АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 7 НОЯБРЬ, 1971 ВЫПУСК 4

# К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК ЗВЕЗД

Г. С. БИСНОВАТЫЙ-КОГАН, Я. Б. ЗЕЛЬДОВИЧ, Н. И. ШАКУРА

Поступила 8 февраля 1971

Исследована устойчивость адиабатических оболочек с показателем адиабаты $\gamma$, находящихся во внешнем поле ядра. В случае жесткого ядра для устойчивости сферической оболочки достаточно иметь показатель адиабаты $\gamma > 1$.

Получены условия устойчивости оболочки в случае ядра, сжимаемость которого характеризуется показателем $\gamma_1 = (\partial \ln P_0/\partial \ln \bar{\rho})_s$ ($P_0$ — давление на границе ядра, $\bar{\rho}$ — средняя плотность ядра).

1. В процессе эволюции звезды химический состав ее становится неоднородным, в центре появляется ядро, состоящее из более тяжелых элементов, чем внешняя область. В этом случае физически оправдано разделение звезды на ядро и оболочку, и возникает задача об исследовании устойчивости оболочки сравнительно малой массы, когда ее самогравитацией можно пренебречь. Такая задача возникает, например, если звезда становится неустойчивой по отношению к сбросу оболочки [1]. В качестве простейшего примера в данной работе исследуется устойчивость политропных оболочек в гравитационном поле ядра.

Известно, что показатель адиабаты $\gamma = 4/3$ является критическим для сферически симметричного газового шара (звезды), находящегося в равновесии в собственном поле тяжести. При $\gamma > 4/3$ решение устойчиво относительно малых возмущений; при $\gamma < 4/3$ стационарное состояние существует, но оно неустойчиво, и возмущения должны привести к сжатию или расширению со скоростью порядка скорости свободного падения из любого начального состояния. За подробным обсуждением вопросов устойчивости различных моделей звезд, а также причин, нарушающих ее, отсылаем к [2].

С другой стороны, достаточным условием устойчивости* плоской атмосферы в постоянном внешнем гравитационном поле является рост давления с увеличением плотности, т. е. $\gamma > 0$, что совпадает с необходимым условием существования любой системы $(\rho/P)(\partial P/\partial\rho)_s = \gamma > 0$.

С учетом сферичности давление уже не есть вес столба вещества, находящегося над единицей поверхности, и вопрос об устойчивости равновесных решений требует дополнительных исследований.

2. Сформулируем задачу. В поле тяжести звезды массы $M$ находится газовая атмосфера (оболочка) с массой $m \ll M$, так что везде в атмосфере гравитационный потенциал равен $GM/r$. Радиус звезды пусть будет $r_0$, радиус оболочки $r_1$ определяется из решения уравнения равновесия и, вообще, может быть $r_1 \to \infty$ при конечной массе $m$.

Структура оболочки определяется уравнением равновесия

$$\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} = -\frac{GM}{r^2}. \tag{1}$$

Для давления имеем выражение $P = K(s)\rho^\gamma$, где $K(s)$ зависит от энтропии и химического состава, которые полагаются постоянными. Для дальнейшего удобно ввести в рассмотрение термодинамическую функцию энтальпию $H$, для которой при адиабатических смещениях справедливо соотношение $dH = (1/\rho)\,dP$. С учетом этого уравнение (1) элементарно интегрируется:

$$H = \frac{\gamma}{\gamma-1}K\rho^{\gamma-1} = \frac{GM}{r} + H_0 - \frac{GM}{r_0}, \tag{2}$$

где $H_0 = \frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{P_0}{\rho_0}\right)$ — энтальпия у основания оболочки. На внешней границе атмосферы $H = 0$, $\rho = 0$, и выполняется следующее равенство:

$$\frac{GM}{r_1} = \frac{GM}{r_0} - H_0, \qquad r_1 = \frac{r_0}{1 - \dfrac{H_0 r_0}{GM}}. \tag{3}$$

---

* Везде ниже рассматривается адиабатическая устойчивость относительно радиальных возмущений. Конфигурации, рассматриваемые здесь, предполагаются устойчивыми относительно конвекции. В этом случае устойчивость относительно радиальных возмущений гарантирует устойчивость и относительно нерадиальных возмущений [3].

