

О ДИФфуЗИИ ИЗЛУЧЕНИЯ В ЗВЕЗДНОЙ ОБОЛОЧКЕ,
РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ

В. В. ВИТЯЗЕВ

Поступила 1 октября 1971

В одномерном приближении рассматривается задача о диффузии излучения в двух слоях, движущихся относительно друг друга с постоянной скоростью. Предполагается, что в элементарном объеме происходит полное перераспределение излучения по частотам. Для случая конечных слоев численным методом получены функции источников, интенсивности выходящего излучения и сила светового давления при доплеровском профиле коэффициента поглощения. В случае полубесконечных слоев выведены уравнения для интенсивности выходящего излучения и точная формула для функции источников.

1. *Введение.* Диффузии резонансного излучения в оболочках новых звезд и планетарных туманностях посвящены многочисленные исследования. Изучение диффузии L_{α} -излучения в планетарных туманностях начал В. А. Амбарцумян [1]. Сделав предположение о неизменности частоты диффундирующих фотонов в неподвижной или расширяющейся с большой скоростью туманности, он пришел к заключению о значительной роли L_{α} -излучения в динамике туманностей. В частности, из его результатов следовало, что световое давление, вызванное диффузией L_{α} -излучения, должно привести к дифференциальному движению слоев туманности. Определение поля излучения в туманности, расширяющейся с градиентом скорости, делали многие авторы, однако этого вопроса мы здесь касаться не будем.

При предположении о полном перераспределении излучения по частотам диффузию L_{α} -излучения в неподвижной туманности рассмотрел Занстра [2]. Для коэффициента поглощения он принял доплеровский профиль. Полученное им интегральное уравнение было численно решено Кулблудом [3]. В этих статьях для силы светового дав-

ления было получено гораздо меньшее значение, чем в случае диффузии излучения без изменения частоты.

При рассмотрении диффузии излучения в планетарных туманностях обычно применяют модель тонкой сферической оболочки. В указанных работах считалось, что скорость расширения оболочки либо равна нулю, либо очень велика (много больше тепловой скорости атомов). Эти две задачи являются предельными случаями более общей задачи о диффузии излучения в оболочке, расширяющейся с произвольной скоростью. При прямоугольном профиле коэффициента поглощения решение такой задачи для полубесконечной среды дано В. В. Соболевым. Оно вытекает как частный случай из решения задачи о диффузии излучения в среде с отражающей поверхностью [4].

Некоторое отношение к рассматриваемому вопросу имеет работа Куландера [5]. Для доплеровского профиля коэффициента поглощения и при предположении о полном перераспределении излучения по частотам он в приближении Эддингтона решил численно задачу об образовании линий излучения в среде, состоящей из полубесконечного слоя и движущегося относительно него слоя конечной оптической толщины.

В настоящей статье решается задача о нахождении характеристик поля излучения в оболочке, расширяющейся с постоянной скоростью при произвольном профиле коэффициента поглощения и при предположении о полном перераспределении излучения по частотам. В такой постановке она обобщает на случай произвольных оптических толщин оболочки и произвольного профиля коэффициента поглощения задачу, рассмотренную В. В. Соболевым [4]. Решение получено в одномерном приближении, т. е. в качестве среды взяты два отрезка, разлетающиеся с произвольной скоростью. Полученные уравнения можно применять не только к диффузии L_2 -излучения в расширяющихся туманностях и звездных оболочках. Их можно также использовать для рассмотрения диффузии излучения в других линиях и в других объектах (например, в двух газовых облаках, движущихся относительно друг друга).

