АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 8 МАЙ, 1972 ВЫПУСК 2

РАССЕЯНИЕ СВЕТА В ОДНОРОДНОМ ШАРЕ

В. В. СОБОЛЕВ

Поступила 10 января 1972

Получены формулы, определяющие среднее число рассеяний фотонов в шаре и его светимость при любых источниках энергии. Эти величины выражены через резольвентную функцию $\Phi(\tau)$ для плоского слоя. Специально рассмотрены три случая расположения источников энергии: 1) источники распределены равномерно, 2) шар освещен параллельными лучами, 3) точечный источник находится на произвольном расстоянии от центра шара.

Как известно, астрофизиками весьма подробно рассмотрена проблема рассеяния света в среде, состоящей из плоскопараллельных слоев. Это связано с тем, что такими средами можно считать звездные и планетные атмосферы. Однако при изучении многих астрофизических объектов (звезды с протяженными атмосферами, планетарные туманности, рентгеновские источники, квазары, ядра галактик) в первом приближении следует пользоваться моделью газового шара. В какой-то мере это относится и к некоторым явлениям на Солнце (хромосферные вспышки, протуберанцы).

Теория рассеяния света в шаре разработана еще не в достаточной степени. Однако для случая однородного шара уже получен ряд существенных результатов. Сначала В. А. Амбарцумян [1] рассмотрел задачу о точечном источнике в бесконечной среде (которую можно считать шаром бесконечно большого радиуса). Им найдено асимптотическое выражение для интенсивности излучения на больших оптических расстояниях от источника. Затем стало известным и точное решение этой задачи (см., например, [2, 3]). Было также получено асимптотическое решение аналогичной задачи для шара, оптический радиус которого по порядку превосходит единицу [4, 5].

Ряд работ посвящен задаче о рассеянии света в шаре произвольного оптического радиуса. Решение ее сильно упрощается тем, что она сводится к задаче о рассеянии света в плоском слое. Пользуясь этим, Хислет и Уорминг [6] для случая равномерного распределения источников энергии в шаре выразили функцию источников для шара через резольвентную функцию $\Phi(\tau)$ для плоского слоя, а светимость шара — через моменты функций $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$. В недавнее время Гриттон и Леонард [7] выполнили большое математическое исследование данной задачи.

В работе Малликина [8] найдено среднее число рассеяний фотона в шаре при возникновении его в любом месте шара. Эта величина выражена через функцию источников для плоского слоя, освещенного параллельными лучами.

Следует также отметить, что Беллман, Кагивада, Калаба и Уэно [9] сделали применение принципов инвариантности к проблеме переноса излучения через атмосферные слои, обладающие сферической симметрией.

В настоящей статье рассматривается задача о рассеянии света в однородном шаре при произвольных источниках энергии. Получены формулы, определяющие среднее число рассеяний фотона в шаре и полную энергию, излучаемую шаром (обычно называемую в астрофизике светимостью). Эти величины выражены через резольвентную функцию $\Phi(\tau)$ для плоского слоя, введенную автором ранее [10]. Найденные формулы применены к трем случаям расположения источников энергии: 1) источники распределены равномерно, 2) шар освещен параллельными лучами, 3) точечный источник находится на произвольном расстоянии от центра шара.

Основные уравнения. Будем считать, что в однородном шаре радиуса τ_0 происходят процессы рассеяния и истинного поглощения излучения, причем рассеяние является изотропным, а вероятность выживания фотона при элементарном акте рассеяния равна λ. Обозначим через α объемный коэффициент поглощения, через $\tau_0 = \alpha r_0$ — оптический радиус шара и через $\tau = \alpha r$ — оптическое расстояние от центра шара, соответствующее геометрическому расстоянию r.

Пусть $I(\tau, \vartheta)$—интенсивность излучения, идущего на оптическом расстоянии τ от центра шара под углом ϑ к радиусу-вектору. Как известно, величина $I(\tau, \vartheta)$ определена уравнением переноса излучения

$$\cos\vartheta \frac{\partial I(\tau, \vartheta)}{\partial\tau} - \frac{\sin\vartheta}{\tau} \frac{\partial I(\tau, \vartheta)}{\partial\vartheta} = -I(\tau, \vartheta) + B(\tau), \tag{1}$$

а входящая в него функция источников $B(\tau)$ выражается через $I(\tau, \vartheta)$ при помощи соотношения

$$B(\tau)=\frac{\lambda}{2}\int_0^{\pi} I(\tau,\ \vartheta)\sin\vartheta d\vartheta+g(\tau). \tag{2}$$

Здесь $g(\tau)$ — функция источников, обусловленная непосредственно источниками энергии, расположенными в шаре. Эти источники считаются изотропными. Энергия, излучаемая этими источниками, находящимися в 1 *см*^{3}, за 1 *сек*, равна $4\pi\alpha g(\tau)$.

