АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 8 МАЙ, 1972 ВЫПУСК 2

НЕКОГЕРЕНТНОЕ РАССЕЯНИЕ. III

Н. Б. ЕНГИБАРЯН, А. Г. НИКОГОСЯН

Поступила 2 августа 1971

Рассматривается задача переноса излучения внутри спектральной линии в изотермической среде. Выводятся различные системы функциональных уравнений относительно вспомогательных функций, являющихся обобщением известных функций Амбарцумяна φ и ψ. Знание этих функций позволяет определить коэффициенты отражения и пропускания, а также и поле излучения внутри среды.

В настоящей работе, представляющей собой продолжение серии статей [1—3], будет изложена теория переноса излучения внутри спектральной линии в изотермической среде, обладающей плоской симметрией. Индикатриса рассеяния предполагается сферической. Функцию перераспределения будем считать независящей от угла рассеяния. Примем такой закон перераспределения, который может сколь угодно точно аппроксимировать любой истинный закон. Именно, как и ранее в [1], представим функцию перераспределения $r(x', x)$ в виде конечной суммы

$$r(x', x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x') \alpha_k(x). \tag{D}$$

Такое представление можно осуществить, если функцию $r(x', x)$ заменить конечной суммой ее разложения по собственным функциям, учитывая одновременно положительность ее собственных чисел.

В работе выводятся функциональные уравнения относительно вспомогательных функций, являющихся обобщением известных функций Амбарцумяна на случай указанного закона перераспределения по частотам. Знание этих функций позволяет определить коэффициенты отражения и пропускания, а также и поле излучения внутри среды.

Пусть изотермическая плоскопараллельная среда геометрической толщины $z_0 \leqslant \infty$ заполнена атомами двух сортов. Примем, что атомы первого сорта обладают двумя дискретными энергетическими уровнями 1, 2, а атомы второго сорта могут ионизироваться излучением частоты, соответствующей переходам между упомянутыми уровнями. Отношение концентраций этих атомов будем считать постоянным во всей среде.

Рассмотрим задачу переноса излучения в спектральной линии ($1 \leftrightarrow 2$) с учетом поглощения и излучения в непрерывном спектре. Учтем также переходы $1 \to 2$ и $2 \to 1$ вследствие электронных ударов первого и второго рода, соответственно. Как и обычно, удобно ввести безразмерную частоту $x = (\nu - \nu_0)/\Delta\nu$, где ν_0 — центральная частота линии, а $\Delta\nu$ — ширина спектральной линии. Обозначим далее через $\sigma(\nu, z)$ и $\sigma^c(z)$ объемные коэффициенты поглощения внутри спектральной линии для атомов, соответственно, первого и второго сортов (см. [4]). Тогда имеем $\sigma(\nu, z) = k_\nu n(z)$, где k_ν — коэффициент поглощения, рассчитанный на один атом первого сорта, а $n(z)$ — концентрация указанных атомов. Ввиду предположения об изотермичности среды k_ν не зависит от z и, следовательно, $\sigma(\nu, z)$ может быть представлен в виде

$$\sigma(\nu, z) = \alpha(x)\,\sigma(z),$$

где $\alpha(x) = k_\nu/k_{\nu_0}$ — контур коэффициента поглощения. Заметим, что отношение $\beta = \sigma^c(z)/\sigma(z)$ не зависит от z.

Уравнение переноса в линии при сделанных выше предположениях относительно оптических свойств среды имеет следующий вид:

$$\eta \frac{dI(\tau, \eta, x)}{d\tau} = -[\alpha(x) + \beta] I + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} r(x', x)\,dx' \times \\ \times \int_{-1}^{1} I(\tau, \eta', x')\,d\eta' + \frac{\lambda}{2}\alpha(x) S^* + \beta S^c \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} I(0, \eta, x) &= I_0(\eta, x) \quad \text{при} \quad \eta > 0, \\ I(\tau_0, \eta, x) &= 0 \quad \text{при} \quad \eta < 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где введены следующие общепринятые обозначения [3]: $r(x', x)$ — функция перераспределения по частотам, усредненная по углам рассеяния; $\lambda = A_{21}/(A_{21} + a_{21})$ — вероятность выживания кванта при поглощении последнего со стороны атомов первого сорта; $S^* = (a_{12}/k_{\nu_0}) A\, h\nu_0$, причем a_{12} и a_{21} — коэффициенты переходов $1 \to 2$ и $2 \to 1$ вследствие электронных ударов, соответственно, первого и второго родов. Наконец, через S^c обозначена функция источника для непрерывного излучения. Оптическая глубина τ и полная оптическая толщина среды τ_0 рассчитаны в центре спектральной линии и относятся к атомам первого сорта. Указанные величины даются посредством

