АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 8 МАЙ, 1972 ВЫПУСК 2

К ДИНАМИКЕ ГРАВИТИРУЮЩИХ СИСТЕМ НА НЕЙТРИННОМ ФОНЕ ВСЕЛЕННОЙ

Т. Б. ОМАРОВ

Поступила 16 сентября 1971
Пересмотрена 7 декабря 1971

Рассматривается гравитационное влияние однородного нейтринного моря расширяющейся Вселенной в динамике выделившейся на его фоне пары квазиточечных тел. На основе „близкой“ интегрируемой задачи предложены соотношения, описывающие общие свойства и характер поведения изучаемой системы. В частности, показано, что если в относительном движении двух тел по орбите эллиптического типа оскулирующий период обращения в эпоху t_0 (один из моментов прохождения через перицентр) намного меньше значения самого времени t_0, отсчитываемого от момента сингулярности (плотность фонового субстрата становится бесконечной), то влияние нейтронного моря может сводиться к систематическому возмущению только положения перицентра.

В динамике некоторых объектов Метагалактики может, в принципе, оказаться существенным гравитационное влияние труднонаблюдаемых форм материи. Как полагают Фодор, Кёвеши и Маркс [1, 2], источником такого гравитационного поля для больших скоплений галактик могли бы быть нейтрино. Вопрос о нейтринном фоне во Вселенной рассматривался впервые в работе Понтекорво и Смородинского [3]. Согласно предложенной ими гипотезе флуктуации, приведшей к существованию местных скоплений вещества и антивещества, плотность энергии нейтрино — антинейтрино (зарядово-симметричный фон) должна была бы когда-то в прошлом намного превышать плотность энергии нуклонов и, возможно, продолжает превышать ее и в современную эпоху. Большую плотность нейтрино можно также ожидать в рамках теории Вайнберга о существовании вырожденного нейтринного моря Вселенной [4, 5]. В уже упоминавшихся работах Фодора, Кёвеши и Маркса рассмотрены неоднородности в плотности нейтринного моря, обусловленные большими скоплениями масс, и соответствующие избытки плотности интерпретированы как возможные факторы, поддерживающие стабильность гравитирующих систем. Ниже мы рассмотрим гравитационное влияние самого невозмущенного моря нейтрино в динамике выделившейся на его фоне простейшей небесно-механической схемы — бинарной системы.

Следуя Мак-Кри и Милну, гравитационное поле однородного субстрата с давлением P может быть описано в рамках классической механики и ньютоновской теории тяготения заменой плотности материи δ на величину $\delta + 3P/c^2$ [6]:

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi GR\left(\delta + \frac{3P}{c^2}\right) = -\frac{4\pi G}{c^2}R(\varepsilon + 3P), \qquad (1)$$

где R — радиус произвольного сферического объема, содержащего данное количество сохраняющихся частиц субстрата, ε — плотность энергии, c — скорость света.

Для фона нейтрино

$$P = \frac{1}{3}\varepsilon = \frac{1}{3}\delta c^2 \qquad (2)$$

и в этом случае в уравнении (1) имеем

$$\frac{\varepsilon + 3P}{c^2} = \frac{2\varepsilon}{c^2} = 2\delta, \qquad (3)$$

так что фактическая сила гравитационного воздействия нейтринного моря однородной модели мира вдвое больше по сравнению с величиной силы, соответствующей при заданной плотности распределения массы полю тяготения обычного вещества [7].

Выделив теперь на рассматриваемом гравитирующем фоне систему двух взаимно притягивающихся квазиточечных тел постоянной суммарной массы M, обратимся к уравнению их относительного движения с учетом отмеченной Радзиевским специфики квазиупругого поля сил — движение одного тела по отношению к другому происходит так, как если бы с последним был совмещен центр квазиупругого притяжения [8]:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -GM\frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{8}{3}\pi G\delta(t)\vec{r}. \qquad (4)$$

Если плотность доминирующего фона нейтрино в эпоху t_0 равна соответствующему критическому значению $\delta_0 = 3H_0^2/8\pi G$ (H_0—значение постоянной Хаббла), то изменение δ происходит по закону [7]

$$\delta = \frac{3}{32\pi Gt^2} \tag{5}$$

Имея в виду, что к тому же частное выражение плотности (5) практически является универсальным на ранних стадиях развития всех типов „горячей" модели мира [7], его мы примем для определения аналитической структуры нестационарной квазиупругой силы уравнения движения (4):

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -GM\frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{1}{4t^2}\vec{r}. \tag{6}$$

В связи с космогоническим характером самой постановки вопроса представляется важным иметь хотя бы ориентировочные аналитические оценки, описывающие основные тенденции в поведении динамической системы (6), и здесь обращает на себя внимание следующая интегрируемая проблема.