Из уравнений (1) и (2) при учете отсутствия падающего на шар внешнего излучения получается следующее интегральное уравнение для определения функции $B(\tau)$:

$$\tau B(\tau)=\frac{\lambda}{2}\int_0^{\tau_0}[E_1(|\tau-t|)-E_1(\tau+t)]\,B(t)\,tdt+\tau g(\tau), \tag{3}$$

где

$$E_1(\tau)=\int_1^{\infty} e^{-\tau z}\,\frac{dz}{z}. \tag{4}$$

Мы не будем сейчас пытаться решить уравнение (3), а найдем лишь светимость шара L. Эта величина определяется формулой

$$L=4\pi r_0^2 H(\tau_0), \tag{5}$$

где $H(\tau_0)$ — поток излучения на границе шара, равный

$$H(\tau_0)=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} I(\tau_0,\ \vartheta)\cos\vartheta\sin\vartheta d\vartheta. \tag{6}$$

Для нахождения потока излучения умножим уравнение (1) на $2\pi\sin\vartheta d\vartheta$ и проинтегрируем его по ϑ от 0 до π. Пользуясь уравнением (2), получаем

$$\frac{dH(\tau)}{d\tau}+\frac{2}{\tau}H(\tau)=\frac{4\pi}{\lambda}[g(\tau)-(1-\lambda)B(\tau)]. \tag{7}$$

Умножим уравнение (7) и τ^2 и проинтегрируем его по τ от 0 до τ_0. Подставляя найденную таким путем величину $H(\tau_0)$ в формулу (5), имеем

$$L=[1-(1-\lambda)N]E, \tag{8}$$

где обозначено

$$E = \frac{16\pi^2}{\alpha^2}\int_0^{\tau_0} g(\tau)\tau^2 d\tau, \tag{9}$$

$$N = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\int_0^{\tau_0} B(\tau)\tau^2 d\tau}{\int_0^{\tau_0} g(\tau)\tau^2 d\tau} - 1\right]. \tag{10}$$

Величина E представляет собой полную энергию, вырабатываемую источниками, находящимися в шаре, а величина N — среднее число рассеяний возникающих в шаре фотонов (здесь первоначальное испускание фотона не считается рассеянием). Так как $1-\lambda$ есть вероятность истинного поглощения при одном акте рассеяния, то величина $(1-\lambda)N$ есть доля энергии, поглощенной в шаре. Физический смысл формулы (8) очевиден: светимость шара равна энергии, вырабатываемой в шаре, без энергии, поглощаемой в нем.

Для нахождения величины N по формуле (10) надо знать функцию $B(\tau)$, соответствующую заданной функции $g(\tau)$. Однако, как мы сейчас покажем, в этом нет необходимости.

Введем в рассмотрение функцию $S(\tau)$, удовлетворяющую интегральному уравнению

$$\tau S(\tau) = \frac{\lambda}{2}\int_0^{\tau_0} [E_1(|\tau - t|) - E_1(\tau + t)]\, S(t)\, t dt + \tau, \tag{11}$$

являющемуся частным случаем уравнения (3) при $g(\tau) = 1$.

Из уравнений (3) и (11) имеем

$$\int_0^{\tau_0} B(\tau)\tau^2 d\tau = \int_0^{\tau_0} S(\tau)\, g(\tau)\tau^2 d\tau. \tag{12}$$

Поэтому вместо формулы (10) получаем

$$N = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\int_0^{\tau_0} S(\tau)\, g(\tau)\tau^2 d\tau}{\int_0^{\tau_0} g(\tau)\tau^2 d\tau} - 1\right]. \tag{13}$$

Мы видим, что для нахождения величины N (а значит, и светимости шара L) при любой функции $g(\tau)$ достаточно знать лишь одну функцию $S(\tau)$, определенную уравнением (11). Очевидно, что функция $S(\tau)$ представляет собой среднее число рассеяний фотона, возникшего на оптическом расстоянии τ от центра шара (причем акт возникновения фотона считается рассеянием).