2. Основное уравнение. Рассмотрим два отрезка, движущихся относительно друг друга с постоянной скоростью V . Считаем, что в них происходит диффузия излучения в спектральной линии с полным перераспределением по частотам при элементарном акте рассеяния, причем вероятность выживания фотона λ есть постоянная величина. Профиль коэффициента поглощения обозначим через $a(x)$, где x — безразмерная частота, выраженная в единицах доплеровской полуши-

рины линии. Введем оптическую глубину τ и оптическую толщину τ_0 каждого отрезка. Обе эти величины соответствуют центральному значению коэффициента поглощения. Условимся считать, что границы отрезков $\tau = 0$ обращены друг к другу. Пусть $\varepsilon(\tau, x) d\tau dx$ — количество энергии, излучаемое между оптическими глубинами τ и $\tau + d\tau$ в интервале безразмерных частот от x до $x + dx$ в одном направлении в единицу времени. При предположении о полном перераспределении излучения по частотам величина $\varepsilon(\tau, x)$ представима в виде

$$\varepsilon(\tau, x) = \alpha(x) B(\tau), \quad (1)$$

где $B(\tau)$ — функция источников.

Обозначим через $I_1(\tau, x)$ и $I_2(\tau, x)$ интенсивности излучения, идущего на глубине τ в частоте x соответственно в сторону возрастания и убывания оптических глубин. Для этих величин имеем

$$I_1(\tau, x) = I_2(0, x + v) e^{-\alpha(x)\tau} + \int_0^{\tau} B(t) e^{-\alpha(x)(\tau-t)} \alpha(x) dt, \quad (2)$$

$$I_2(\tau, x) = \int_0^{\tau} B(t) e^{-\alpha(x)(t-\tau)} \alpha(x) dt. \quad (3)$$

Здесь считается, что на границы $\tau = \tau_0$ излучение извне не падает. Первое слагаемое в выражении (2) учитывает смещенное по частоте излучение, приходящее на границу $\tau = 0$ одного отрезка с границы $\tau = 0$ другого отрезка. При этом $v = V/u$, где u — средняя тепловая скорость атома. Определяя $I_2(0, x + v)$ из (3), находим

$$I_1(\tau, x) = \alpha(x + v) \int_0^{\tau_0} B(t) e^{-\alpha(x)\tau - \alpha(x+v)t} dt + \alpha(x) \int_0^{\tau} B(t) e^{-\alpha(x)(\tau-t)} dt. \quad (4)$$

При сделанных выше предположениях для функции источников имеем

$$B(\tau) = A \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [I_1(\tau, x) + I_2(\tau, x)] \alpha(x) dx + g(\tau). \quad (5)$$

Здесь $A = 1 / \int_{-\infty}^{+\infty} a(x) dx$, $g(\tau)$ — произвольная функция, задающая

распределение источников в среде.

Подстановка (3) и (4) в выражение (5) дает основное интегральное уравнение задачи:

$$B(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau} B(t) [K(|\tau - t|) + K_1(\tau, t)] dt + g(\tau), \quad (6)$$

где

$$K(\tau) = A \int_{-\infty}^{+\infty} a^2(x) e^{-a(x)\tau} dx, \quad (7)$$

$$K_1(\tau, t) = A \int_{-\infty}^{+\infty} a(x) a(x+v) e^{-a(x)\tau - a(x+v)t} dx. \quad (8)$$

При $v = \infty$ имеем $K_1(\tau, t) = 0$. В этом случае уравнение (6) было изучено и решено В. В. Соболевым [6].

3. *Определение функции источников.* Для численного решения поставленной задачи применим метод разбиения отрезка на n слоев [7]. Будем считать функцию источников постоянной внутри каждого слоя и равной среднему арифметическому ее значений на границах слоя. Все приводимые ниже результаты получены указанным способом при $n = 20$. Расчеты производились для доплеровского профиля коэффициента поглощения, $\tau_0 = 5$ и $\tau_0 = 10$, $\lambda = 1$, $g(\tau) = 1$.