$$\tau = \int_0^z \sigma(z)\,dz; \qquad \tau_0 = \int_0^{z_0} \sigma(z)\,dz \tag{3}$$

Сформулированную задачу нетрудно свести обычными путями к решению некоторого интегрального уравнения относительно функции

$$S(\tau, x) = \frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{\infty} r(x, x')\,dx' \int_{-1}^{1} I(\tau, \eta', x')\,d\eta' + \frac{\lambda}{2}\alpha(x) S^* + \beta S^c. \tag{4}$$

Указанное интегральное уравнение имеет следующий вид:

$$S(\tau, x) = \frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{\infty} r(x, x')\,dx' \int_0^{\tau_0} S(\tau', x')\,E_1\left[(\alpha(x') + \beta)\,|\tau - \tau'|\right] d\tau' +$$

$$+ \frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{\infty} r(x, x')\,dx' \int_0^1 I_0(\eta', x')\, e^{-\frac{\tau}{\eta'}[\alpha(x') + \beta]}\,d\eta' + \frac{\lambda}{2}\alpha(x) S^* + \beta S^c; \tag{5}$$

где $E_n(\tau) = \int_0^1 e^{-\frac{\tau}{\eta}}\eta^{n-2}\,d\eta$ — интегрально-показательная функция n-ого порядка. Воспользовавшись представлением (D) для функции перераспределения $r(x', x)$, полученное интегральное уравнение легко переписать в виде

$$S(\tau, x) = \frac{\lambda}{2}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x)\,Q_k(\tau) + \beta S^c, \tag{6}$$

где через $Q_m(\tau)$ обозначено

$$Q_m(\tau) = Q_m^0(\tau) + \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_m(x)\,dx \int_0^{\tau_0} S(\tau', x)\,E_1\left[(\alpha(x) + \beta)\,|\tau - \tau'|\right] d\tau', \tag{7}$$

причем

$$Q_m^0(\tau) = S^* \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_m(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_m(x)\,dx \int_0^1 I_0(\eta, x)\, e^{-\frac{\tau}{\eta}[\alpha(x)+\beta]}\, d\eta. \tag{8}$$

Пользуясь (5) и (6), нетрудно теперь получить систему интегральных уравнений для определения функций $Q_m(\tau)$:

$$Q_m(\tau) = \bar{Q}_m(\tau) + \frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\tau_0} K_{mk}(|\tau - \tau'|)\, Q_m(\tau')\, d\tau', \tag{9}$$

где введены следующие обозначения:

$$\bar{Q}_m(\tau) = Q_m^0(\tau) + \beta S^c \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_m(x)\,dx \int_0^{\tau_0} E_1[(\alpha(x)+\beta)|\tau - \tau'|]\, d\tau'. \tag{10}$$

$$K_{mk}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_k(x)\,\alpha_m(x)\, E_1[(\alpha(x)+\beta)\tau]\,dx. \tag{11}$$

