поглотится в элементе $d^3\tau_1$ на расстоянии τ_1 от центра шара.

Найдем теперь выражение для $N(\tau, \tau_0, \lambda)$. Из (17), (3) и (7) видно, что

$$\begin{aligned} N(\tau, \tau_0, \lambda) &= 1 + 4\pi \int_0^{\tau} R(\tau, \tau_1, \tau_0) \tau_1^2 d\tau_1 = \\ &= 1 + \frac{1}{\tau} \int_0^{2\tau_0} (\tau_0 - \tau') \Gamma(\tau_0 - \tau, \tau', 2\tau_0) d\tau'. \end{aligned} \quad (27)$$

Чтобы найти входящие в (27) интегралы, разложим оба выражения (10) для функции $P(\tau, z, \tau_0)$ по степеням $1/z$ и приравняем члены при нулевой и первой степенях. Тогда получим

$$N(\tau, \tau_0, \lambda) = Q(\tau_0 + \tau, 2\tau_0, \lambda) - \frac{X(\infty, 2\tau_0)}{\tau} \int_{\tau_0 - \tau}^{\tau_0 + \tau} \tau' \Phi(\tau', 2\tau_0) d\tau' + \\ + \frac{x_1(2\tau_0)}{\tau} [\Psi(\tau_0 + \tau, 2\tau_0) - \Psi(\tau_0 - \tau, 2\tau_0)]. \quad (28)$$

Для фотонов, излучившихся в центре шара и на поверхности, находим, соответственно,

$$N(0, \tau_0, \lambda) = Q(\tau_0, 2\tau_0, \lambda) - [y_1(2\tau_0) - x_1(2\tau_0)] \Phi(\tau_0, 2\tau_0), \quad (29)$$

$$N(\tau_0, \tau_0, \lambda) = X(\infty, 2\tau_0) - \frac{x_1(2\tau_0)}{\tau_0}. \quad (30)$$

Если мощность первичных источников в шаре определяется функцией $g(\tau)$, то среднее число рассеяний фотонов получается интегрированием [18]

$$N(\tau_0) = \frac{\int_0^{\tau_0} g(\tau) \tau^2 N(\tau, \tau_0, \lambda) d\tau}{\int_0^{\tau_0} g(\tau) \tau^2 d\tau}. \quad (31)$$

Для равномерного распределения источников $g(\tau) = \text{const}$ эта величина была выражена через $x_k(2\tau_0)$ и $y_k(2\tau_0)$ в работе [10].

Для нахождения \bar{n}^2 необходимо получить выражение для производной от $N(\tau, \tau_0, \lambda)$ по λ . Дифференцируя (4) по λ и пользуясь тем, что $R(\tau, \tau_1, \tau_0)$ — резольвента, находим

$$\lambda \frac{\partial R(\tau, \tau_1, \tau_0)}{\partial \lambda} = R(\tau, \tau_1, \tau_0) + 4\pi \int_0^{\tau_0} \tau'^2 R(\tau, \tau', \tau_0) R(\tau_1, \tau', \tau_0) d\tau'. \quad (32)$$

Отсюда

$$\lambda \frac{\partial N(\tau, \tau_0, \lambda)}{\partial \lambda} = 4\pi \int_0^{\tau_0} R(\tau, \tau', \tau_0) N(\tau', \tau_0, \lambda) \tau'^2 d\tau'. \quad (33)$$

Для равномерного распределения получается сравнительно простое выражение

$$\lambda \int_0^{\tau_0} \tau^2 d\tau \frac{\partial N(\tau, \tau_0, \lambda)}{\partial \lambda} = \int_0^{\tau_0} N(\tau, \tau_0, \lambda) [N(\tau, \tau_0, \lambda) - 1] \tau^2 d\tau. \quad (34)$$

Формулы (32)—(34) также легко переносятся на случай произвольной геометрии среды. Для плоского слоя надо R заменить на G , N на Q и одустиль множители 4π , τ^{-2} и τ'^{-2} в подынтегральных выражениях. Например,

$$\lambda \int_0^{\tau_0} \frac{\partial Q(\tau, \tau_0, \lambda)}{\partial \lambda} d\tau = \int_0^{\tau_0} Q(\tau, \tau_0, \lambda) [Q(\tau, \tau_0, \lambda) - 1] d\tau. \quad (35)$$

Наиболее важный случай — чистое рассеяние. Для него численное решение уравнений переноса при больших τ_0 встречается со значительными трудностями. К счастью, именно для чистого рассеяния оказалось возможным развить асимптотическую теорию. Ее нетрудно распространить и на рассеяние в шаре.