Рассмотрим относительное движение двух квазиточечных тел на фоне гравитирующего вещества мира Эйнштейна—де Ситтера [7, 9] —равномерно распределенной и изотропно расширяющейся пылевидной (отсутствует давление) материи с плотностью

$$\delta = \frac{1}{6\pi Gt^2}. \tag{7}$$

Соответствующее уравнение имеет вид

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -GM\frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{2/9}{t^2}\vec{r}, \tag{8}$$

где M — суммарная масса взаимодействующих тел.

В результате замены переменных

$$\vec{r} = r_0 t_0^{-2/3} t^{1/3}\vec{\rho}, \quad t = (\tau/3)^3 \tag{9}$$

уравнение (8) приобретает вид

$$\frac{d^2\vec{\rho}}{d\tau^2} = -\alpha\tau\frac{\vec{\rho}}{\rho^3}, \qquad \alpha = GMt_0^2/3r_0^3 \tag{10}$$

со следующей взаимосвязью начальных условий:

$$\tau_0 = 3t_0^{1/3}, \quad \vec{\rho}_0 = t_0^{1/3}\frac{\vec{r}_0}{r_0}, \quad \left(\frac{d\vec{\rho}}{d\tau}\right)_0 = -\frac{1}{3}\frac{\vec{r}_0}{r_0} + \frac{t_0}{r_0}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_0 \tag{11}$$

(индекс „нуль" приписывается значениям фигурирующих у нас величин в некоторую эпоху t_0).

Умножая уравнение (10) векторно на $\vec{\rho}$ слева и интегрируя, получаем

$$[\vec{\rho} \times d\vec{\rho}/d\tau] = \vec{C}, \tag{12}$$

где $\vec{C}$ — постоянный вектор. Используя аналогичным образом вектор $2\,d\vec{\rho}/d\tau$ в качестве множителя скалярного произведения, имеем

$$\left(\frac{d\vec{\rho}}{d\tau}\right)^2 - \frac{2\alpha\tau}{\rho} = h, \tag{13}$$

где введено обозначение

$$h = -2\int\frac{\alpha}{\rho}\,d\tau. \tag{14}$$

Следуя Гельфгату, систему уравнений (12) и (13) интегрируем в полярных координатах ρ и ϑ вектор-функции $\vec{\rho}$ с одновременным привлечением вместо τ величины (14) как независимой переменной [10]:

$$\rho = -2h\,(C_1 J_{-1/3}^2 + C_2 J_{1/3}^2 + C_3 J_{-1/3}\, J_{1/3}), \tag{15}$$

$$\vartheta - \vartheta_0 = i\ln\frac{2C_1 J_{-1/3} + (C_3 - \sqrt{C_3^2 - 4C_1C_2}\,)\,J_{1/3}}{2C_1 J_{-1/3} + (C_3 + \sqrt{C_3^2 - 4C_1C_2}\,)\,J_{1/3}}, \tag{16}$$

$$\alpha\tau = h^2[C_1(J_{-1/3}^2 + J_{2/3}^2) + C_2(J_{1/3}^2 + J_{-2/3}^2) + C_3(J_{-1/3}\,J_{1/3} - J_{-2/3}\,J_{2/3})], \tag{17}$$

где J_ν — функции Бесселя первого рода порядка $\nu = -1/3,\ 1/3,\ -2/3,\ 2/3$ с аргументом z вида

$$z = ih^{3/2}/6\alpha, \tag{18}$$

а C_1, C_2 и C_3 — постоянные интегрирования, связанные соотношением

$$C_3^2 = 4C_1C_2 - \frac{\pi^2 C^2}{3\,(6\alpha)^2}. \tag{19}$$

Возвращаясь теперь к интересующей нас здесь динамической системе (6) и сопоставляя ее с уравнением (8), нетрудно усмотреть, что фигурирующие в них квазиупругие силы отличаются только постоянным множителем порядка единицы, и соответственно может быть предложена аппроксимация общих тенденций и характера поведения этой системы полученными выше результатами (9)—(19).

С точки зрения указанной аппроксимации должно иметь место, в частности, следующее свойство решения уравнения (6): если период

$$P_0 = \frac{2\pi r_0^{3/2}}{\sqrt{GM_0}} \tag{20}$$

оскулирующего кругового движения в эпоху t_0

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_0^2 = \frac{GM}{r_0}, \qquad \left(\frac{dr}{dt}\right)_0 = 0 \tag{21}$$

намного меньше значения самого времени t_0, отсчитываемого от момента сингулярности ($\delta = \infty$),

$$P_0 \ll t_0, \tag{22}$$

то соответствующее этим начальным условиям возмущение в радиус-векторе $\delta r = r - r_0$ не содержит векового члена.