Здесь следует обратить внимание на тот факт, что как элементы матрицы-ядра $\| K_{mk}(\tau) \|$, так и свободные члены $\bar{Q}_m(\tau)$ системы (9) можно представить в виде суперпозиции экспонент. Действительно, как нетрудно убедиться,

$$K_{mk}(\tau) = \int_{\beta}^{\infty} C_{mk}(s-\beta)\, e^{-\tau s}\, \frac{ds}{s} = \int_0^{1/\beta} \bar{G}_{mk}(z)\, e^{-\frac{\tau}{z}}\, \frac{dz}{z}. \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \bar{Q}_m(\tau) = c_m &+ \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_m(x)\,dx \int_0^1 I_0(\eta, x)\, e^{-\frac{\tau}{\eta}[\alpha(x)+\beta]}\, d\eta - \\ &- \beta S^c \int_0^{1/\beta} \bar{G}_m(z) \left[e^{-\frac{\tau}{z}} + e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{z}} \right] dz, \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$c_m = S^* \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_m(x)\,dx - \beta S^c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_m(x)\,dx}{\alpha(x)+\beta}, \tag{14}$$

$$G_{mk}(s)=\int\limits_{E(s)} a_m(x)\,a_k(x)\,dx;\quad \overline{G}_{mk}(z)=G_{mk}\left(\frac{1}{z}-\beta\right),\tag{15}$$

$$G_m(z)=\frac{1}{z^2}\int\limits_{E(s)}\frac{a_m(x)\,dx}{[\alpha(x)+\beta]^2},\ \text{причем}\ E(s)=\{x:\alpha(x)\leqslant s\}.\tag{16}$$

Рассмотрим теперь следующие вспомогательные системы интегральных уравнений (i — номер системы), $i=1,\ldots,n$:

$$U_{mi}(\tau,\ z)=e^{-\frac{\tau}{z}}\delta_{mi}+\frac{\lambda}{2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^{\tau_0}K_{mk}(|\tau-\tau'|)\,U_{ki}(\tau',\ z)\,d\tau'.\tag{17}$$

Нетрудно убедиться, что знание функций U_{mi} позволит определить непосредственно интересующие нас величины Q_k. Действительно, последние выражаются через функции U_{mi} следующим образом:

$$Q_k(\tau)=\sum_{l=1}^{n}\left\{c_l U_{kl}(\tau,\ \infty)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}a_l(x)\,dx\int\limits_0^1 I_0(\eta,\ x)\,U_{kl}[(\alpha(x)+\beta)\tau,\ \eta]\,d\eta-\right.$$
$$\left.-\beta S^c\int\limits_0^{1/\beta}G_l(z)\,[U_{kl}(\tau,\ z)+U_{kl}(\tau_0-\tau,\ z)]\,dz\right\}.\tag{18}$$

Как уже было показано в работе [1], решение системы (17) может быть сведено к следующей системе функциональных уравнений вольтерровского типа:

$$\psi_{lj}(\tau_0,\ \rho)=K_{lj}(\rho-\tau_0)+\frac{\lambda}{2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^{\tau_0}\psi_{kl}(\tau,\ \tau_0)\,\psi_{kj}(\tau,\ \rho)\,d\tau\tag{19}$$

и последующему решению двух линейных систем Вольтерра. Такой подход является эффективным в случае не очень больших оптических толщин. Здесь же мы поступим несколько иначе. Именно, сведем решение системы (17) к системам функциональных уравнений, являющихся в некотором смысле обобщением известных из теории переноса функциональных уравнений для функций X и Y, относящихся к скалярному случаю. Процедура получения упомянутых функциональных уравнений в общих чертах сходна с методом вывода аналогичных уравнений в скалярном случае, хорошо известным в классической теории переноса.

Перейдя к выводу указанных уравнений, продифференцируем обе части уравнений (17) по τ. Тогда будем иметь

$$\frac{\partial U_{ml}(\tau, z)}{\partial \tau} = -\frac{1}{z}\delta_{ml} e^{-\frac{\tau}{z}} + \frac{\lambda}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\tau_0} K_{mk}(|\tau-\tau'|)\frac{\partial U_{kl}}{\partial \tau'}d\tau' + \tag{20}$$
$$+\frac{\lambda}{2}\sum_{p=1}^{n} X_{pl}(z) K_{mp}(\tau) - \frac{\lambda}{2}\sum_{p=1}^{n} Y_{pl}(z) K_{mp}(\tau_0-\tau),$$

