АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 8 МАЙ, 1972 ВЫПУСК 2

ФАЗОВОЕ РАЗМЕШИВАНИЕ ВТОРОГО РОДА В ЗВЕЗДНЫХ СИСТЕМАХ. II

Л. П. ОСИПКОВ

Поступила 16 декабря 1970

Размешивание второго рода исследуется для случая, когда фазовое пространство системы представимо в виде набора вложенных друг в друга торов. Геометрические соображения позволяют оценить характерное время размешивания второго рода. Оказывается, что для звезд в сферических системах, движущихся по сильно вытянутым орбитам с большой энергией, размешивание происходит за время порядка $(L^3/8GM)^{1/2}$, где L—характерный размер системы, M—ее масса. Для систем, допускающих интеграл Линдблада-Оорта, вертикальное размешивание не происходит.

1. *Характерное время размешивания второго рода.* В предыдущей работе [7] было введено представление о фазовом размешивании второго рода в звездных системах, вызванном тем, что средняя скорость движения на каждой изолирующей инвариантной поверхности неодинакова для разных поверхностей. В данной работе делается попытка количественно оценить характерное время такого размешивания.

Сделаем следующие предположения.

I. Фазовое пространство представимо в виде объединения непересекающихся связных изолирующих интегральных поверхностей, каждая из которых образует одно эргодическое множество. Тем самым исключаются (ради простоты рассуждений) случаи, названные Контопулосом [9] „квази-изолирующими".

II. Каждая такая поверхность изоморфна 2-мерному тору в 3-мерном эвклидовом пространстве. Тогда при соответствующем выборе координат ее уравнение записывается в виде

$$\begin{aligned} x^1 &= (\tilde{s} + s\cos\psi)\cos\varphi \\ x^2 &= (\tilde{s} + s\cos\psi)\sin\varphi \\ x^3 &= s\sin\psi \end{aligned} \tag{1}$$

III. Размешивание первого рода отсутствует, точнее $\dot{\varphi} = \lambda_\varphi(s)$, $\dot{\psi} = \lambda_\psi(s)$, где частоты обращения λ_φ, λ_ψ не зависят от координат (φ, ψ) точки на поверхности тора.

Вследствие размешивания те секущие набора торовых поверхностей, которые первоначально были прямыми $\psi=\text{const}$ (или $\varphi=\text{const}$), будут со временем закручиваться. Рассмотрим два сколь угодно близких тора радиусов s_1 и $s_2 = s_1 + \Delta s$. С точностью до величин порядка $0(\Delta s)$ можно считать, что первоначальная прямая $\psi = \text{const}$ останется в окрестности этих торов прямой, но повернется за время t на угол $\alpha(s_1, t)$. Зная функцию $\alpha(s_1, t)$, можно в принципе найти и $t(\alpha, s_1)$ — тот промежуток времени, за который прямая в окрестности данного тора повернется на заданный угол α. Эту величину и можно принять для оценки скорости размешивания второго рода.

Рассмотрим движущуюся точку $M_1(t)$ на первой поверхности с координатами $\varphi^1(t) = \lambda^1_\varphi \cdot t$, $\psi^1(t) = \lambda^1_\psi \cdot t$, где $\lambda^1_\varphi = \lambda_\varphi(s_1)$, $\lambda^1_\psi = \lambda_\psi(s_1)$, а начальные условия выбраны так, что при $t=0$ $\varphi_1 = 0$, $\psi_1 = 0$. Точно так же для точки $M_2(t)$ на второй поверхности

$$\varphi^2(t) = \lambda^2_\varphi \cdot t = \varphi^1(t) + \left(\frac{d\lambda_\varphi}{ds}\right)^1 \cdot t \cdot \Delta s + 0(\Delta s),$$

$$\psi^2(t) = \lambda^2_\psi \cdot t = \psi^2(t) + \left(\frac{d\lambda_\psi}{ds}\right)^1 \cdot t \cdot \Delta s + 0(\Delta s).$$