Прежде чем переходить к нахождению функции $S(\tau)$, отметим, что полученные формулы для величин N и L могут быть существенно обобщены. При написании уравнений (1) и (2) молчаливо предполагалось, что распределение источников энергии в шаре обладает радиальной симметрией. Однако среднее число рассеяний фотона, возникшего в некотором месте однородного шара, зависит только от τ, но не зависит от других координат данного места. Поэтому в формулах (9) и (13) под величиной $\frac{16\pi^2}{\alpha^2} g(\tau)\tau^2 d\tau$ можно понимать полную энергию, излучаемую источниками, находящимися в сферическом слое, ограниченном сферами с оптическими радиусами τ и $\tau + d\tau$, при произвольном расположении источников в этом слое.

Определение функции $S(\tau)$. Уравнение (11), определяющее функцию $S(\tau)$, может быть легко сведено к уравнению, описывающему рассеяние света в плоском слое. Для этого введем новую функцию $S^*(\tau) = \tau S(\tau)$ и будем считать, что $S^*(-\tau) = -S^*(\tau)$. Тогда вместо (11) получаем

$$S^*(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} E_1(|\tau - t|)\, S^*(t)\, dt + \tau. \tag{14}$$

Вводя здесь новые переменные $x = \tau_0 - \tau$ и $y = \tau_0 - t$, приходим к уравнению

$$S^*(\tau_0 - x) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{2\tau_0} E_1(|x - y|)\, S^*(\tau_0 - y)\, dy + \tau_0 - x. \tag{15}$$

Таким образом, величина $S^*(\tau_0 - x)$ является функцией источников для плоского слоя оптической толщины $2\tau_0$, в котором источники энергии линейно зависят от оптической глубины. Эту величину можно представить в виде

$$S^*(\tau_0 - x) = \tau_0 Q(x) - R(x), \tag{16}$$

где функции $Q(\tau)$ и $R(\tau)$ определяются соответственно уравнениями

$$Q(\tau) = \frac{\lambda}{2}\int_0^{2\tau_0} E_1(|\tau - t|)\, Q(t)\, dt + 1, \tag{17}$$

$$R(\tau) = \frac{\lambda}{2}\int_0^{2\tau_0} E_1(|\tau - t|)\, R(t)\, dt + \tau. \tag{18}$$

Функция $Q(\tau)$ представляет собой среднее число рассеяний фотона, возникшего на оптической глубине τ в плоском слое оптической толщины $2\tau_0$. Эта функция была подробно изучена ранее [11].

Возвращаясь в (16) от переменной x к τ и от функции $S^*(\tau)$ к $S(\tau)$, находим

$$\tau S(\tau) = \tau_0 Q(\tau_0 - \tau) - R(\tau_0 - \tau). \tag{19}$$

Заменяя здесь τ на $-\tau$ и пользуясь тем, что $Q(\tau_0 + \tau) = Q(\tau_0 - \tau)$, имеем

$$2\tau S(\tau) = R(\tau_0 + \tau) - R(\tau_0 - \tau). \tag{20}$$

Формулы (19) и (20) и могут служить для нахождения функции $S(\tau)$.

Как показано ранее [10], резольвента интегрального уравнения типа (17) выражается через функцию $\Phi(\tau)$, определенную уравнением

$$\Phi(\tau) = \frac{\lambda}{2}\int_0^{2\tau_0} E_1(|\tau - t|)\, \Phi(t)\, dt + \frac{\lambda}{2} E_1(\tau). \tag{21}$$

Это значит, что знание функции $\Phi(\tau)$ позволяет определить поле излучения в плоском слое при любых источниках энергии.

Выразим функции $Q(\tau)$ и $R(\tau)$ через функцию $\Phi(\tau)$. Для этого продифференцируем уравнения (17) и (18) по τ и сравним полученные результаты с уравнением (21). Это дает

$$\frac{dQ(\tau)}{d\tau} = Q(0)\,[\Phi(\tau) - \Phi(2\tau_0 - \tau)], \tag{22}$$

$$\frac{dR(\tau)}{d\tau} = Q(\tau) + R(0)\,\Phi(\tau) - R(2\tau_0)\,\Phi(2\tau_0 - \tau). \tag{23}$$

Входящие в (22) и (23) постоянные величины определяются из следующих соотношений:

$$Q(0) = \Psi(2\tau_0), \tag{24}$$

$$R(0) + R(2\tau_0) = 2\tau_0 Q(0), \tag{25}$$

$$[R(2\tau_0) - R(0)]\,\Psi(2\tau_0) = \int_0^{2\tau_0} Q(\tau)\,d\tau, \qquad (26)$$

где обозначено

$$\Psi(\tau) = 1 + \int_0^{\tau} \Phi(t)\,dt. \qquad (27)$$

Формула (24) может быть найдена из (17) и (21), формула (25) — из (19) и (20), соотношение (26) — путем интегрирования (23) по τ от 0 до $2\tau_0$.