где

$$X_{pl}(z) = U_{pl}(0, z); \quad Y_{pl}(z) = U_{pl}(\tau_0, z). \tag{21}$$

Таким образом, системы интегральных уравнений (20), которым удовлетворяют функции $\partial U_{ml}/\partial\tau$, имеют матрицу-ядро, совпадающую с матрицей-ядром для системы (17). С другой стороны, если учесть (12), то нетрудно убедиться, что свободные члены в (20) являются суперпозицией свободных членов системы (17). Ввиду линейности системы уравнений (20) и (17), будем иметь

$$\frac{\partial U_{ml}(\tau, z)}{\partial \tau} = -\frac{1}{z} U_{ml}(\tau, z) +$$
$$+\frac{\lambda}{2}\sum_{p=1}^{n} X_{pl}(z)\sum_{q=1}^{n}\int_0^{1/\beta}\overline{G}_{qp}(z') U_{mq}(\tau, z')\frac{dz'}{z'} - \tag{22}$$
$$-\frac{\lambda}{2}\sum_{p=1}^{n} Y_{pl}(z)\sum_{q=1}^{n}\int_0^{1/\beta}\overline{G}_{qp}(z') U_{mq}(\tau_0-\tau, z')\frac{dz'}{z'}.$$

Полученное соотношение (22) и дает нам возможность получить уравнения, определяющие величины

$$z\rho_{ml}(z', z) = \int_0^{\tau_0} U_{ml}(\tau, z) e^{-\frac{\tau}{z'}}\frac{d\tau}{z'}; \quad z\sigma_{ml}(z', z) = \int_0^{\tau_0} U_{ml}(\tau, z) e^{-\frac{\tau_0-\tau}{z'}}\frac{d\tau}{z'}. \tag{23}$$

Знание этих величин, как мы увидим далее, позволит нам определить коэффициенты отражения и пропускания.

Умножая соотношение (22) на $e^{-\frac{\tau}{z}}$, а затем — на $e^{-\frac{\tau_0-\tau}{z}}$ и интегрируя по τ в пределах от нуля до τ_0 и учитывая (23), получим

$$(z+s)\rho_{ml}(s, z) = \sum_{p=1}^{n}\left\{X_{pl}(z)\left[\delta_{mp} + \frac{\lambda}{2}s\sum_{q=1}^{n}\int_0^{1/\beta}\overline{G}_{qp}(z')\rho_{mq}(s, z')\,dz'\right] - \right.$$

$$\left. - Y_{pl}(z)\left[\delta_{mp}e^{-\frac{\tau_0}{s}} + \frac{\lambda}{2}s\sum_{q=1}^{n}\int_0^{1/\beta}\overline{G}_{qp}(z')\sigma_{mq}(s, z')\,dz'\right]\right\}. \tag{24}$$

$$-(z-s)\sigma_{ml}(s, z) = \sum_{p=1}^{n}\left\{X_{pl}(z)\left[\delta_{mp}e^{-\frac{\tau_0}{s}} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{\lambda}{2}s\sum_{q=1}^{n}\int_0^{1/\beta}\overline{G}_{qp}(z')\sigma_{mq}(s, z')\,dz'\right] - \tag{25}$$

$$\left. - Y_{pl}(z)\left[\delta_{mp} + \frac{\lambda}{2}s\sum_{q=1}^{n}\int_0^{1/\beta}\overline{G}_{qp}(z')\rho_{mq}(s, z')\,dz'\right]\right\}.$$

С другой стороны, учитывая (21), выражения для $\{X_{pl}\}$ и $\{Y_{pl}\}$ мы можем получить из системы уравнений (17), полагая в ней $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$, соответственно. Тогда получим

$$X_{ml}(z) = \delta_{ml} + \frac{\lambda}{2}z\sum_{k=1}^{n}\int_0^{1/\beta}\overline{G}_{mk}(z')\rho_{kl}(z', z)\,dz', \tag{26}$$

$$Y_{ml}(z) = \delta_{ml}e^{-\frac{\tau_0}{s}} + \frac{\lambda}{2}z\sum_{k=1}^{n}\int_0^{1/\beta}\overline{G}_{mk}(z')\sigma_{kl}(z', z)\,dz'. \tag{27}$$