Подставляя эти величины в уравнение поверхности (1) при $s = s_1$ и $s = s_1 + \Delta s$, получим декартовы координаты точек $M_1(t)$ и $M_2(t)$. Рассмотрим еще третью точку $M_3(t) = (\tilde{s}\cos\varphi^1(t),\ \tilde{s}\sin\varphi^1(t),\ 0)$. Очевидно, что $\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = |\overrightarrow{M_1M_2}| \cdot |\overrightarrow{M_1M_3}| \cdot \cos\alpha(s_1, t)$, а тогда после элементарных преобразований получается что

$$\operatorname{tg}^2\alpha(s_1, t) = t^2 \cdot \left\{ s_1^2 \left[\left(\frac{d\lambda_\psi}{ds}\right)^1\right]^2 + (s_1\cos\psi^1(t) + \tilde{s}) \left[\left(\frac{d\lambda_\varphi}{ds}\right)^1\right]^2 + 0(\Delta s)\right\}.$$

Таким образом, для определения $t(\alpha, s_1)$ получается трансцендентное уравнение. Для характеристики размешивания можно использовать верхнюю границу этой величины. Обозначая $\operatorname{tg}^2\alpha = D^2$, мы можем считать, что размешивание до заданной степени происходит за время

$$T_m = D\cdot\left[s^2\cdot\left(\frac{d\lambda_\psi}{ds}\right)^2 + (\tilde{s}-s)^2\cdot\left(\frac{d\lambda_\varphi}{ds}\right)^2\right]^{-1/2}. \tag{2}$$

При использовании (2) можно положить D порядка нескольких единиц. Введем отношение частот обращения $\gamma(s) = \frac{\lambda_\varphi(s)}{\lambda_\psi(s)}$ и перейдем от s к новой независимой переменной $J = \pi s^2$, тогда (2) перепишется в виде

$$T_m^2 = \frac{D^2}{K} \tag{2'}$$

$$K = 4J\,[s^2 + \gamma^2(\tilde{s}-s)^2]\cdot\left(\frac{d\lambda_\psi}{dJ}\right)^2 +$$

$$+\left[2\gamma\lambda_\psi\left(\frac{d\gamma}{dJ}\right)\left(\frac{d\lambda_\psi}{dJ}\right) + \lambda_\psi^2\left(\frac{d\gamma}{dJ}\right)^2\right](\tilde{s}-s)^2.$$

Если на самом деле $\dot\varphi$, $\dot\psi$ зависят от (φ, ψ) и на торовой поверхности происходит размешивание первого рода, то можно думать, что если $T_m > T = \min\left(\frac{2\pi}{\lambda_\varphi}, \frac{2\pi}{\lambda_\psi}\right)$ (λ_φ, λ_ψ теперь — средние значения $\dot\varphi$, $\dot\psi$), то фактическое время полного перемешивания $T_0 \in [T, T_m]$, если же $T_m < T$, то могут быть случаи, когда $T_0 > T_m$.

2. *Фазовое пространство сферических звездных систем.* Применим (2) к простейшим звездным системам, в первую очередь к сферическим системам. Пусть r — расстояние от центра системы до звезды, R, T — радиальная и поперечная компоненты скорости, $U(r)$ — потенциал. Интегралы энергии и кинетического момента записываются в виде [6]

$$R^2 + \frac{h^2}{r^2} - 2U(r) = 2E, \quad rT = h.$$

Фиксируем вектор полного кинетического момента и, вводя полярные координаты в плоскости орбиты (r, φ), рассмотрим вслед за Линден-Беллом [12] (R, r, φ) как цилиндрические координаты точки в 3-мерном фазовом пространстве. Как известно, интеграл энергии определяет в этом пространстве поверхность вращения, изоморфную тору, а в плоскости (R, r) каждому E соответствует своя замкнутая (для ограниченных орбит) кривая [6, 8].