Пользуясь формулами (20) и (23), для искомой функции $S(\tau)$ получаем

$$2\tau S(\tau) = \int_{\tau_0-\tau}^{\tau_0+\tau} Q(t)\,dt - [R(2\tau_0) - R(0)] \int_{\tau_0-\tau}^{\tau_0+\tau} \Phi(t)\,dt. \qquad (28)$$

Отсюда при помощи соотношений (22) и (23) можно найти выражение функции $S(\tau)$ через резольвентную функцию $\Phi(\tau)$. Подчеркнем, что функция $S(\tau)$ относится к шару оптического радиуса τ_0, а резольвентная функция $\Phi(\tau)$ (как и функции $Q(\tau)$ и $R(\tau)$) — к плоскому слою оптической толщины $2\tau_0$.

Функцию $S(\tau)$ можно рассматривать в качестве функции источников в задаче о рассеянии света в шаре при равномерном распределении источников энергии. Этой задачей занимались Хислет и Уорминг [6], выразившие функцию $S(\tau)$ через функцию $\Psi(\tau)$ (это выражение следует из (28)). Однако выше было установлено, что функция $S(\tau)$ имеет и другой смысл, представляя собой среднее число рассеяний фотона, возникшего на оптическом расстоянии τ от центра шара. Это обстоятельство позволяет определять светимость шара при произвольных источниках энергии. Сейчас мы приведем примеры таких определений.

Равномерное распределение источников. Предположим, что источники энергии распределены в шаре равномерно, т. е. $g(\tau) = C$. В этом случае среднее число рассеяний фотонов в шаре обозначим через N_0, а светимость шара — через L_0. Согласно (13)

$$N_0 = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{3}{\tau_0^3}\int_0^{\tau_0} S(\tau)\,\tau^2 d\tau - 1\right], \qquad (29)$$

а на основании формул (8), (9) и (29) имеем

$$L_0 = \frac{16\pi^2 C}{\alpha^2\lambda}\left[\frac{\tau_0^3}{3} - (1-\lambda)\int_0^{\tau_0} S(\tau)\,\tau^2 d\tau\right]. \tag{30}$$

Входящий в полученные формулы интеграл при помощи (20) приводится к виду

$$\int_0^{\tau_0} S(\tau)\,\tau^2 d\tau = \frac{1}{2}\int_0^{2\tau_0} R(\tau)(\tau-\tau_0)\,d\tau. \tag{31}$$

Пользуясь соотношением (23), мы можем выразить этот интеграл через моменты функции $\Phi(\tau)$, равные

$$\Phi_k = \int_0^{2\tau_0} \Phi(\tau)\,\tau^k d\tau. \tag{32}$$

Делая это, находим

$$\begin{gathered}\int_0^{\tau_0} S(\tau)\,\tau^2 d\tau = \frac{1}{3}\tau_0^3(1+\Phi_0)^2 - \tau_0^2(1+\Phi_0)\Phi_1 + \\ + \tau_0\Phi_1^2 + \frac{1}{6}(1+\Phi_0)\Phi_2 - \frac{1}{2}\Phi_1\Phi_2.\end{gathered} \tag{33}$$

Отметим, что в работе В. В. Иванова [12] получено выражение величины N_0 через моменты резольвентной функции при учете перераспределения излучения по частоте.

Величины N_0 и L_0 можно также выразить через моменты функций $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$, введенных В. А. Амбарцумяном [13]. Эти функции подробно изучены Чандрасекаром [14] (который обозначил их через $X(\mu)$ и $Y(\mu)$) и табулированы в работах Собоути [15] и Карлстедта и Малликина [16].