Пользуясь теперь полученными соотношениями, нетрудно увидеть, что если функции $\rho_{ml}(s, z)$ и $\sigma_{ml}(s, z)$ удовлетворяют системе уравнений (24)—(27), то функции $\rho_{lm}(z, s)$ и $\sigma_{lm}(z, s)$ также удовлетворяют указанной системе. Предполагая, что решение должно быть единственным, мы заключаем, что оно должно иметь вид

$$\rho_{ml}(s, z) = \sum_{p=1}^{n}\frac{X_{pl}(z)\,X_{pm}(s) - Y_{pl}(z)\,Y_{pm}(s)}{z+s}, \tag{28}$$

$$\sigma_{ml}(s, z) = \sum_{p=1}^{n}\frac{X_{pl}(z)\,Y_{pm}(s) - X_{pm}(s)\,Y_{pl}(z)}{s-z}. \tag{29}$$

Подставляя полученные соотношения в формулы (26) и (27), мы приходим к искомым функциональным уравнениям относительно функций X_{mi} и Y_{mi}:

$$X_{mi}(z) = \delta_{mi} + \frac{\lambda}{2} z \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} \int_0^{1/\beta} \overline{G}_{mk}(z') \frac{X_{pi}(z) X_{pk}(z') - Y_{pi}(z) Y_{pk}(z')}{z+z'} dz' \tag{30}$$

$$Y_{mi}(z) = \delta_{mi} e^{-\frac{\tau_0}{z}} + \frac{\lambda}{2} z \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} \int_0^{1/\beta} \overline{G}_{mk}(z') \frac{X_{pk}(z') Y_{pi}(z) - X_{pi}(z) Y_{pk}(z')}{z-z'} dz' \tag{31}$$

Вместо полученной системы уравнений, можно рассмотреть систему относительно функций

$$\overline{X}_{mi}(z) = \sum_{k=1}^{n} \overline{G}_{ik}(z) X_{mk}(z); \qquad \overline{Y}_{mi}(z) = \sum_{k=1}^{n} \overline{G}_{ik}(z) Y_{mk}(z), \tag{32}$$

имеющую следующий вид:

$$\overline{X}_{mi}(z) = \overline{G}_{mi}(z) + \frac{\lambda}{2} z \sum_{p=1}^{n} \int_0^{1/\beta} \frac{\overline{X}_{pi}(z) \overline{X}_{pm}(z') - \overline{Y}_{pi}(z) \overline{Y}_{pm}(z')}{z+z'} dz', \tag{33}$$

$$\overline{Y}_{mi}(z) = \overline{G}_{mi}(z) e^{-\frac{\tau_0}{z}} + \frac{\lambda}{2} z \sum_{p=1}^{n} \int_0^{1/\beta} \frac{\overline{Y}_{pi}(z) \overline{X}_{pm}(z') - \overline{X}_{pi}(z) \overline{Y}_{pm}(z')}{z-z'} dz'. \tag{34}$$

Преимущества приведенной системы уравнений по сравнению с системой (30—31) очевидны.

В частности, в случае полубесконечной среды ($\tau_0 = \infty$) все функции $Y_{mi}(z)$, следовательно, и $\overline{Y}_{mi}(z)$, обращаются в нуль, и вместо системы (33)—(34) будем иметь

$$\overline{H}_{mi}(z) = \overline{C}_{mi}(z) + \frac{\lambda}{2} z \sum_{p=1}^{n} \int_0^{1/\beta} \frac{\overline{H}_{pm}(z') \overline{H}_{pi}(z)}{z+z'} dz' \tag{35}$$

где $\overline{H}_{mi}(z) = \sum_{k=1}^{n} \overline{G}_{ik}(z) H_{mk}(z)$, а $H_{mk}(z) = X_{mk}(z)$ при $\tau_0 = \infty$.