Для исследования размешивания удобно перейти от (r, R) к канонически сопряженным переменным типа „угол—действие" (см. например, [4]) (ψ, J). Положим

$$J(E)=\frac{1}{2\pi}\oint R(r,E)\,dr=\frac{1}{\pi}\int\limits_{r_1}^{r_2}\sqrt{2E+2U(r)-\frac{h^2}{r^2}}\,dr,$$
$$\psi(r,E)=\frac{2\pi}{T_\psi(E)}\int\limits_{r_1}^{r}\frac{dr}{R(r,E)},\tag{3}$$

где r_1 — меньший, а r_2 — больший корни уравнения

$$\frac{h^2}{r^2}-2U(r)-2E=0$$

(т. е. перицентр и апоцентр [4, 6]),

$$T_\psi(E)=2\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{\sqrt{2E+2U(r)-h^2/r^2}}\tag{4}$$

— период колебаний звезды в плоскости (R, r), $J(E)$ — площадь, заключенная внутри кривой в плоскости (R, r), соответствующей данному E.

Рассмотрим (φ, ψ) в качестве угловых координат точки на поверхности изоэнергетического тора. Уравнения движения по этой поверхности

$$\dot\varphi=\frac{h}{r^2(E,\psi)},\qquad \dot\psi=\frac{2\pi}{T_\psi(E)},$$

откуда получаем уравнение фазовой траектории $(d\varphi/d\psi)=h/r^2(T_\psi(E)/2\pi)$ и пятый интеграл движения

$$\varphi_0=\varphi-h\int\limits_{r_1}^{r}\frac{dr}{r^2\sqrt{2E+2U(r)-h^2/r^2}},$$

который, как строго доказал Линден-Белл [12], не является изолирующим. С помощью теоремы Лиувилля можно найти, что инвариантный элемент торовой поверхности $dm(\varphi,\psi)=(1/h)\,d\varphi d\psi$, тогда мера всего тора $M=4\pi^2/h$. Найдем средние частоты обращений по φ, ψ, определяемые соотношениями $\lambda_\varphi=\int\dot\varphi\,dm/M$, $\lambda_\psi=\int\dot\psi\,dm/M$. В силу уравнений движения

$$\lambda_\psi=\frac{2\pi}{T_\psi(E)},\qquad \lambda_\varphi=\frac{2h}{T_\psi(E)}\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{(1/r^2)\,dr}{\sqrt{2E+2U(r)-h^2/r^2}}.$$

Отношение частот колебаний

$$\gamma = \frac{\lambda_\varphi}{\lambda_\psi} = \frac{h}{\pi} \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{(1/r^2)\, dr}{\sqrt{2E + 2U(r) - h^2/r^2}}. \qquad (5)$$

Как доказал Контопулос [8], $\gamma \in [1/2, 1]$, причем $\gamma = 1$ соответствует случаю, когда масса системы сосредоточена в центре, а $\gamma = 1/2$ — однородной сфере. (5) можно получить и более непосредственным путем [4, 8].

Итак, фазовое пространство сферических звездных систем (при фиксированном интеграле кинетического момента) удалось представить в виде набора торов, уравнения которых можно записать в виде (1), где $s^2 = (1/\pi)\, J(E)$, а $\tilde{s}$ можно положить равным $s\,(r_2+r_1)/(r_2-r_1)$. Тогда $s/\tilde{s}$ будет характеризовать эксцентриситет орбит, являющийся адиабатическим инвариантом [13].

3. *Размешивание в сферических системах.* Используя (3)—(5), можно вычислить T_m. В силу (4) для любой функции $f(E)$

$$\frac{df}{dJ} = \frac{2\pi}{T_\psi(E)} \frac{df}{dE}.$$

Тогда (2′) можно переписать в виде

$$T_m^2 = \frac{D^2 T_\psi^2}{K}, \qquad (6)$$

$$K = 16\pi^2 J^2 \left\{ \left[1 + 4\gamma^2 \frac{r_1^2}{(r_2-r_1)^2} \right] \left(\frac{d\lambda_\psi}{dE} \right)^2 + 4\lambda_\psi \frac{r_1^2}{(r_2-r_1)^2} \left(\frac{d\gamma}{dE} \right) \times \right.$$
$$\left. \times \left[2\gamma \left(\frac{d\lambda_\psi}{dE} \right) + \lambda_\psi \left(\frac{d\gamma}{dE} \right) \right] \right\}.$$