В табл. 1 и 2 даны значения функции источников в зависимости от оптической глубины при различных v . Для конечных v характерно отсутствие симметрии функции $B(\tau)$ относительно середины отрезка $\tau = \tau_0/2$, что объясняется падением на границу $\tau = 0$ излучения второго отрезка. При $v = \infty$ это излучение в первом отрезке не поглощается. В этом случае функция $B(\tau)$ обладает указанной симметрией. Как видно из табл. 1 и 2, при доплеровском профиле коэффициента поглощения такая ситуация осуществляется уже при $v = 4$. Значения $B(\tau)$ для $v \geq 4$ и $\tau_0 = 10$ совпадают с найденными ранее [6].

4. *Интенсивности выходящего излучения.* Знание функции источников позволяет определить интенсивности излучения на любой опти-

Таблица 1

ФУНКЦИЯ В (τ) ПРИ $\tau_0=5$

$\tau \backslash v$	0	0.8	1.6	2.4	3.2	4.0
0	7.14	5.72	3.81	2.78	2.46	2.41
0.5	7.11	5.84	4.18	3.26	2.88	2.87
1.0	7.01	5.88	4.43	3.60	3.23	3.21
1.5	6.85	5.84	4.58	3.83	3.47	3.45
2.0	6.62	5.73	4.62	3.96	3.61	3.59
2.5	6.32	5.53	4.57	3.99	3.66	3.64
3.0	5.92	5.25	4.43	3.92	3.61	3.59
3.5	5.46	4.89	4.18	3.74	3.47	3.45
4.0	4.89	4.42	3.84	3.47	3.23	3.21
4.5	4.22	3.84	3.38	3.09	2.88	2.87
5.0	3.43	3.15	2.81	2.58	2.42	2.41

ческой глубине. Мы найдем интенсивности излучения, выходящего из отрезка. Полагая в (3) и (4) $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$, для этих величин получаем

Таблица 2

ФУНКЦИЯ В (τ) ПРИ $\tau_0 = 10$

$\tau \backslash v$	0	0.8	1.6	2.4	3.2	4.0
0	15.2	11.5	7.11	4.61	3.63	3.44
1	15.1	11.8	8.17	6.14	5.14	4.89
2	14.9	11.9	8.85	7.16	6.19	5.92
3	14.5	11.9	9.24	7.81	6.89	6.60
4	13.9	11.6	9.34	8.13	7.29	7.00
5	13.1	11.1	9.20	8.16	7.41	7.13
6	12.1	10.4	8.80	7.92	7.26	7.00
7	10.9	9.49	8.12	7.40	6.84	6.60
8	9.32	8.24	7.15	6.57	6.11	5.91
9	7.42	6.63	5.82	5.39	5.05	4.89
10	5.02	4.53	4.03	3.76	3.54	3.43

$$I_1(\tau_0, x) = e^{-\alpha(x)\tau_0} \int_0^{\tau_0} B(t) [\bar{\alpha}(x) e^{\alpha(x)t} + \alpha(x+v) e^{-\alpha(x+v)t}] dt, \quad (9)$$

$$I_2(0, x) = \alpha(x) \int_0^{\tau_0} B(t) e^{-\alpha(x)t} dt. \quad (10)$$

На рис. 1 и 2 показаны контуры выходящего из отрезка излучения для $\tau_0 = 10$. При больших скоростях контур линии излучения, выходящего через границу $\tau = \tau_0$, должен состоять из двух контуров — смещенного на величину v и симметричного относительно центральной частоты. На рис. 1 такой вид имеет контур, соответствующий $v = 4$. При меньших скоростях смещенный и симметричный контуры накладываются друг на друга, из-за чего результирующий контур имеет несимметричную форму.