Пользуясь методом, указанным В. В. Соболевым [5], можно получить еще одну систему, которой удовлетворяют функции X_{mi} и Y_{mi}. В данном случае проще всего можно получить упомянутую систему следующим образом: продифференцируем наше исходное уравнение

(17) по τ_0, отмечая всюду в дальнейшем зависимость от τ_0. Учитывая (12) и (21), будем иметь

$$\frac{\partial U_{mi}(\tau, z, \tau_0)}{\partial \tau_0} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\tau_0} K_{mk}(|\tau - \tau'|) \frac{\partial U_{ki}}{\partial \tau_0} d\tau' + + \sum_{p=1}^{n} Y_{pi}(z, \tau_0) \int_0^{1/\beta} \overline{G}_{mp}(z') e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{z'}} \frac{dz'}{z'}. \tag{36}$$

Таким образом, функции $\partial U_{mi}/\partial \tau_0$ удовлетворяют уравнениям, матрица-ядро которых совпадает с матрицей-ядром системы (17). С другой стороны, свободные члены полученной системы представляют собой суперпозицию свободных членов системы (17). Тогда, ввиду линейности системы (36), будем иметь

$$\frac{\partial U_{mi}}{\partial \tau_0} = \sum_{p=1}^{n} Y_{pi}(z, \tau_0) \sum_{q=1}^{n} \int_0^{1/\beta} \overline{G}_{qp}(z') U_{mq}(\tau_0 - \tau, z', \tau_0) \frac{dz'}{z'}. \tag{37}$$

Сравнивая теперь полученное соотношение (37) с выведенными ранее соотношениями (20), получим

$$\frac{\partial U_{mi}}{\partial \tau_0} = -\frac{1}{z} U_{mi} - \frac{\partial U_{mi}}{\partial \tau} + + \frac{\lambda}{2} \sum_{p=1}^{n} X_{pi}(z, \tau_0) \sum_{q=1}^{n} \int_0^{1/\beta} \overline{G}_{qp}(z'') U_{mq}(\tau, z'', \tau_0) \frac{dz''}{z''}. \tag{38}$$

Умножая обе части (38) на $e^{-\frac{\tau}{z'}} \frac{d\tau}{z'}$, а затем на $e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{z'}} \frac{d\tau}{z'}$, интегрируя в пределах от нуля до τ_0 и учитывая (26) и (27), найдем

$$\frac{\partial \rho_{mi}(z', z, \tau_0)}{\partial \tau_0} + \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z'}\right) \rho_{mi} = \frac{1}{zz'} \sum_{p=1}^{n} X_{pi}(z, \tau_0) X_{pm}(z', \tau_0), \tag{39}$$

$$\frac{\partial \sigma_{mi}(z', z, \tau_0)}{\partial \tau_0} + \frac{1}{z'} \sigma_{mi} = \frac{1}{zz'} \sum_{p=1}^{n} X_{pi}(z, \tau_0) Y_{pm}(z', \tau_0), \tag{40}$$

откуда получаем

$$\rho_{mi}(z', z, \tau_0) = \frac{1}{zz'} \sum_{p=1}^{n} \int_0^{\tau_0} X_{pi}(z, \tau) X_{pm}(z', \tau) e^{-\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z'}\right)(\tau_0 - \tau)} d\tau; \tag{41}$$

$$\sigma_{mi}(z', z, \tau_0) = \frac{1}{zz'} \sum_{p=1}^{n} \int_0^{\tau_0} X_{pi}(z, \tau)\, Y_{pm}(z', \tau)\, e^{-\frac{\tau_0-\tau}{z'}}\, d\tau. \tag{42}$$

Подставляя теперь (41) и (42), соответственно, в выражения (26) и (27), получим искомые уравнения для функций $\{X_{mi}\}$ и $\{Y_{mi}\}$:

$$X_{mi}(z, \tau_0) = \delta_{mi} + \frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} \int_0^{1/\beta} \overline{G}_{mk}(z') \frac{dz'}{z'} \times \\ \times \int_0^{\tau_0} X_{pi}(z, \tau) X_{pk}(z', \tau) e^{-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z'}\right)(\tau_0-\tau)}\, d\tau; \tag{43}$$

$$Y_{mi}(z, \tau_0) = \delta_{mi} e^{-\frac{\tau_0}{z}} + \frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} \int_0^{1/\beta} \overline{G}_{mk}(z') \frac{dz'}{z'} \times \\ \times \int_0^{\tau_0} X_{pi}(z, \tau)\, Y_{pk}(z', \tau)\, e^{-\frac{\tau_0-\tau}{z'}}\, d\tau. \tag{44}$$