Согласно [10], для плоского слоя оптической толщины $2\tau_0$ они связаны с функцией $\Phi(\tau)$ соотношениями

$$\varphi(\eta) = 1 + \int_0^{2\tau_0} \Phi(\tau)\, e^{-\frac{\tau}{\eta}}\, d\tau, \tag{34}$$

$$\psi(\eta) = e^{-\frac{2\tau_0}{\eta}} + \int_0^{2\tau_0} \Phi(\tau)\, e^{-\frac{2\tau_0-\tau}{\eta}}\, d\tau. \tag{35}$$

Искомое выражение для величины L_0 можно получить разными способами. Один из них состоит в использовании уравнения переноса излучения в плоском слое, для которого $R(\tau)$ является функцией источников. С помощью этого уравнения нетрудно найти следующее соотношение

$$\frac{4}{\lambda}\left[\frac{\tau_0^3}{3}-(1-\lambda)\frac{1}{2}\int_0^{2\tau_0}R(\tau)(\tau-\tau_0)\,d\tau\right]= \int_0^1[I(2\tau_0,\eta)-I(0,\eta)](\tau_0+\eta)\,\eta\,d\eta, \tag{36}$$

где $I(0,\eta)$ и $I(2\tau_0,\eta)$ — интенсивности излучения, выходящего из слоя под углом $\arccos\eta$ к нормали через границы $\tau=0$ и $\tau=2\tau_0$, соответственно.

Подставляя (31) в (30) и применяя (36), получаем

$$L_0=\frac{4\pi^2C}{\alpha^2}\int_0^1[I(2\tau_0,\eta)-I(0,\eta)](\tau_0+\eta)\,\eta\,d\eta. \tag{37}$$

Но на основании формул, найденных ранее (см. [17], стр. 211), имеем

$$I(2\tau_0,\eta)-I(0,\eta)=2\,\frac{\tau_0[\varphi(\eta)+\psi(\eta)]-\eta[\varphi(\eta)-\psi(\eta)]}{1-\frac{\lambda}{2}\alpha_0+\frac{\lambda}{2}\beta_0}-\lambda\,\frac{\alpha_1-\beta_1-2\tau_0\beta_0}{1-\lambda}[\varphi(\eta)+\psi(\eta)], \tag{38}$$

где

$$\alpha_k=\int_0^1\varphi(\eta)\,\eta^k d\eta,\qquad \beta_k=\int_0^1\psi(\eta)\,\eta^k d\eta. \tag{39}$$

Поэтому светимость шара оказывается равной

$$L_0=\frac{4\pi^2C}{\alpha^2}\left\{2\,\frac{\tau_0^2(\alpha_1+\beta_1)+2\tau_0\beta_2-(\alpha_3-\beta_3)}{1-\frac{\lambda}{2}\alpha_0+\frac{\lambda}{2}\beta_0}-\lambda\,\frac{\alpha_1-\beta_1-2\tau_0\beta_0}{1-\lambda}\left[\tau_0(\alpha_1+\beta_1)+\alpha_2+\beta_2\right]\right\}. \tag{40}$$

Легко убедиться, что выражение (40) эквивалентно формуле, полученной раньше [6] другим способом.

Шар, освещенный параллельными лучами. Пусть шар освещен параллельными лучами, создающими освещенность перпендикулярной к ним площади, равную H_0. Чтобы найти светимость шара по приведенным выше формулам, надо прежде всего определить энергию, поглощенную сферическим слоем, ограниченным сферами с оптическими радиусами τ и $\tau + d\tau$. Мы обозначим эту энергию через $H_0 f(\tau)\, d\tau$. Нетрудно получить, что

$$f(\tau) = \frac{\pi\tau}{\alpha^2} \int\limits_{\tau_0-\tau}^{\tau_0+\tau} e^{-x}\left(1 + \frac{\tau_0^2 - \tau^2}{x^2}\right) dx. \tag{41}$$

Величину $\lambda H_0 f(\tau)\, d\tau$ можно считать энергией, излучаемой источниками, находящимися в упомянутом сферическом слое. Поэтому согласно замечанию, сделанному в конце первого раздела, для применения формул (8), (9) и (13) следует положить

$$\frac{16\pi^2}{\alpha^2} g(\tau)\, \tau^2 = \lambda H_0 f(\tau). \tag{42}$$

Применяя указанные формулы, для светимости шара, которую в данном случае обозначим через L_1, находим

$$L_1 = E_1 [1 - (1 - \lambda) N_1], \tag{43}$$

где

$$E_1 = H_0 \int\limits_0^{\tau_0} f(\tau)\, d\tau, \tag{44}$$

$$N_1 = \frac{\int\limits_0^{\tau_0} S(\tau) f(\tau)\, d\tau}{\int\limits_0^{\tau_0} f(\tau)\, d\tau}. \tag{45}$$

Очевидно, что величина E_1 есть энергия, поглощенная шаром, а N_1 — среднее число рассеяний фотонов в шаре. В формуле (45) первоначальное излучение фотона в шаре считается рассеянием (как это и есть на самом деле). Разумеется, соотношение (43) можно написать на основании простых физических соображений.