Масса оболочки выражается интегралом

$$m = \int_{r_0}^{r_1} 4\pi\rho\, r^2 dr. \tag{4}$$

Полная энергия оболочки есть

$$\varepsilon = \int_0^m \left(E_t - \frac{GM}{r}\right) dm. \tag{5}$$

Здесь $E_t$ — внутренняя энергия единицы массы, для идеального газа $E_t = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{P}{\rho}$, второй член в интеграле есть гравитационная энергия в поле ядра.

Подставляя значения плотности в выражении для энергии, легко получить соотношения между полной $\varepsilon$; тепловой $\varepsilon_t$ и гравитационной $\varepsilon_g$ энергиями звезды:

$$\varepsilon_g = -\frac{\gamma-1}{\gamma} 4\pi r_0^3 \rho(r_0) \frac{GM}{r_0}\left(1 - \frac{r_0}{r_1}\right) - 3(\gamma - 1)\varepsilon_t, \tag{6}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_t + \varepsilon_g = -\frac{\gamma-1}{\gamma} 4\pi r_0^3 \rho(r_0) \frac{GM}{r_0}\left(1 - \frac{r_0}{r_1}\right) - (3\gamma - 4)\varepsilon_t.$$

Полученное выражение можно рассматривать как аналог теоремы вириала для оболочки. Необходимым условием существования полученного решения является $\gamma > 1$, в противном случае $\rho$ убывает с $r$ очень медленно и не может быть удовлетворено граничное условие на $\infty$.

Физически ясно, что если масса оболочек есть монотонно растущая функция параметра $H_0$, то равновесие устойчиво. Строго это можно доказать, воспользовавшись вариационным принципом, аналогично исследованию устойчивости звезды в целом [4]. Для равновесия необходим экстремум полной энергии $\varepsilon$, т. е. равенство нулю первой вариации $\delta\varepsilon = 0$. Стандартным образом варьируя (5), получаем уравнение равновесия (1).

В теории вариационного исчисления (см., например, [5]) строго доказывается, что при положительности производной $(dP/d\rho) > 0$ достаточным и необходимым условием устойчивости равновесного решения является непересечение соседних экстремалей, т. е. решений уравнения (1), отличающихся малой величиной $\Delta m$. Физически это означает, что при добавлении на поверхность равновесной атмосферы избытка массы $\Delta m$ при устойчивой конфигурации плотность в каждой точке должна возрасти, что эквивалентно условию монотонности $m(H_0)$.

3. Рассмотрим сначала атмосферу, покоящуюся на абсолютно жесткой стенке, т. е. $dr_0/dP_0 = 0$. Если решение существует, то $(dH/d\rho) > 0$ $(\gamma > 1)$ и при $(dP/d\rho) > 0$ имеем $(d\rho/dH) > 0$ — плотность является монотонно растущей функцией энтальпии. Тем самым достаточным условием устойчивости является выполнение неравенства $(dm/dH_0) > 0$, что, как показано выше, выполняется всегда для $\gamma > 1$.

Введем в (4) безразмерную переменную $x = r/r_0$. Тогда

$$m = 4\pi r_0^3 \left(\frac{GM}{r_0}\frac{\gamma-1}{K\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \int\limits_1^{\left(1-\frac{H_0 r_0}{GM}\right)^{-1}} \left(\frac{H_0 r_0}{GM} - 1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} x^2 dx. \qquad (7)$$

Дифференцируя по $H_0$, получим

$$\frac{dm}{dH_0} = 4\pi r_0^3 \left(\frac{GM}{r_0}\frac{\gamma-1}{K\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \int\limits_1^{\left(1-\frac{H_0 r_0}{GM}\right)^{-1}} \cdot \left(\frac{H_0 r_0}{GM} - 1 + x\right)^{\frac{1}{\gamma-1}-1} \frac{r_0}{GM(\gamma-1)} x^2 dx \qquad (8)$$

Из (8) видно, что $(dm/dH_0) > 0$ при $\gamma > 1$, т. е. оболочка с жестким внутренним ядром устойчива при $\gamma > 1$.