Таким образом, T_m — функционал потенциала $U(r)$ и функция интегралов E, h. Для конкретной оценки необходимо при заданном потенциале вычислить $T_\psi\,(E, h)$, $J\,(E, h)$, $\gamma\,(E, h)$ по формулам (3)—(5). В некоторых случаях эти функции удается выразить через элементарные (изохронная модель Энона [10]) или свести к эллиптическим интегралам (сферическая модель с потенциалом Паренаго (см. [6]) и другие).

Здесь же ограничимся качественным анализом простейших случаев. Ясно, что когда и $\lambda_\psi\,(d\gamma/dE)$, и $(d\lambda_\psi/dE)$ малы, то размешивание будет происходить медленно, а когда велики, то быстро. Пусть

$(r_2 - r_1) \ll r_1$ (орбиты мало вытянуты) и $d\gamma/dE \simeq 0$, тогда при $D = 2\pi\gamma$ получим, что

$$T_m \simeq \frac{(r_2 - r_1)^2}{r_1 R(E, h, \tilde{r})},$$

где $\tilde{r} \in [r_1, r_2]$, или, так как орбиты мало отличаются от круговых, можно считать, что $T_m / T_\psi \simeq (r_2 - r_1)/r_1 \ll 1$.

Теперь рассмотрим случай сильно вытянутых орбит. Для самых грубых оценок можно положить $r_1/(r_2 - r_1) \simeq 0$, $r_2 \simeq L$, где L — характерный размер системы, тогда

$$T_\psi \simeq \frac{2L}{(2E + 2U(L_1) - h^2/L_1^2)^{1/2}}, \quad L_1 < L,$$

причем будем считать, что $\dfrac{h^2}{L_1^2 U(L_1)} \simeq 0$, а $U(L_1) \simeq U(L) \simeq \dfrac{GM}{L}$, где M по порядку величины совпадает с массой системы, так что $T_\psi \simeq 2\left(\dfrac{L^3}{2EL + GM}\right)^{1/2}$. Оценивая аналогичным образом J, λ_ψ, получим

$$T_m^2 = \frac{D^2}{8\pi^2} \frac{L^3}{EL + GM}.$$

Отсюда видно, что чем меньше L и больше M, то есть чем более масса системы сосредоточена в центре, тем быстрее происходит размешивание второго рода. Так как $E < 0$, то, отбрасывая член EL, мы получим нижнюю границу T_m, равномерную для всей системы и фактически мало отличающуюся от действительного значения (так как для звезд с $r_2 \simeq L$ E велико):

$$T_m \simeq \frac{D}{\sqrt{8}\,\pi} \sqrt{\frac{L^3}{GM}}. \tag{7}$$

При $D = 8\pi \simeq 25$ T_m совпадает с рассмотренным Г. М. Идлисом [1] „временем однократного перемешивания". Такая величина может быть получена разными способами [1, 6, 11, 14] и, вероятно, действительно характеризует темп действия регулярных сил [6]. Но в упомянутых выше работах речь идет, как правило, о достижении системой состояния, стационарного в регулярном поле, то есть (по терминологии, введенной в [7]) о сильном размешивании первого рода. При исследовании же размешивания второго рода можно положить D на порядок меньше, например, взять $D = \pi$, тогда

$$T_m \simeq \sqrt{\frac{L^3}{8GM}}. \tag{7'}$$

Тогда для шаровых скоплений T_m порядка 10^6 лет, если же (с известными оговорками) применить (7′) к Галактике, то $T_m \simeq 10^7$ лет, то есть размешивание второго рода происходит практически мгновенно и, вероятно, быстрее, чем размешивание первого рода.