Для определения величин N_1 и L_1 по полученным формулам обратим внимание на следующее обстоятельство. Пусть $B(\tau)$ — функция источников, соответствующая заданной функции $g(\tau)$, т. е. определенная уравнением (3). Светимость шара, как легко видеть, можно находить по формуле

$$L = 4\pi \int_0^{\tau_0} B(\tau) f(\tau)\, d\tau, \tag{46}$$

где функция $f(\tau)$ дается формулой (41). При равномерном распределении источников в шаре, т. е. при $g(\tau) = C$, для функции источников имеем: $B(\tau) = CS(\tau)$. Поэтому для светимости шара получаем

$$L_0 = 4\pi C \int_0^{\tau_0} S(\tau) f(\tau)\, d\tau. \tag{47}$$

Формулы (44), (45) и (47) дают

$$N_1 = \frac{L_0 H_0}{4\pi C E_1}. \tag{48}$$

Подставляя (48) в (43) и полагая

$$C = \lambda \frac{H_0}{4\pi}, \tag{49}$$

находим

$$L_1 = E_1 - \frac{1-\lambda}{\lambda} L_0. \tag{50}$$

Таким образом, среднее число рассеяний фотонов N_1 и светимость шара L_1 при освещении шара параллельными лучами с помощью формул (48) и (50) выражаются через светимость шара L_0 при равномерном распределении источников энергии.

Отметим, что соотношение (50) можно переписать в виде

$$\frac{E_1 - L_1}{L_0} = \frac{1-\lambda}{\lambda} = \frac{\varkappa}{\sigma}, \tag{51}$$

где $\varkappa$ и σ — коэффициенты истинного поглощения и рассеяния, соответственно. С коэффициентом поглощения α они связаны формулами

$$\varkappa = (1-\lambda)\alpha, \quad \sigma = \lambda\alpha.$$

Соотношением (51) выражается следующая теорема: отношение энергии, испытавшей в шаре истинное поглощение при освещении его параллельными лучами, к энергии, излучаемой шаром при равномерном распределении источников, равно отношению коэффициента истинного поглощения к коэффициенту рассеяния. При этом предполагается выполнение формулы (49)*.

Поскольку величина L_0 была определена в предыдущем разделе, то величины N_1 и L_1 также можно считать известными. Приведем, в частности, выражение величины L_1 через моменты функций $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$.

Подставляя в формулу (50) выражение (40) и пользуясь соотношением

$$\left(1-\frac{\lambda}{2}\alpha_0+\frac{\lambda}{2}\beta_0\right)\left(1-\frac{\lambda}{2}\alpha_0-\frac{\lambda}{2}\alpha_0\right)=1-\lambda, \tag{52}$$

получаем

$$\begin{gathered} L_1=E_1-\frac{\pi H_0}{\alpha^2}\Big\{2\left[\tau_0^2(\alpha_1+\beta_1)+2\tau_0\beta_0-(\alpha_3-\beta_3)\right]\times \\ \times\left(1-\frac{\lambda}{2}\alpha_0-\frac{\lambda}{2}\beta_0\right)-\lambda(\alpha_1-\beta_1-2\tau_0\beta_0)\left[\tau_0(\alpha_1+\beta_1)+\alpha_2+\beta_2\right]\Big\} \end{gathered} \tag{53}$$

Входящая сюда величина E_1 дается формулой (44). Вводя в нее выражение (41) и производя интегрирование, находим

$$E_1=\frac{\pi H_0}{\alpha^2}\left[\tau_0^2-\frac{1}{2}+\left(\tau_0+\frac{1}{2}\right)e^{-2\tau_0}\right]. \tag{54}$$