3. *Асимптотики для шара.* Указанная асимптотическая теория развивалась в работах ленинградской группы астрофизиков-теоретиков и московских физиков и изложена в книгах В. В. Иванова [8] и Ю. Ю. Абрамова, А. М. Дыхне и А. П. Напартовича [12]. Эта теория справедлива, когда косинус—преобразование Фурье ядерной функции при $u \rightarrow 0$ ведет себя таким образом, что

$$1 - V(u) = 1 - \int_0^{\infty} \cos \tau u K(\tau) d\tau \sim V_0 u^{2\gamma}, \quad 0 < \gamma \leq 1. \quad (36)$$

Здесь V_0 — постоянная или медленно меняющаяся функция u . Случай $\gamma = 1$, $V_0 = 1/3$ отвечает монохроматическому изотропному рассеянию.

При выполнении (36) для бесконечных сред справедливы следующие асимптотические ($\tau \rightarrow \infty$) равенства:

$$\Phi_-(\tau) \sim \Phi_{\infty}^{\text{as}}(\tau) = \frac{\Gamma(1-2\gamma)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\gamma)V_0} \tau^{2\gamma-1}, \quad (37)$$

$$\Phi(\tau) \sim \Phi_{\text{as}}(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)\sqrt{V_0}} \tau^{\gamma-1}, \quad (38)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Функция $\Phi_-(\tau)$ существует при $\gamma < 1/2$.

Для конечного слоя имеются асимптотики $\Phi(\tau, \tau_0)$ и других основных функций двух типов. Одни справедливы при $\tau_0 \gg 1$, $\tau \gg 1$ и $\tau_0 - \tau \gg 1$, то есть при большой оптической толщине слоя вдали от его границ. Они выражаются через высшие трансцендентные функции. Асимптотики другого типа получаются из них заменой некоторых из этих функций на характеристики бесконечных сред, для ко-

торых известны точные выражения. В результате область применимости асимптотических формул расширяется, остается лишь условие $\tau_0 \gg 1$. Мы будем первые давать со знаком \sim , а уточненные — обычным равенством. Эти асимптотики для $\Phi(\tau, \tau_0)$ и $\Psi(\tau, \tau_0)$ имеют вид ($\Psi(\tau) = \Psi(\tau, \infty)$)

$$\Phi(\tau, \tau_0) = \frac{\Phi(\tau) \Psi(\tau_0 - \tau)}{\Psi(\tau_0)} \sim \frac{1}{\Gamma(\gamma) \sqrt{V_0}} \tau^{\gamma-1} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right)^\gamma, \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \Psi(\tau, \tau_0) &= \Psi(\tau) \cdot F\left(-\gamma, \gamma, 1 + \gamma, \frac{\tau}{\tau_0}\right) \sim \\ &\sim \frac{\tau^\gamma}{\Gamma(1 + \gamma) \sqrt{V_0}} F\left(-\gamma, \gamma, 1 + \gamma, \frac{\tau}{\tau_0}\right), \end{aligned} \quad (40)$$

где $F(a, b, c, z)$ — гипергеометрическая функция. Асимптотику для $\Gamma(\tau, \tau', \tau_0)$ удается получить лишь в предположении, что $\tau_0, \tau, \tau', \tau_0 - \tau, \tau_0 - \tau' \gg 1$ [12]. Найдены также различные асимптотические формулы для X и Y -функций [8].