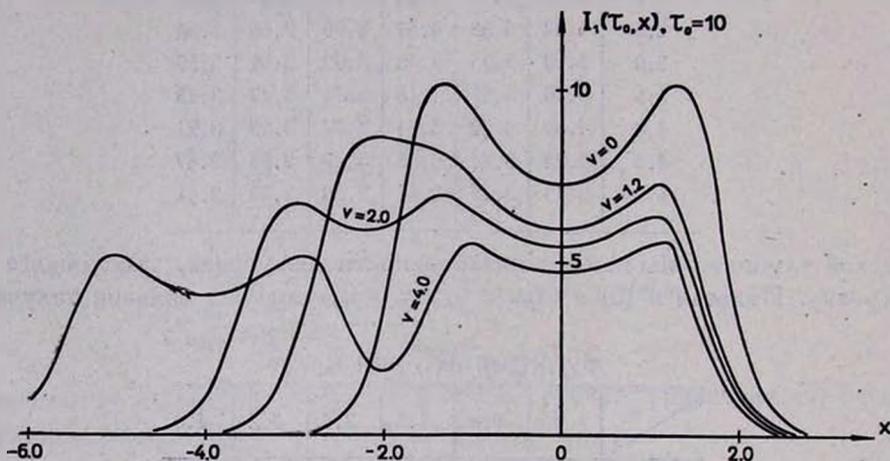


Рис. 1.

На рис. 2 видно, что интенсивности $I_2(0, x)$ для малых скоростей движения не имеют центрального провала. Это объясняется тем, что функция источников вблизи границы $\tau = 0$ для небольших скоростей достигает своего максимального значения. С ростом скорости этот максимум сдвигается к центру отрезка, вследствие чего в линии излучения появляется указанный провал.

5. *Световое давление.* Найдем силу светового давления, действующую на единицу объема на границе $\tau = 0$. Эта сила вычисляется по следующей формуле:

$$\begin{aligned}
 P(v) &= \frac{\sigma_{v_0}}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} a(x) [I_2(0, x) - I_2(0, x + v)] dx = \\
 &= \frac{\sigma_{v_0}}{Ac} \int_0^{\tau_0} B(t) [K(t) - K_1(0, t)] dt,
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

где τ_0 — объемный коэффициент поглощения для центральной частоты, c — скорость света. В табл. 3 приведена зависимость от скорости величины $cP(v)/\tau_0$ для $\tau_0 = 5$ и $\tau_0 = 10$.

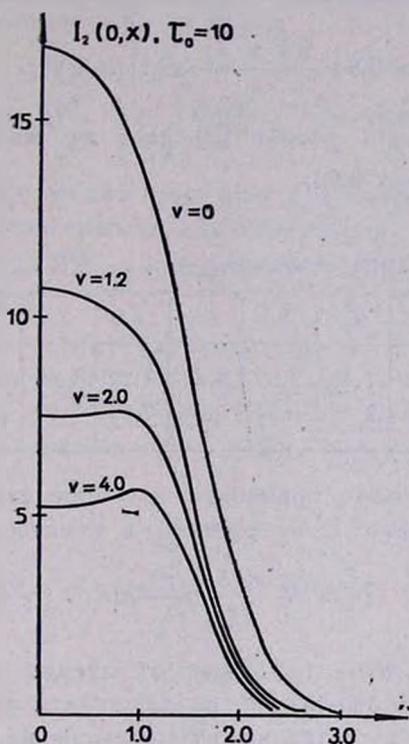


Рис. 2.

Наибольший интерес представляет определение силы светового давления при очень большой оптической толщине оболочки. В этом случае при $v = \infty$ (а практически при значениях v порядка нескольких единиц) можно получить простую асимптотическую формулу для величины P . Полагая в формуле (11) $v = \infty$ и пользуясь уравнением (6) при $v = \infty$, $\lambda = 1$, $g(\tau) = B_0$, получаем

$$P(\infty) = \frac{2\sigma_0}{Ac} [B(0) - B_0]. \quad (12)$$

В работе В. В. Соболева [8] была изучена функция $Q(\tau)$, являющаяся

решением уравнения (6) при $\nu = \infty$ и $g(\tau) = 1$. Очевидно, что $B(\tau) = B_0 Q(\tau)$. Для величины $Q(0)$ в указанной работе получены асимптотические оценки. Применяя их к случаю одномерной среды и доплеровского профиля коэффициента поглощения, вместо (12) получаем

$$P(\infty) = 0.94 \frac{2\sqrt{\pi} \sigma_{\nu_0}}{c} B_0 \tau_0^{\frac{1}{2}} (\ln \tau_0)^{\frac{1}{2}}, \quad \tau_0 \gg 1. \quad (13)$$