Обратимся прежде всего к начальному ($t = t_0$) значению промежуточной переменной h, определяемому формулами (11) и (13):

$$h_0 = \frac{1}{9} - \frac{2}{3}\frac{t_0}{r_0}\left(\frac{dr}{dt}\right)_0 + \frac{t_0^2}{r_0^2}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_0^2 - 6\alpha. \tag{23}$$

В силу выражений (10), (11), (20), (21) и (23), имеем

$$h_0 = \frac{1}{9} - 3\alpha, \qquad 3\alpha = \left(\frac{2\pi t_0}{P_0}\right)^2, \tag{24}$$

так что с учетом соотношения (22) аргумент функций Бесселя (18) в момент $\tau_0 = 3t_0^{1/3}$ действителен и отрицателен, причем

$$|z_0| = |ih_0^{3/2}/6\alpha| \gg 1. \tag{25}$$

Поскольку отмеченное свойство исходного значения величины (18) может быть распространено на все последующие моменты τ (как видно из формулы (14), h является убывающей функцией τ, причем в рассматриваемом случае $h_0 < 0$), то в равенствах (15) и (17) восползуемся соответствующими асимптотическими разложениями функций Бесселя [11]

$$J_\nu \sim e^{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi i}\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\left[\cos\left(z+\frac{1}{2}\nu\pi+\frac{1}{4}\pi\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\nu, 2m)}{(2z)^{2m}}-\right.$$
$$\left.-\sin\left(z+\frac{1}{2}\nu\pi+\frac{1}{4}\pi\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\nu, 2m+1)}{(2z)^{2m+1}},\right. \tag{26}$$

где имеются в виду порядки $\nu = -1/3,\ 1/3,\ -2/3,\ 2/3$. Ограничившись главными членами этих представлений, положим

$$J_\nu = e^{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi i}\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\cos\left(z+\frac{1}{2}\nu\pi+\frac{1}{4}\pi\right), \tag{27}$$

откуда следует, что

$$J^2_{-1/3}+J^2_{2/3}=e^{\frac{1}{3}\pi i}\frac{2}{\pi z}, \tag{28}$$

$$J^2_{1/3}+J^2_{-2/3}=-e^{\frac{2}{3}\pi i}\frac{2}{\pi z} \tag{29}$$

и

$$J_{-1/3}J_{1/3}-J_{-2/3}J_{2/3}=-\frac{1}{\pi z}. \tag{30}$$

Соответственно

$$a\tau=\frac{h^2}{\pi z}\left(2C_1e^{\frac{1}{3}\pi i}-2C_2e^{\frac{2}{3}\pi i}-C_3\right) \tag{31}$$

или, принимая во внимание формулу (18), имеем

$$h=-\frac{\pi^2\tau^2}{36\left(2C_1e^{\frac{1}{3}\pi i}-2C_2e^{\frac{2}{3}\pi i}-C_3\right)^2}=\frac{h_0}{\tau_0^2}\tau^2. \tag{32}$$

Далее, подставляя выражение (27) в равенство (17), получаем

$$\rho=-\frac{24a}{\pi\sqrt{-h}}\left[C_1e^{\frac{1}{3}\pi i}\cos^2\left(z+\frac{\pi}{12}\right)-C_2e^{\frac{2}{3}\pi i}\cos^2\left(z+\frac{5\pi}{12}\right)-\right.$$
$$\left.-C_3\cos\left(z+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(z+\frac{5\pi}{12}\right)\right]. \tag{33}$$

Возвращаясь теперь на основе соотношений (9), (18), (32) и (33) к исходным переменным, находим

$$r = -\frac{24\alpha r_0}{t_0^{1/3}\pi\sqrt{-h_0}}\left[C_1 e^{\frac{1}{3}\pi i}\cos^2\left(Bt+\frac{\pi}{12}\right) - C_2 e^{\frac{2}{3}\pi i}\cos^2\left(Bt+\frac{5\pi}{12}\right) - \right.$$
$$\left. - C_3\cos\left(Bt+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(Bt+\frac{5\pi}{12}\right)\right], \tag{34}$$