4. В общем случае следует учитывать упругость внутренней границы и изменение $r_0$ с изменением $H_0$. Теперь

$$\frac{dm}{dH_0} = \left.\frac{\partial m}{\partial r_0}\right|_{H_0} \frac{dr_0}{dH_0} + \left.\frac{\partial m}{\partial H_0}\right|_{r_0}. \qquad (9)$$

Введем показатель адиабаты $\gamma_1$, характеризующий упругость массы $M$ следующим образом: $\gamma_1 = (\bar\rho/P_0)(\partial P_0/\partial\bar\rho)_s$, где $\bar\rho$ — средняя плотность массы $M$, для которой справедливо соотношение $M = (4\pi/3)\bar\rho r_0^3$. Используя сохранение массы ядра $M$ и условие непрерывности давления на границе $r_0$, получим

$$\frac{dr_0}{dH_0} = -\frac{1}{3}\,\frac{\gamma}{\gamma_1(\gamma-1)}\,\frac{r_0}{H_0}. \qquad (10)$$

Подставляя (10) в (9), используя (7), получим

$$\frac{dm}{dH_0} = -\frac{1}{3}\,\frac{\gamma}{\gamma_1(\gamma-1)}\left(3-\frac{1}{\gamma-1}\right)\frac{m}{H_0} + \left|1-\frac{1}{3}\,\frac{\gamma}{\gamma_1(\gamma-1)}\right|\frac{\partial m}{\partial H_0}\bigg|_{r_0}. \tag{11}$$

Результатом условия $(dm/dH_0) = 0$ в (11) для границы устойчивости должно быть семейство кривых в плотности $(\gamma, \gamma_1)$, параметром для которых является масса оболочки. По одну сторону кривой $(dm/dH_0) > 0$ и условие устойчивости для данной массы выполняется, по другую сторону $(dm/dH_0) < 0$ и равновесное решение неустойчиво. Задача позволяет получить аналитическое решение только для двух предельных моделей: а) $r_1 \to \infty$, $(H_0 r_0/GM) \to 1$, б) $(r_1 - r_0)/r_0 = (H_0 r_0)/GM \ll 1$, т. е. для бесконечно протяженной и тонкой атмосфер.

Для модели а)

$$\begin{aligned} m &= 4\pi\,\frac{\gamma-1}{4-3\gamma}\,\rho_0 r_0^3 \qquad && \gamma < \frac{4}{3} \\ m &= \infty && \gamma \geqslant \frac{4}{3} \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial H_0}\bigg|_{r_0} &= \frac{m}{H_0}\,\frac{4-3\gamma}{(\gamma-1)(5-4\gamma)} \qquad && \gamma < \frac{5}{4} \\ \frac{\partial m}{\partial H_0}\bigg|_{r_0} &= \infty && \gamma \geqslant \frac{5}{4} \end{aligned} \tag{13}$$

В соответствии с этим имеем две различные области (рис. 1). В полосе $(5/4) \leqslant \gamma < (4/3)$ для устойчивости решения достаточно, чтобы в (9) коэффициент при $(\partial m/\partial H_0)|_{r_0}$ был положительным, что выполняется при условии

$$\gamma_1 > \frac{\gamma}{3(\gamma-1)}, \qquad \frac{5}{4} \leqslant \gamma < \frac{4}{3}. \tag{14}$$