4. *Размешивание в сплющенных звездных системах.* Здесь мы рассмотрим системы, у которых потенциал имеет вид $U(\rho, z) = U_1(\rho) + U_2(z) + o(z^2)$. Пусть (ρ, ϑ, z) — цилиндрические координаты звезды, а (P, Θ, Z) — соответствующие проекции скорости. В силу аддитивной формы потенциала можно использовать следующие три интеграла (см., например, [5, 6]):

$$\rho\Theta = h, \quad P^2 + \frac{h^2}{\rho^2} - 2U_1(\rho) = 2E,$$

$$Z^2 - 2U_2(z) = 2K.$$

Рассмотрим экваториальную плоскость системы и 3-мерное пространство (ρ, ϑ, P). Фиксируем значения K, h, тогда каждому E соответствует свой инвариантный тор*. Заменой $r \to \rho$, $\varphi \to \vartheta$, $R \to P$ бо́льшая часть результатов разделов 2 и 3 переносится на данный случай. В частности, неизолирующий интеграл, зависящий от ϑ, будет

$$\vartheta_0 = \vartheta - h\int_{\rho_1}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{2E + 2U_1(\rho) - h^2/\rho^2}}.$$

Если $U_2(z) = -\frac{1}{2}C^2z^2$ (C — параметр Кузмина), то пятый, также неизолирущий интеграл

$$J_5 = \frac{1}{C}\arcsin\left(\frac{C}{\sqrt{2K}}z\right) - \int_{\rho_1}^{\rho}\frac{d\rho}{P(E, \rho)} = \frac{z}{\sqrt{2K}} + \int_{\rho_1}^{\rho}\frac{d\rho}{P(E, \rho)} + 0(z^2),$$

тогда инвариантная мера на торе

$$dm(\vartheta, \psi) = \frac{(1 + 0(z))\, d\vartheta d\psi}{\sqrt{2K(2K + 2U_2(z))}} = \frac{1}{2K}(1 + 0(z))\, d\vartheta b\psi,$$

* Здесь предполагается, что огибающая на диаграмме Линдблада не имеет точек возврата [5].

а мера всего тора $M = (2\pi^2/K) + 0(z)$. Все дальнейшие рассуждения проводятся так же, как и для сферических систем.

Теперь зафиксируем h, E и рассмотрим 4-мерное сопутствующее фазовое пространство (ρ, P, z, Z). Вместо каждой пары (ρ, P), (z, Z) введем канонические „действия" и „углы":

$$J_\rho = \frac{1}{\pi}\int_{\rho_1}^{\rho_2} P(E, \rho)\, d\rho, \qquad \psi_\rho = \frac{2\pi}{T_\rho}\int_{\rho_1}^{\rho} \frac{d\rho}{P(E, \rho)},$$

$$J_z = \frac{1}{\pi}\int_{z_1}^{z_2} Z(K, z)\, dz, \qquad \psi_z = \frac{2\pi}{T_z}\int_{z_1}^{z} \frac{dz}{Z(K, z)},$$

где $\rho_{1,2}$ — корни уравнения $P(E, \rho) = 0$, а $z_1 = -z_2$ — уравнения $Z(K, z) = 0$, $T_\rho = 2\pi dJ_\rho/dE$, $T_z = 2\pi dJ_z/dK$. Положив $\tilde{s} = (\pi^{-1}J_\rho(E))^{1/2}$, $\bar{s} = (\pi^{-1}J_z(K))^{1/2}$, мы придем к соответствующему каждому K своему инвариантному тору (1). Так как $dT_\rho/ds = 0$, то (2) упрощается, и аналогично (6) получаем

$$T_m = \frac{DT_z^2}{4\pi J_z}\left(\frac{d\lambda_z}{dK}\right)^{-1}.$$

Если $U_2 = -\frac{1}{2}C^2z^2$, то $\lambda_z = C^{-1} = \mathrm{const}$, то есть оказывается, что для самых сплющенных подсистем Галактики размешивание в указанном смысле отсутствует. Этот вывод связан исключительно с квадратичной формой потенциала и не относится к менее сплющенным подсистемам, для которых в качестве квази-интеграла можно использовать, например, первые члены ряда Контопулоса.