Нахождение функций $X_{mi}(z, \tau_0)$ и $Y_{mi}(z, \tau_0)$, или функций $H_{mi}(z)$— в случае полубесконечной среды, по существу решает задачу диффузного отражения и прохождения. Заметим здесь также, что из системы уравнений (43) нетрудно получить уже упоминавшуюся систему функциональных уравнений вольтерровского типа (19), одну из основных систем, решающих рассматриваемую задачу в случае небольших оптических толщин. Действительно, умножив обе стороны системы (43) на $e^{-\frac{\rho-\tau_0}{z}} G_{mi}(z)(dz/z)$ и проинтегрировав по z в пределах от нуля до $1/\beta$, а затем и просуммировав по i от единицы до n, придем к уравнениям (19) относительно функций

$$\psi_{pm}(\tau, \tau_0) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{1/\beta} e^{-\frac{\tau_0-\tau}{z}}\, \overline{G}_{mi}(z)\, X_{pi}(z, \tau) \frac{dz}{z}. \tag{45}$$

Обратимся теперь к вопросу об определении светового режима внутри среды. Указанная задача сводится к определению функций $U_{mi}(\tau, z, \tau_0)$. После того, как функции X_{mi} и Y_{mi} известны, нетрудно получить соотношения для определения функций U_{mi}, характеризующих поле излучения внутри среды. Введем с этой целью функции

$$\Phi_{mp}(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \sum_{q=1}^{n} \int_0^{1/\beta} \overline{G}_{qp}(z)\, U_{mq}(\tau, z, \tau_0) \frac{dz}{z}. \tag{46}$$

Тогда уравнение (22) перепишется в виде

$$\frac{\partial U_{mi}(\tau, z, \tau_0)}{\partial \tau} = -\frac{1}{z} U_{mi} + \sum_{p=1}^{n} [X_{pi}(z, \tau_0)\, \Phi_{mp}(\tau, \tau_0) - Y_{pi}(z, \tau_0)\, \Phi_{mp}(\tau_0 - \tau, \tau_0)]. \tag{47}$$

Формально решая полученное дифференциальное уравнение, будем иметь

$$U_{mi}(\tau, z, \tau_0) = X_{mi}(z, \tau_0) e^{-\frac{\tau}{z}} + \sum_{p=1}^{n} \left[X_{pi}(z, \tau_0) \int_0^{\tau} \Phi_{mp}(t, \tau_0) e^{-\frac{\tau - t}{z}} dt - Y_{pi}(z, \tau_0) \int_0^{\tau} \Phi_{mp}(\tau_0 - t, \tau_0)\, e^{-\frac{\tau - t}{z}} dt \right]. \tag{48}$$

Таким образом, интересующие нас функции $U_{mi}(\tau, z, \tau_0)$ оказываются выраженными через функции $\Phi_{mp}(\tau, \tau_0)$, дающиеся в (46). Для определения названных функций нетрудно получить систему интегральных уравнений вольтерровского типа. Действительно, умножая (48) на $(\lambda/2)\, \overline{G}_{ij}(z)\, (dz/z)$, интегрируя от нуля до $1/\beta$, а затем и суммируя по i, получим

$$\Phi_{mj}(\tau, \tau_0) = L_{mj}(\tau, \tau_0) + \sum_{p=1}^{n} \int_0^{\tau} [\Phi_{mp}(t, \tau_0)\, L_{pj}(\tau - t, \tau_0) - \Phi_{mp}(\tau_0 - t, \tau_0)\, M_{pj}(\tau - t, \tau_0)]\, dt, \tag{49}$$

где принято

$$L_{pj}(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{1/\beta} \overline{X}_{pj}(z, \tau_0)\, e^{-\frac{\tau}{z}} \frac{dz}{z};$$
$$M_{pj}(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{1/\beta} \overline{Y}_{pj}(z, \tau_0)\, e^{-\frac{\tau}{z}} \frac{dz}{z}, \tag{50}$$