Для $\gamma < (5/4)$ получим из (11) с учетом (12), (13) неравенство

$$\gamma_1 > \frac{4}{3}\gamma, \qquad \gamma < \frac{5}{4}. \tag{15}$$

Для иллюстрации приведем выражения полной, тепловой и гравитационной энергий оболочки

$$\varepsilon^{а)} = -\frac{GMm}{r_0}\frac{(4-3\gamma)(\gamma-1)}{\gamma(3-2\gamma)},$$

$$\varepsilon_t^{а)} = \frac{GMm}{r_0}\frac{4-3\gamma}{\gamma(3-2\gamma)}, \qquad (16)$$

$$\varepsilon_g^{а)} = -\frac{GMm}{r_0}\frac{4-3\gamma}{3-2\gamma}.$$

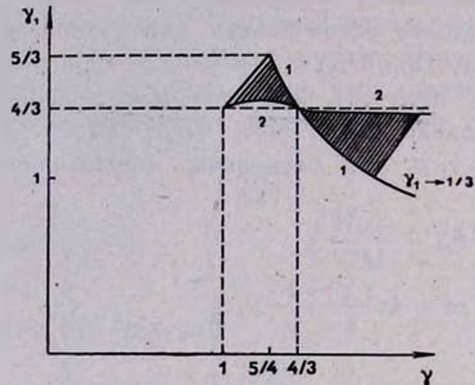


Рис. 1. Кривые, разделяющие область устойчивости (сверху) от области неустойчивости: 1 — для бесконечно протяженной атмосферы, 2—для бесконечно тонкой атмосферы; линии для промежуточных моделей расположены в заштрихованных областях и пересекаются только в точке $\gamma=\gamma_1=4/3$.

Для тонкой атмосферы удобно ввести разложение по малой величине $\delta = (H_0 r_0/GM) = 1-(r_0/r_1) \ll 1$. Ограничиваясь лишь линейными членами, для энергий имеем:

$$\varepsilon^{б)} = -\frac{GMm}{r_0}\left[1+\frac{2-\gamma}{2\gamma-1}\delta\right],$$

$$\varepsilon_t^{б)} = \frac{GMm}{r_0}\frac{\delta}{2\gamma-1}\left[1-\frac{4(\gamma-1)}{2\gamma-1}\delta\right], \qquad (17)$$

$$\varepsilon_g^{б)} = -\frac{GMm}{r_0}\left[1-\frac{\gamma-1}{2\gamma-1}\delta\right].$$

Для массы и ее производной имеем

$$m = 4\pi r_0^3\left(\frac{GM}{r_0}\frac{\gamma-1}{K\gamma}\right)^{\gamma-1}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\delta^{\frac{1}{\gamma-1}}\left[1+\frac{4(\gamma-1)}{2\gamma-1}\delta\right], \qquad (18)$$

$$\frac{dm}{dH_0} = \frac{m}{H_0}\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{\gamma_1}\left[\gamma_1-\frac{4}{3}+4\frac{\gamma-1}{\gamma}\gamma_1\left(1-\frac{5}{3}\frac{\gamma}{\gamma_1(2\gamma-1)}\right)\right]. \qquad (19)$$

Уравнение для границы, разделяющей устойчивую и неустойчивую области, можно записать в виде

$$\gamma_1 - \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \frac{(\gamma - 1)(4 - 3\gamma)}{\gamma(2\gamma - 1)} \delta. \tag{20}$$

Отметим одну особенность: при $\gamma = 4/3$ из (11) следует, что для устойчивости необходимо и достаточно $\gamma_1 > 4/3$. Это означает, что для конфигурации с постоянным $\gamma$, у которой оболочка не гравитирует, имеет место тот же критерий устойчивости $\gamma > 4/3$, что и для полностью самогравитирующего объекта.

Ввиду того, что второй член в (11) при $\gamma > 5/4$ имеет более высокий порядок стремления к бесконечности, при $r_1 \to \infty$, в том числе и при $\gamma > 4/3$, когда $m \to \infty$, условие устойчивости (14) $\gamma_1 > (\gamma/3(\gamma - 1))$ справедливо и для $\gamma > 4/3$.