Найдем теперь асимптотики для шара. Если при $\tau_0 \gg 1$ точки τ и τ_1 находятся вдали от поверхности шара, то есть $\tau_0 - \tau$ и $\tau_0 - \tau_1 \gg 1$, то, подставляя асимптотику $\Phi(\tau, \tau_0)$ в (13) и (14), получим асимптотическое выражение для $R(\tau, \tau_1, \tau_0)$, которое можно записать в различных формах. При произвольном соотношении между τ и τ_1 справедлива формула

$$\begin{aligned} R(\tau, \tau_1, \tau_0) &\sim \frac{\Phi_\infty(|\tau - \tau_1|) - \Phi_\infty(\tau + \tau_1)}{4\pi\tau\tau_1} \sim \\ &\sim \frac{1}{\Gamma^2(\gamma) 2^{2\gamma} (3 - 2\gamma)} \frac{\tau_0^{2\gamma-3}}{\pi V_0} \times \\ &\times F_1\left(\frac{3}{2} - \gamma, 1 - \gamma, 1 - \gamma, \frac{5}{2} - \gamma, \frac{\tau^2}{\tau_0^2}, \frac{\tau_1^2}{\tau_0^2}\right), \end{aligned} \quad (41)$$

где F_1 — гипергеометрический ряд от двух аргументов

$$F_1(a, b, c, d, x, y) = \sum_{m, n} \frac{\Gamma(a + n + m) \Gamma(d)}{\Gamma(d + n + m) \Gamma(a)} \frac{\Gamma(b + n) \Gamma(c + m)}{\Gamma(b) \Gamma(c)} x^n y^m. \quad (42)$$

Формула (41) удобна для вычислений, если τ и τ_1 малы по сравнению с τ_0 . Для других случаев ее можно преобразовать. Тот же результат получится, если воспользоваться асимптотикой $\Gamma(x, \tau', 2\tau_0)$ из [12] и формулой (7). Считая, что $\tau > \tau_1 > 0$, находим

$$R(\tau, \tau_1, \tau_0) \sim \frac{\Phi_+(\tau - \tau_1) - \Phi_-(\tau + \tau_1)}{4\pi\tau_1} - \frac{\Phi_+^{**}(\tau - \tau_1) - \Phi_-^{**}(\tau + \tau_1)}{4\pi\tau_1} + \frac{1}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\gamma)V_0} \frac{1}{4\pi\tau_1} \times \quad (43)$$

$$\times [(\tau - \tau_1)^{2\gamma-1} y_+ F(\gamma, 2\gamma, 1+\gamma, y_+) - (\tau + \tau_1)^{2\gamma-1} y_- F(\gamma, 2\gamma, 1+\gamma, y_-)],$$

где

$$y_+ = \frac{\tau_0 - \tau}{\tau_0 + \tau}, \quad \frac{\tau_0 + \tau_1}{\tau_0 - \tau_1}, \quad y_- = \frac{\tau_0 - \tau}{\tau_0 + \tau}, \quad \frac{\tau_0 - \tau_1}{\tau_0 + \tau_1}. \quad (44)$$

Если $\tau - \tau_1 \gg 1$, то две первые дроби сокращаются.

Для точечного источника в центре шара формула значительно упрощается. Производя предельный переход $\tau_1 \rightarrow 0$, из (41) получаем

$$R(\tau, 0, \tau_0) \sim S_P(\tau) - \frac{F\left(\frac{3}{2} - \gamma, 1 - \gamma, \frac{5}{2} - \gamma, \frac{\tau^2}{\tau_0^2}\right)}{\Gamma^2(\gamma) 2^{2\gamma} V_0 (3 - 2\gamma) \pi \tau_0^{3-2\gamma}} = \quad (45)$$

$$= S_P(\tau) - S_P^{**}(\tau) + \frac{\left(1 - \frac{\tau^2}{\tau_0^2}\right)^\gamma F\left(1, \frac{3}{2}, 1 + \gamma, 1 - \frac{\tau^2}{\tau_0^2}\right)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\gamma) 2^{2\gamma} V_0 2\pi \tau_0^{3-2\gamma}}.$$

Эту формулу можно привести к виду, годному при всех τ [12] ($S_P^{**}(\tau)$ находится из (8) и (37)),

$$R(\tau, 0, \tau_0) = S_P(\tau) \frac{\Psi(\tau_0 - \tau)\Psi(\tau_0 + \tau)}{\Psi^2(\tau_0)} \frac{F\left(\gamma, \gamma - \frac{1}{2}, 1 + \gamma, 1 - \frac{\tau^2}{\tau_0^2}\right)}{F\left(\gamma, \gamma - \frac{1}{2}, 1 + \gamma, 1\right)}. \quad (46)$$

Асимптотика для противоположного случая — источник на границе — получается из (13) и (39).