С помощью формулы (53) можно определить альбедо шара, под которым понимается отношение энергии, рассеянной шаром во всех направлениях, к энергии, падающей на шар. Так как падающая на шар энергия равна $\pi r_0^2 H_0$, то для альбедо шара имеем

$$A=\frac{L_1}{\pi r_0^2 H_0}, \tag{55}$$

Величина A зависит от τ_0 и λ. В качестве примера укажем, что из полученных формул при $\tau_0\to\infty$ вытекает известное выражение

* Очевидно, что соотношение (51) обобщается на любое тело, освещенное параллельными лучами. В этом случае под E_1 понимается энергия, поглощаемая телом, под L_1 — излучаемая им энергия и под $L_0/4\pi$ — энергия, излучаемая телом при равномерном распределении источников в единице телесного угла в направлении, обратном направлению упомянутых параллельных лучей.

$$A = 1 - 2\alpha_1 \sqrt{1-\lambda}, \tag{56}$$

где α_1 — первый момент функции $\varphi(\eta)$ при $\tau_0 = \infty$ (см., например, [9], стр. 255).

Точечный источник. Пусть точечный изотропный источник светимости L_* находится в шаре на оптическом расстоянии τ от его центра. Тогда согласно физическому смыслу функции $S(\tau)$ среднее число рассеяний фотонов в шаре определяется формулой

$$N(\tau) = \frac{1}{\lambda}[S(\tau) - 1], \tag{57}$$

а светимость шара на основании формул (8) и (57) равна

$$L(\tau) = \frac{L_*}{\lambda}[1 - (1-\lambda) S(\tau)]. \tag{58}$$

Подчеркнем, что формулой (58) дается полная энергия, излучаемая шаром во всех направлениях. Энергия же, испускаемая шаром в разные стороны, различна (за исключением случая, когда источник находится в центре шара).

Рассмотрим два частных случая расположения источника. Если источник находится в центре шара, то в формулах (57) и (58) надо положить $\tau = 0$. В данном случае из формулы (28) следует

$$S(0) = Q(\tau_0) - [R(2\tau_0) - R(0)]\Phi(\tau_0). \tag{59}$$

Заметим, что величины $Q(\tau_0)$ и $\Phi(\tau_0)$ представляют собой значения функций $Q(\tau)$ и $\Phi(\tau)$ в середине плоского слоя оптической толщины $2\tau_0$.

Если источник находится на границе шара, то нам надо найти величину $S(\tau_0)$. Из формул (19) и (20) получаем, что она может быть определена по одной из следующих формул:

$$\tau_0 S(\tau_0) = \tau_0 Q(0) - R(0), \tag{60}$$

$$2\tau_0 S(\tau_0) = R(2\tau_0) - R(0). \tag{61}$$

Пользуясь соотношениями (26) и (22), вместо (61) находим

$$S(\tau_0) = 1 + \Phi_0 - \frac{\Phi_1}{\tau_0}, \tag{62}$$

где Φ_0 и Φ_1 — нулевой и первый моменты функции $\Phi(\tau)$. Подстановка (62) в формулы (57) и (58) при $\tau = \tau_0$ дает

$$N(\tau_0) = \frac{1}{\lambda}\left(\Phi_0 - \frac{\Phi_1}{\tau_0}\right), \tag{63}$$

$$L(\tau_0) = L_*\left[1 - \frac{1-\lambda}{\lambda}\left(\Phi_0 - \frac{\Phi_1}{\tau_0}\right)\right]. \tag{64}$$

Величины $N(\tau_0)$ и $L(\tau_0)$ можно также выразить через моменты функций $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$. Согласно [11] имеем

$$1 + \Phi_0 = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2}\alpha_0 + \frac{\lambda}{2}\beta_0}, \tag{65}$$

$$\Phi_1 = \frac{\lambda}{2}\,\frac{\alpha_1 - \beta_1 - 2\tau_0\beta_0}{1-\lambda}. \tag{66}$$

Подставляя (65) и (66) в формулы (63) и (64) и применяя соотношение (52), получаем

$$N(\tau_0) = \frac{2 - \alpha_0 + \beta_0 - \frac{1}{\tau_0}(\alpha_1 - \beta_1)}{2(1-\lambda)}, \tag{67}$$

$$L(\tau_0) = \frac{L_*}{2}\left[\alpha_0 - \beta_0 + \frac{1}{\tau_0}(\alpha_1 - \beta_1)\right]. \tag{68}$$

При расположении источника на произвольном расстоянии τ от центра шара для определения функции $S(\tau)$, входящей в формулы (57) и (58), можно использовать формулу (28).