В предыдущем рассмотрении принималась во внимание только упругость в ядре вещества, характеризуемая показателем адиабаты $\gamma_1$. Для того, чтобы определить, какое распределение вещества в ядре необходимо, нужно решить детальную задачу об устойчивости в ядре. Если вещество в ядре (за исключением центральной части) расположено по закону $P \sim \rho^{\gamma_4}$, то вид распределения вещества в ядре можно получить из аналогии с самогравитирующим случаем [6], когда для устойчивости ядра нужно

$$\gamma_1 > \frac{8}{\frac{3}{\gamma_4}\left(\frac{3}{\gamma_4} - 1\right) - \frac{1}{4}}. \tag{21}$$

Для $\gamma_1 = \frac{1}{3}$ имеем $\gamma_4 \leqslant \frac{6}{\sqrt{95}} \sqrt{1 + \frac{1}{95}} - \frac{6}{95} \approx 0.55$, т. е. для устойчивости давление в ядре, упругость которого характеризуется показателем $\gamma_1$, не должно спадать быстрее, чем $\rho^{0.55}$. При этом $\gamma_1$ было отождествлено с $\gamma_0 = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right)$, соответствующее веществу ядра. На самом деле такое отождествление справедливо лишь при $\gamma_1 = 4/3$, т. е. когда сжатие является гомологическим. Когда $\gamma_0, \gamma_1 \neq 4/3$, сжатие не является гомологическим и имеет [7] $\gamma_1 > \gamma_0$ для $\gamma_0 > 4/3$, $\gamma_1 < \gamma_0$ для $\gamma_0 < 4/3$, т. е. истинная упругость ядра характеризуется величиной $\gamma_0 > \gamma_1 = 1/3$ в предельном случае максимально стабилизирующей оболочки.

Для нахождения связи $\gamma_1(\gamma_0, (\rho_0/\rho_c))$ необходимо нахождение собственной функции радиальных колебаний ядра данной массы. При известной связи $\gamma_1$ и $(\gamma_0, \rho_0/\rho_c)$ можно найти и распределение энтропии по звезде, характеризуемое величиной $\gamma_4$. Связь $\gamma_0$ и $\gamma_4$ по формуле (21) из [6] является в этом случае точной.

Полученные результаты можно использовать при рассмотрении устойчивости протяженных оболочек звезд типа красных гигантов, где разделение на плотное ядро и разреженную оболочку имеет реальный физический смысл.

Институт прикладной математики
АН СССР

## ON THE PROBLEM OF STABILITY OF ADIABATIC ENVELOPES OF STARS

G. S. BISNOVATY-KOGAN, Ya. B. ZELDOVICH, N, I. SHAKURA

The stability of adiabatic envelopes with adiabatic index $\gamma$ in the external field of the nucleous is investigated. For the case of hard core the condition of stability is $\gamma > 1$. The condition of stability is obtained also for the case of compressible core with, compressibility characteristic $\gamma_1 = \left(\frac{\partial \ln P_0}{\partial \ln \bar{\rho}}\right)_s$, where $P_0$ is the pressure on the boundary of the core, $\bar{\rho}$ — is the average density of the nucleous.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *B. Paczynski*, Acta Astr., 20, 47, 1970.
2. *Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков*, Релятивистская астрофизика, Наука, М., 1967.
3. *Э. Э. Шноль*, Астрон., ж., 46, 970, 1969.
4. *Я. Б. Зельдович*, Вопросы космогонии, 9, 1963.
5. *И. М. Гельфанд, С. В. Фомин*, Вариационное исчисление, физ.-мат. лит., 1961.
6. *J. Ipser*, Ap. and Space Sci., 7, 561, 1970.
7. *Д. К. Надежин*, Диссертация, МФТИ, 1964.