Найдем, наконец, асимптотические выражения для среднего числа рассеяний фотона и дисперсии его. Подставляя (26) в формулу (28) и пользуясь (39), (40) и асимптотикой $x_1(2\tau_0)$ [10], находим

$$N(\tau, \tau_0, 1) \sim \frac{\tau_0^{2\gamma}}{\Gamma(2+2\gamma)V_0} \left(1 - \frac{\tau^2}{\tau_0^2}\right)^\gamma, \quad (47)$$

что можно распространить на все τ :

$$N(\tau, \tau_0, 1) = \frac{\Gamma^2(1+\gamma)}{\Gamma(2+2\gamma)} \Psi(\tau_0 - \tau)\Psi(\tau_0 + \tau). \quad (48)$$

Формулы (47) и (48) были получены в [11] другим способом.

При помощи (31) и (47) легко находим среднее число рассеяний N_s при степенном законе изменения первичных источников $g(\tau) = \tau^{-2}$:

$$N_s \sim \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+5}{2}\right) \Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(2+2\gamma) \Gamma\left(\gamma + \frac{\alpha+5}{2}\right)} \cdot \frac{\tau_0^{-2\gamma}}{V_0} \quad (49)$$

По формулам (24) и (34) можно найти средний квадрат числа рассеяний, а затем и дисперсию $D = \overline{n^2} - (\overline{n})^2$ для равномерного распределения источников в шаре

$$D_{sp} \sim \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma^2(2+2\gamma)} \left[\frac{2\Gamma(1+2\gamma)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+2\gamma\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma^2(1+\gamma)}{\Gamma^2\left(\frac{5}{2}+\gamma\right)} \right] \frac{\tau_0^{-4\gamma}}{V_0^2} \quad (50)$$

Для сравнения приведем выражение для дисперсии в плоском слое толщиной $2\tau_0$

$$D_{pl} \sim \left[\frac{2}{\Gamma(2+4\gamma)} - \frac{\Gamma^2(1+\gamma)}{\Gamma^2(1+2\gamma) \Gamma^2(2+2\gamma)} \right] \frac{2^{4\gamma} \tau_0^{-4\gamma}}{V_0^2} \quad (51)$$

Для монохроматического изотропного рассеяния ($\gamma = 1$, $V_0 = 1/3$) формула (51) была получена В. М. Прохоровым другим способом [22].

Таким образом, как среднее число \overline{n} , так и дисперсия числа рассеяний в однородном слое и шаре имеют одинаковый порядок, причем дисперсия равна примерно квадрату \overline{n} . Обе эти величины возрастают с ростом τ_0 быстрее при больших γ . Это объясняется тем, что при меньших γ коэффициент поглощения $\alpha(x)$ медленнее убывает с частотой x , больше вероятность фотону переизлучиться при рассеянии в далеком крыле линии и выйти из среды (гибели фотонов при $\lambda = 1$ не происходит). Из сказанного следует, что при решении уравнений переноса путем последовательного учета рассеяний фотонов, число необходимых шагов меньше для рассеяния с меньшим γ .

В заключение этого раздела отметим, что хотя мы в последних двух разделах везде предполагали, что $\lambda = 1$, все приведенные формулы верны и тогда, когда $\lambda < 1$, если толщина шара (или слоя) $\tau_0 \gg 1$, но значительно меньше, чем так называемая длина термализации [8, 12], равная ∞ при чистом рассеянии. Заметим также, что в принципе нетрудно получить асимптотические выражения и для других величин, описывающих рассеяние в шаре, например, для функции источников при $g(\tau) = e^{-m\tau}$ или для дисперсии числа рассеяний

при $g(\tau) = \tau^2$. Однако эти выражения довольно сложны и мы их не приводим.

4. *Некоторые приложения.* Полученные результаты представляют интерес для астрофизики, так как некоторые объекты, в которых большую роль играет перенос резонансного излучения, можно считать шарообразными. Примером являются планетарные туманности на ранних стадиях расширения. В планетарных туманностях происходит диффузия L_τ -излучения, причем первичные L_τ -кванты возникают за счет распада L_τ -квантов [23].