Асимптотически точная теория [9] дает ту же формулу с коэффициентом $(\pi/4)^{\frac{1}{2}}$ вместо 0.94.

Таблица 3

ФУНКЦИЯ $cP(\nu)/\sigma_{\nu_0}$ ДЛЯ $\tau_0=5$ И $\tau_0=10$

ν	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2	3.6	4.0
$\tau_0=5$	0.00	0.43	1.42	2.59	3.60	4.29	4.66	4.78	4.82	4.82	4.82
$\tau_0=10$	0.00	0.58	2.04	3.77	5.60	7.09	7.97	8.29	8.28	8.20	8.15

Формулу (13) можно применять для определения силы светового давления, вызываемого L_{α} -излучением в туманностях. В этом случае

$$B_0 = N \frac{q(1-p)}{2\sqrt{\pi}} h\nu_{\alpha}, \quad (14)$$

где N — число L_{α} -квантов, падающих от звезды на внутреннюю границу туманности, q — отношение коэффициента поглощения в лаймановском континууме к коэффициенту поглощения в центре линии L_{α} , p — доля рекомбинаций на первый уровень, $h\nu_{\alpha}$ — энергия L_{α} -кванта. Здесь считается, что оптическая толщина туманности в лаймановском континууме меньше единицы. Подставляя (14) в (13), находим

$$P(\infty) = 0.94 \frac{\sigma_{\nu_0}}{c} \tau_0^{\frac{1}{2}} (\ln \tau_0)^{\frac{1}{2}} Nq(1-p) h\nu_{\alpha}, \quad \tau_0 \gg 1. \quad (15)$$

Если бы мы считали, что перераспределение по частотам отсутствует, то для силы светового давления получили бы формулу

$$P_*(\infty) = \frac{1}{2} N(1-p) h\nu_{\alpha} \frac{\sigma_{\nu_0}}{c} q\tau_0. \quad (16)$$

Сравнивая (15) с (16), имеем

$$\frac{P(\infty)}{P_*(\infty)} = 1.88 \tau_0^{-\frac{1}{2}} (\ln \tau_0)^{\frac{1}{2}}, \quad \tau_0 \gg 1. \quad (17)$$

При $\tau_0 \sim 10^4$ формула (17) для отношения $P(\infty)/P_*(\infty)$ дает значение порядка 10^{-2} .

6. *Случай полубесконечной среды.* Будем теперь считать, что $\tau_0 = \infty$. Для интенсивности $I_2(0, x)$ имеем

$$I(x) \equiv I_2(0, x) = \int_0^{\infty} B(t) e^{-a(x)t} a(x) dt. \quad (18)$$

Оказывается, что можно получить уравнение, непосредственно определяющее эту интенсивность. Действительно, умножим уравнение (6) при $\tau_0 = \infty$ на $a(x) e^{-a(x)\tau}$ и проинтегрируем его по τ от 0 до ∞ . В результате получим

$$I(x) t(x) = I_1(x) + \frac{\lambda}{2} A a(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{a(y)}{a(x) - a(y)} + \frac{a(y - v)}{a(x) + a(y - v)} \right] I(y) dy, \quad (19)$$

где

$$I_1(x) = a(x) \int_0^{\infty} g(\tau) x^{-a(x)\tau} d\tau, \quad (20)$$

$$t(x) = 1 - \lambda + \lambda A a^2(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a(y) dy}{a^2(x) - a^2(y)}. \quad (21)$$