Заключительные замечания. Выше было показано, как можно найти среднее число рассеяний фотонов в шаре N и его светимость L. Для шара оптического радиуса τ_0 при произвольных источниках энергии эти величины выражаются через резольвентную функцию $\Phi(\tau)$ для плоского слоя оптической толщины $2\tau_0$.

Такой результат еще раз подчеркивает важность функции $\Phi(\tau)$ и необходимость ее табулирования. Небольшие таблицы функции $\Phi(\tau)$ уже были даны ранее [18, 19]. Вычислялась также и функция $Q(\tau)$ [20]. В настоящее время в Ленинградском университете ведется работа по составлению более подробных таблиц функций $\Phi(\tau)$ и других, связанных с нею функций. Эти таблицы скоро будут опубликованы.

Следует отметить, что в случае плоского слоя большой оптической толщины автором [21] были найдены асимптотические формулы для резольвентной функции $\Phi(\tau)$, а также для функций $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$.

Наличие таких формул делает излишним табулирование этих функций при больших значениях τ_0. С помощью указанных формул можно получить асимптотические выражения для светимости шара большого оптического радиуса ($\tau_0 \gg 1$) при различных источниках энергии.

Заметим еще, что полученные выше формулы можно обобщить на случай рассеяния излучения с перераспределением по частоте и на случай анизотропного рассеяния излучения.

На некоторых из этих вопросов автор предполагает остановиться позднее.

Ленинградский государственный
университет

LIGHT SCATTERING IN A HOMOGENEOUS SPHERE

V. V. SOBOLEV

The formulae are obtained for the mean number of photon scatterings in a sphere and the luminosity of a sphere, the distribution of energy source being arbitrary. These quantities are expressed in terms of the resolvent function $\Phi(\tau)$ for a plane layer. Three particular forms of the source distribution are considered in more detail: 1) uniform, 2) external illumination by parallel beams and 3) point source located at an arbitrary distance from the center of the sphere.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян*, Бюлл. Ереванской астр. обс., № 6, 1945 (см. также „Научные труды", т. I, Ереван, 1960).
2. *B. Davison*, Neutron Transport Theory, Oxford, 1958. (русск. перевод: Б. Дэвисон, Теория переноса нейтронов, Атомиздат, 1960).
3. *В. В. Соболев*, Курс теоретической астрофизики, Наука, М., 1967.
4. *В. В. Соболев*, Сб. „Кинематика и динамика звездных систем и физика межзвездной среды", Алма-Ата, 1965.
5. *Д. И. Нагирнер*, Труды АО ЛГУ, 22, 1965.
6. *M. A. Heaslet, R. F. Warming*, J. Quantit. Spectrosc. Radiat. Transfer, 5, 669, 1965.
7. *E. C. Gritton, A. Leonard*, J. Quantit. Spectrosc. Radiat. Transfer, 10, 1095, 1970.
8. *T. W. Mullikin*, Some probabilistic results in transport theory, 1969 (препринт).
9. *R. E. Bellman, H. H. Kagiwada, R. E. Kalaba, S. Ueno*, J. Math. Phys., 9, 909, 1968.
10. *В. В. Соболев*, ДАН СССР, 116, 45, 1957; 120, 69, 1958.
11. *В. В. Соболев*, Астрофизика, 2, 135, 239, 1966; 3, 5, 137, 1967.
12. *В. В. Иванов*, Сб. „Звезды, туманности, галактики", Ереван, 1969.

13. *В. А. Амбарцумян*, ДАН СССР, 38, 257, 1943 (см. также „Научные труды", т. I, Ереван, 1960).
14. *S. Chandrasekhar*, Radiat. Transfer, Oxford, 1950. (русск. перевод: С. Чандрасекар, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953).
15. *Y. Sobont*, Ap. J., Suppl. ser., 7, No. 72, 1963.
16. *J. L. Carlstedt, T. W. Mullikin*, Ap. J., Suppl. ser., 12, No, 113, 1966.
17. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.
18. *В. В. Соболев, И. Н. Минин*, Астрон. ж., 38, 1025, 1961.
19. *H. H. Kagiwada, R. E. Kalaba*, RM-4958-PR, The RAND Corporation, 1966.
20. *J. Buell, R. Kalaba, S. Ueno*, Астрофизика, 7, 23, 1971.
21. *В. В. Соболев*, ДАН СССР, 155, 316, 1964.