Рассмотрим задачу о рассеянии L_τ -излучения в шаровой туманности, не учитывая движения ее. С хорошей точностью можно считать, что мощность указанного источника первичного излучения одинакова во всей туманности. Тогда функцией источников задачи является изученная нами функция $N(\tau, \tau_0, \lambda)$. Она пропорциональна отношению концентраций атомов водорода, находящихся в первом возбужденном и в основном состояниях [8]. В туманностях для L_τ -квантов вероятность выживания при рассеянии λ очень близка к единице. Поэтому и асимптотическая теория применима к рассматриваемому случаю. Обычно считают, что коэффициент поглощения в линии L_τ доплеровский: $\alpha(x) = e^{-x^2}$. Для него $\gamma = 1/2$, $V_0(u) = \sqrt{\pi}/4 (\ln 1/u)^{-1/2}$. Подставив эти значения в (47), (49) и (50), получим асимптотики функции источников, среднего числа и дисперсии числа рассеяний (аргументом V_0 вместо u надо считать $1/\tau_0$).

Найдем асимптотические выражения для характеристик выходящего излучения. Интенсивность его выражается через функцию источников следующим образом:

$$I_{sp}(\tau_0, \mu, x) = \alpha(x) \int_{-\tau_0 \mu}^{\tau_0 \mu} N(\sqrt{s^2 + \frac{\tau_0^2}{2}(1 - \mu^2)}, \tau_0, \lambda) e^{-\alpha(x)(\tau_0 \mu - s)} ds, \quad (52)$$

где μ — косинус угла между радиусом шара и направлением выхода излучения. При $\lambda = 1$ подставим в (52) вместо функции источников ее асимптотику (47). Тогда получим выражение, справедливое при большой толщине туманности для направлений, не очень близких к краю диска, и частот, не близких к центру линии ($\tau_0 \gg 1$, $\tau_0 \mu^2 \gg 1$, $\alpha(x) \ll \mu$):

$$I_{sp}(\tau_0, \mu, x) \sim \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1 + \gamma)}{\Gamma(2 + 2\gamma) V_0} (2\tau_0 \mu)^{2\gamma} t^{\frac{1}{2} - \gamma} e^{-\frac{t}{2}} J_{\frac{1}{2} + \gamma} \left(\frac{t}{2} \right). \quad (53)$$

Здесь $t = 2\tau_0 \mu x$ — оптический путь кванта частоты x , проходимый им в направлении μ внутри шара по прямой, а $I_\nu(t)$ — функция Бес-

селя мнимого аргумента. Для однородного плоского слоя толщиной $2\tau_0$ асимптотическая формула для интенсивности выходящего излучения записывается в виде [8]

$$I_{pl}(\tau_0, \mu, x) \sim \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1 + \gamma)}{\Gamma(1 + 2\gamma)} V_0 (2\tau_0)^{2\gamma} u^{\frac{1}{2}-\gamma} e^{-\frac{u}{2}} I_{\frac{1}{2}+\gamma}\left(\frac{u}{2}\right), \quad (54)$$

где параметр $u = 2\tau_0 \lambda(x)/\mu$ имеет тот же смысл, что и t для шара. Выражения (53) и (54) очень похожи. Различие между ними в численных коэффициентах, дополнительном множителе $\mu^{2\gamma}$ в (53), учитывающем геометрический фактор, и в аргументах t и u . Как и (54), выражение (53) описывает характерный профиль линии с провалом в центральной части.

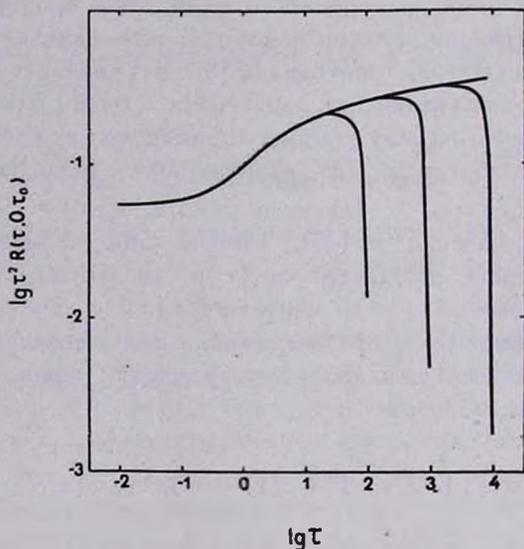


Рис. 1. Функции $R(\tau, 0, \tau_0)$ при $\tau_0 = 10^1, 10^2, 10^3$ и ∞ для доплеровского коэффициента поглощения и $\lambda = 1$.