Случай квадратичного интеграла, изученного Г. Г. Кузминым [2], можно исследовать аналогичным образом, так как и тогда переменные разделяются [4, 15].

5. *Заключение.* Фазовое пространство звездных систем не сводится только к разобранным выше случаям. Даже для сферических систем осталось неисследованным размешивание на поверхностях разных h, но одного E.

Для вращающихся систем главная трудность — это неясность в проблеме третьего интеграла. Если будет строго доказано существование „квазиизолирующих" интегралов [9], точнее, эргодических прослоек в фазовом пространстве, то в них разница между размешиваниями первого и второго рода сотрется. Само образование таких прослоек, вероятно, является следствием разрушения инвариантных поверхностей при возмущении потенциала, причем наличие или отсутствие размешивания второго рода должно иметь важное значение для этих процессов.

Существование спектра „дисперсионных" орбит [5] и медленное затухание вблизи последних колебаний фазовой плотности [3], вероятно, указывает на то, что для плоских подсистем хотя размешивание первого рода и не происходит, но будет весьма своеобразное размешивание второго рода, приводящее к образованию „дисперсионных" колец в обычном пространстве.

Для мало вытянутых орбит вблизи центра системы, вероятно, размешивание второго рода очень слабо. Согласно разделам 3 и 4, величина T_m для разных подсистем Галактики существенно различна. Поэтому в следующей части работы будут даны более детальные вычисления T_m для различных инвариантных поверхностей.

Заметим, наконец, что в разделах 3 и 4 ведущую роль играет величина $J(E)$, являющаяся, как и $\bar{s}/s$, адиабатическим инвариантом [4] и „сохраняющаяся вечно" при $d\nu_{\psi}/dJ \neq 0$. Поэтому предложенная теория в первом приближении применима и к медленно меняющимся системам.

Ленинградский государственный
университет

THE PHASE MIXING OF THE SECOND KIND IN STELLAR SYSTEMS. II

L. P. OSSIPKOV

The phase-mixing of the second kind is studied for the case when the phase-space is represented as the set of tori enclosed into each other. The characteristic time of the mixing is estimated on the basis of geometric considerations. In case of spherical systems it is found to be of the order of $(L/8GM)^{1/2}$ for stars of high energy whose orbits are rather elongated (L — characteristic size of the system, M-its mass). For systems admitting the Lindblad-Oort third integral the mixing is absent.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. М. Идлис*, ДАН СССР, 122, 997, 1958; Труды Астрофиз. ин-та АН КазССР, 1, 9, 1961.
2. *Г. Г. Кузмин*, Публ. Тартуской АО, 32, 332, 1953.
3. *Г. Г. Кузмин*, Сообщ. Тартуской АО, № 6, 19, 1963.
4. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Механика, изд. 2, Наука, М., 1965.
5. *Б. Линдблад*, Сб. „Строение звездных систем“, ИЛ, М., 1962, стр. 39.
6. *К. Ф. Огородников*, Динамика звездных систем, ГИФМЛ, М., 1958.
7. *Л. П. Осипков*, Астрофизика, 8, 139, 1972; Астрон. цирк., № 623, 1, 1971.
8. *G. Contopoulos*, Z. Astrophys., 35, 67, 1954.
9. *G. Contopoulos*, Ap. J., 138, 1297, 1963.
10. *M. Hénon*, Ann. Astrophys., 22, 126; 491, 1959.
11. *M. Hénon*, Ann. Astrophys., 26, 62, 1965.
12. *D. Lynden-Bell*, M. N., 127, 1, 1962.
13. *D. Lynden-Bell*, Observatory, No 932, 23, 1963.
14. *D. Lynden-Bell*, M. N., 136, 101, 1967.
15. *A. Ollongren*, BAN, 16, 241, 1962.