где введено обозначение

$$B = \frac{ih_0^{3/2}}{6\alpha t_0}. \tag{35}$$

Таким образом, в рамках условий (21) и (22) определяемая формулами (9)—(19) величина r является периодической функцией времени. Как и следовало ожидать, в пределе при $t_0 \to \infty$ период T функции (34) стремится к классическому выражению:

$$\lim_{t_0\to\infty} T = \lim_{t_0\to\infty}\left(-\frac{\pi}{B}\right) = \frac{2\pi r_0^{3/2}}{\sqrt{GM}}. \tag{36}$$

Нетрудно усмотреть, что отмеченное выше частное свойство аппроксимирующих соотношений (9)—(19) может быть распространено и на случай движения, принадлежащего в эпоху t_0 эллиптическому типу

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_0^2 - \frac{2GM}{r_0} < 0, \quad \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_0^2 = GM\left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a_0}\right), \quad r_0 = \frac{a_0(1-e_0^2)}{1+e_0\cos\varphi_0}, \tag{37}$$

если при этом имеют место следующие соотношения:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_0 = \sqrt{\frac{GM}{a_0(1-e_0^2)}}\, e_0\sin\varphi_0 = 0, \qquad \frac{2\pi a_0^{3/2}}{\sqrt{GM_0}} \ll t_0. \tag{38}$$

В самом деле, в силу формул (14), (23), (37) и (38), имеем

$$-ih^{3/2}/6\alpha \gg 1, \tag{39}$$

так что, следуя и здесь асимптотическим представлениям (26)—(30), получим соотношение вида (34) с новой системой постоянных. Этот результат может быть интерпретирован как отсутствие векового эффекта в возмущении оскулирующего эксцентриситета [12]

$$e = \sqrt{1+\frac{k^2}{G^2M^2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{k^2}{r^2} - \frac{2GM}{r}\right]}, \tag{40}$$

соответствующего динамической системе (6) с начальными условиями (37) и (38) при учете ее интеграла кинетического момента

$$[\vec{r} \times d\vec{r}/dt] = \overrightarrow{\text{const}} = \vec{k}, \tag{41}$$

т. е. если в относительном движении двух тел по орбите эллиптического типа оскулирующий период обращения в эпоху t_0 (один из моментов прохождения через перицентр) намного меньше значения самого времени t_0, отсчитываемого от момента сингулярности ($\delta = \infty$), то с точки зрения принятой аппроксимации гравитационное влияние нейтринного моря может сводиться к систематическому возмущению только положения перицентра.

Нетрудно продолжить аналогичный анализ общих аппроксимирующих соотношений (9)—(19) применительно и к другим частным условиям для динамической системы (6).

Астрофизический институт
АН Каз. ССР

ON THE DYNAMICS OF GRAVITATING SYSTEMS AGAINST THE NEUTRINO BACKGROUND OF THE UNIVERSE

T. B. OMAROV

The gravitational influence of a homogeneous neutrino sea of a expanding Universe is considered in the dynamics of a pair of quasi-pointed bodies against its background. On the basis of „close“ integrable problem correlations describing common properties and the character of behaviour of the system under consideration are proposed. Specifically it is shown that if in a relative motion of two bodies along the orbit of elliptical type the osculating period of circulation in epoch t_0 (a moment of the passages through the pericenter) is considerably less than the value of moment t_0 itself counted off from the singularity moment (density of a substratum of background becomes infinite), the influence of neutrino sea can be reduced to the systematic perturbation of only the position of the pericenter.

ЛИТЕРАТУРА

1. *L. Fodor, Z. Kövesy, G. Marx*, Acta Phys. Hung., 17, 171, 1964.
2. *G. Marx*, Acta Phys. Hung., 22, 59, 1967.
3. *Б. М. Понтекорво, Я. А. Смородинский*, ЖЭТФ, 41, 239, 1961.

4. *S. Weinberg*, Nuovo Cimento, 25, 15, 1962.
5. *S. Weinberg*, Phys. Rev., 128, 1457, 1962.
6. *W. Mc. Crea, E. Milne*, Quart. J. Math., 5, 73, 1934.
7. *Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков*, Релятивистская астрофизика, Наука, М., 1967.
8. *В. В. Радзиевский*, Астрон. ж., 31, 436, 1954.
9. *A. Einstein, W. de Sitter*, Proc. Nat. Acad. Sci., 18, 213, 1932; *А. Эйнштейн*, Собрание научных трудов, 2, 396, Наука, М., 1966.
10. *Б. Е. Гельфгат*, Бюлл. ин-та теор. астр., 7, 354, 1959.
11. *Г. Ватсон*, Теория бесселевых функций, т. I, ИЛ., М., 1949.
12. *Г. Н. Дубошин*, Небесная механика, Наука, М., 1968.