причем функции $\overline{X}_{mj}$ и $\overline{Y}_{mj}$ задаются (32) и удовлетворяют системе уравнений (33)—(34). В частном случае полубесконечной среды вместо (49) и (50) будем иметь

$$\Phi_{mj}(\tau) = L_{mj}(\tau) + \sum_{p=1}^{n} \int_0^{\tau} \Phi_{mp}(t)\, L_{pj}(\tau - t)dt, \tag{51}$$

где

$$L_{pj}(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{1/\beta} \overline{H}_{pj}(z)\, e^{-\frac{\tau}{z}} \frac{dz}{z}, \tag{52}$$

причем функции $\overline{H}_{pj}$ задаются системой уравнений (35). Систему уравнений в свертках (51) легко решить, если к ее обеим частям применить преобразование Лапласа:

$$\overline{\Phi}_{mj}(s) = \overline{L}_{mj}(s) + \sum_{p=1}^{n} \overline{\Phi}_{pm}(s)\overline{L}_{pj}(s), \tag{53}$$

причем

$$\overline{\Phi}_{mj}(s) = \int_0^{\infty} \Phi_{mj}(\tau)\, e^{-\tau s}\, d\tau, \tag{54}$$

$$\overline{L}_{pj}(s) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{1/\beta} \frac{\overline{H}_{pj}(z)}{1 + sz}\, dz. \tag{55}$$

Функции $\overline{L}_{pj}(s)$ можно определить также из следующей системы, которую легко получить из (35):

$$\overline{H}_{mi}(z) = \overline{G}_{mi}(z) + \frac{\lambda}{2} \sum_{p=1}^{n} \overline{H}_{pi}(z)\, \overline{L}_{pm}\left(\frac{1}{z}\right). \tag{56}$$

Из соотношений (53) и (56) функции $\overline{\Phi}_{mj}$ можно выразить через функции $\overline{H}_{mj}$ и $\overline{G}_{mj}$ с помощью арифметических действий.

Задачу, сформулированную в начале работы, в принципе можно считать решенной. В самом деле, знание функций $X_{mi}(z, \tau_0)$ и $Y_{mi}(z, \tau_0)$ позволяет определить из (28) и (29) функции $\rho_{mi}(s, z, \tau_0)$ и $\sigma_{mi}(s, z, \tau_0)$, которые в свою очередь определяют интенсивности излучения, выходящего из среды. С другой стороны, зная те же функции X_{mi} и Y_{mi}, можно из системы интегральных уравнений (49) определить функции $\Phi_{ij}(\tau, \tau_0)$, после чего соотношения (48), (18) и (6) позволяют найти функцию источника $S(\tau, x)$. Знание последней дает возможность полностью разрешить вопрос о поле излучения внутри среды. Очевидно, что все сказанное в одинаковой мере относится и к случаю полубесконечной среды, только в этом случае надо пользоваться соответствующими уравнениями.

Отметим, что система уравнений (35) была получена в работе авторов [3] в качестве частного случая функциональных уравнений, выведенных при рассмотрении задачи диффузного отражения от полубесконечной среды при неизотропном рассеянии. Там же было отмечено, что численные методы, разработанные для решения уравнений относительно обычных H-функций, могут быть перенесены к решению системы (35).

Результаты, полученные в настоящей работе, в дальнейшем будут применены к различным астрофизическим задачам, в частности, к проблеме образования спектральных линий в звездных атмосферах.

Институт математики
АН Арм.ССР
Бюраканская астрофизическая
обсерватория

NONCOHERENT SCATTERING. III

N. B. YENGIBARIAN, A. G. NIKOGHOSSIAN

The problem of noncoherent radiation transfer in a spectral line across an isothermic medium is considered. The systems of functional equations for the auxiliary functions, which are a generalisation of Ambartsumian's well-known functions φ and ψ have been derived. A knowledge of these functions enables us to determine the reflection and transmission coefficients, as well as the radiation field in the medium.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. Б. Енгибарян*, Астрофизика, 7, 573, 1971.
2. *Н. Б. Енгибарян, А. Г. Никогосян*, Астрофизика, 8, 71, 1972.
3. *Н. Б. Енгибарян, А. Г. Никогосян*, ДАН Арм.ССР (в печати).
4. *В. В. Иванов*, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
5. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 34, 336, 1957.