Если функция $I(x)$ определена, то можно найти функцию источников и тем самым решить задачу до конца. Пусть $\bar{B}(s)$ означает результат применения [преобразования Лапласа к функции $B(\tau)$, т. е.

$$\bar{B}(s) = \int_0^{\infty} B(\tau) e^{-s\tau} d\tau. \quad (22)$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (6), получаем

$$\begin{aligned} \bar{B}(s) \left[1 - \frac{\lambda}{2} \bar{K}(s) - \frac{\lambda}{2} \bar{K}(-s) \right] &= \bar{g}(s) + \\ + \lambda \int_0^1 G(z) I(z) \frac{dz}{s-z} &+ \frac{\lambda}{2} \int_0^1 G(z) J(z, v) \frac{dz}{s+z}, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\bar{K}(s) = \int_0^1 G(z) \frac{z dz}{s+z}, \quad (24)$$

$$G(z) = 2A \frac{z}{\alpha'[\alpha^{-1}(z)]}, \quad (25)$$

$$J(z, v) = \frac{1}{2} [I[\alpha(\alpha^{-1}(z) - v)] + I[\alpha(\alpha^{-1}(z) + v)]], \quad (26)$$

$$\alpha[\alpha^{-1}(z)] = z. \quad (27)$$

Для получения $B(\tau)$ из выражения (23) по формуле

$$B(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \bar{B}(s) e^{i\tau s} ds \quad (28)$$

сделаем достаточно общее предположение относительно функции $g(\tau)$, считая ее представимой в виде суперпозиции экспонент, т. е.

$$g(\tau) = \int_0^1 g_0(y) e^{-i\tau y} dy. \quad (29)$$

В этом случае $\bar{g}(s)$ есть интеграл типа Коши с известными особенностями в комплексной плоскости. Учитывая также особенности $\bar{K}(s)$ и последнего интеграла в (23), в результате контурного интегрирования находим

$$B(\tau) = \int_0^1 \frac{D(x) e^{-x\tau} dx}{T^2\left(\frac{1}{x}\right) + \left[\frac{\lambda}{2} \pi x G(x)\right]^2}, \quad (30)$$

где

$$T\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{\lambda}{2} \bar{K}(-x) - \frac{\lambda}{2} \bar{K}(x), \quad (31)$$

$$D(x) = xG(x) \left[\int_0^1 g_0(z) \frac{dz}{z-x} - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 G(z) I(z) \frac{dz}{z+x} + \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 G(z) J(z, v) \frac{dz}{z-x} \right] + T(x) \left[g_0(x) + \frac{\lambda}{2} G(x) J(x, v) \right]. \quad (32)$$

При этом $\bar{K}(-x)$, первый и третий интегралы в выражении (32) следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Ленинградский государственный
университет

ON DIFFUSION OF RADIATION IN STELLAR SHELL EXPANDING WITH CONSTANT VELOCITY

V. V. VITYASEV

In one-dimensional approximation the diffusion of radiation in two moving layers is considered. The complete redistribution in frequency is assumed. In the case of the finite layers the source function, emergent intensities and radiation pressure are found numerically. In the case of semi-infinite layers the equation for the emergent intensity and explicit expression for the source function are derived.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. А. Амбарцумян, Научные труды, т. I, АН АрмССР, Ереван, 1960.
2. Н. Zanstra, BAN., 11, 401, 1949; 11, 429, 1951.
3. D. Koelbloed, BAN., 12, 465, 1956.
4. В. В. Соболев, ДАН СССР, 138, 571, 1961.
5. J. L. Kulander, Ap. J., 147, № 3, 1967.
6. В. В. Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.
7. Н. Я. Яковкин, Р. И. Костик, Астрофизика, 2, 379, 1966.
8. В. В. Соболев, Астрофизика, 3, 135, 1967.
9. В. Ё. Иванов, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.