Возможна и другая модель планетарной туманности — шар с точечным источником в центре. В случае такой модели для функции источников при доплеровском профиле из (45) получаем

$$R(\tau, 0, \tau_0) \sim S_P(\tau) - \frac{2}{\pi^{5/2}} \frac{\sqrt{\ln \tau_0}}{\tau_0} \frac{\tau_0 - \sqrt{\tau_0^2 - \tau^2}}{\tau^2}. \quad (55)$$

Граничное значение $R(\tau_0, 0, \tau_0) \sim \ln^{1/4} \tau_0 / (\sqrt{2} \pi^{7/4} \tau_0^2)$ находится согласно

(16). Графики этой функции представлены на рис. 1. Обращает на себя внимание чрезвычайно быстрое убывание $R(\tau, 0, \tau_0)$ при приближении к поверхности шара. Аналогично можно рассмотреть случаи и других профилей коэффициента поглощения.

Ленинградский государственный
университет

SCATTERING OF RESONANCE RADIATION IN A SPHERE

D. I. NAGIRNER

The scattering of resonance line radiation in a homogeneous sphere with spherically symmetric sources of radiation is considered. The resolvent of the integral equation of the problem and the number of scatterings of photons are investigated. For the case of conservative scattering and optically thick sphere the asymptotic forms of the resolvent, the mean number and the dispersion of the number of scatterings have been found out. The asymptotic formula for the emergent intensity is also derived under the assumption of the uniform source distribution. The results can be used in the theoretical study of planetary nebulae.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. А. Амбарцумян, Бюлл. Ереванской астрон. обсерв., № 6, 1945.
2. В. В. Соболев, Сб. „Кинематика и динамика звездных систем и физика межзвездной среды“, Наука, Алма-Ата, 1965.
3. Д. И. Нагирнер, Уч. зап. ЛГУ. № 328 (Труды АО ЛГУ, XXII), 66, 1965.
4. Т. А. Гермогенова, Астрофизика, 2, 251, 1966.
5. A. Leonard, T. W. Mullikin, Proc. Nat. Acad. Sci., 52, 683, 1964.
6. D. G. Hummer, G. B. Rybicki, M. N., 152, 1, 1971.
7. S. Ueno, H. Kagitwada, R. Kalaba, J. Math. Phys., 12, 1279, 1971.
8. В. В. Иванов, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
9. Б. А. Векленко, ЖЭТФ, 36, 204, 1959.
10. В. В. Иванов. Сб. „Звезды, туманности, галактики“, Изд. АН Арм.ССР, Ереван, 1969.
11. А. М. Дыхне, А. П. Напиртович, ИАЭ-2026, М., 1970.
12. Ю. Ю. Абрамов, А. М. Дыхне, А. П. Напиртович, ИАЭ-1804, М., 1969.
13. В. В. Соболев, ДАН СССР, 120, 69, 1958.
14. В. В. Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, ГИТТЛ, М., 1956.
15. G. B. Rybicki, D. G. Hummer, M. N., 144, 313, 1968.
16. Д. И. Нагирнер, А. Б. Шнейвайс, Уч. зап. ЛГУ, (Труды АО ЛГУ, XXIX), 1972.

17. *В. А. Амбарцумян*, ДАН Арм.ССР, 8, 101, 1948.
18. *В. В. Соболев*, *Астрофизика*, 2, 135, 239, 1966; 3, 137, 1967.
19. *D. G. Hummer*, *Ap. J.*, 140, 276, 1964.
20. *T. W. Mullikin*, *J. Appl. Prob.*, 5, 357, 1968.
21. *В. Ю. Терещиж*, *Сообщ. Бюр. обс.*, 40, 76, 1969.
22. *В. М. Прохоров*, *Дипломная работа*, ЛГУ, мат.-мех. ф-т, 1972.
23. *В. В. Соболев*, *Курс теоретической астрофизики*, Наука, М., 1967.