АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 7 МАЙ, 1971 ВЫПУСК 2

К ВОПРОСУ О ВРАЩЕНИИ КОНФИГУРАЦИЙ С ОДНОРОДНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВЕЩЕСТВА В ОТО

Г. Г. АРУТЮНЯН, Д. М. СЕДРАКЯН

Поступила 30 октября 1970

В квадратичном по угловой скорости приближении решена задача об однородном вращении модели, состоящей из несжимаемой жидкости. Рассчитаны внутренняя структура и важнейшие интегральные параметры конфигураций.

1. Есть основания полагать, что взаимодействие между нуклонами на расстояниях порядка $0.5 \cdot 10^{-13}$ *см* характеризуется эффективным ядерным потенциалом с так называемой „жесткой сердцевиной" [1]. Если понимать этот потенциал буквально, то можно допустить превышение плотности ядерного вещества примерно в два раза, после чего оно становится несжимаемым. По-видимому, это делает возможным рассмотрение моделей с несжимаемым веществом.

Вопросу вращения конфигураций с несжимаемой жидкостью по ньютоновской теории посвящен ряд работ [2], в которых определяются равновесные формы равномерно вращающейся как целое, однородной, гравитирующей массы жидкости и исследуется устойчивость этих форм по отношению к малым возмущениям. В релятивистском случае представление о модели звезды с несжимаемой жидкостью сталкивается с очевидными трудностями. В частности, нет удовлетворительного ответа на вопрос, какие из известных физических принципов могли бы служить основанием для того, чтобы приписывать такого рода взаимодействию какой-нибудь смысл при релятивистских скоростях. Но, несмотря на то, что в модели несжимаемой жидкости нарушается принцип причинности (скорость звука превышает скорость света), нам кажется интересным рассмотреть свойства звезды, состоя-

щей из несжимаемого вещества, тем более, что состояние такого идеализированного объекта легко поддается анализу, и некоторые общие заключения могут быть перенесены на случай реальных моделей.

По теории Эйнштейна задача об однородном вращении модели звезды, состоящей из несжимаемой жидкости, рассмотрена в [3] в линейном по угловой скорости приближении, соответствующем вращению шара с учетом лишь „кориолисовых сил".

В настоящей работе получены основные характеристики вращающихся конфигураций с однородным распределением несжимаемого вещества во втором приближении по Ω (Ω —угловая скорость вращения).

2. В сферических координатах метрика, создаваемая стационарным вращением конфигурации, может быть записана в виде

$$-dS^2 = e^{\lambda}dR^2 + e^{\mu}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + 2\omega e^{\mu}\sin^2\theta d\varphi\, dt + \\ + (\omega^2 e^{\mu}\sin^2\theta - e^{\nu})\,dt^2, \tag{1}$$

где λ, μ, ν, ω — функции от R, θ и Ω.

Поскольку метрика должна оставаться неизменной при преобразовании $t \to -t$, а угловая скорость при этом меняет знак, то все компоненты метрического тензора, кроме ω, должны быть четными функциями Ω. Все неизвестные величины разлагаются в ряд по малому безразмерному параметру $\beta = \Omega^2/8\pi\rho$, причем сохраняются члены не выше второго порядка по Ω:

$$e^{-\lambda} = e^{-\lambda_0}(1 + \beta f(R, \theta)), \qquad e^{\nu} = e^{\nu_0}(1 + \beta\Phi(R, \theta)), \\ e^{\mu} = R^2(1 + \beta U(R, \theta)), \qquad \omega = \sqrt{\beta}\, q(R), \tag{2} \\ P = P_0 + \beta p(R, \theta), \qquad K(R, \theta) = K_0(R) + \beta N(R, \theta).$$

В качестве независимых уравнений, определяющих искомые функции, выбраны следующие уравнения Эйнштейна [4]:

$$G_1^1 - G_0^0 = 8\pi(T_1^1 - T_0^0), \qquad G_2^1 = 0, \\ G_2^2 + G_3^3 = 8\pi(T_2^2 + T_3^3), \qquad G_0^3 = 8\pi T_0^3, \tag{3}$$

в совокупности с уравнениями гидродинамики $T^{k}_{i\,;\,k} = 0$, которые сводятся к интегралу

$$K(R, \theta) = 2\int \frac{dP}{P + \rho} = -\nu - \ln[1 - e^{\mu}(\omega + \Omega)^2\sin^2\theta] + c, \tag{4}$$

а также соотношением $u^3 = \Omega u^0$, где

$$u^0 = [e^{\nu} - e^{\mu}(\omega + \Omega)^2\sin^2\theta]^{-1/2}.$$

В случае несжимаемой жидкости уравнение состояния вещества легко свести к однопараметрическому, если ввести безразмерную величину $\alpha = P_c/\rho$ (P_c — центральное давление, $\rho = \text{const}$ — плотность).

Вне распределения масс задача решается аналитически [4]. Внутренняя же задача требует численного интегрирования.

Приведем для справок выражения невозмущенных величин. e^{λ_0}, e^{ν_0} и P_0 определяются из уравнений [5]

$$e^{-\lambda_0}\left(\frac{\nu_{11}^0}{2} - \frac{\nu_1^0\lambda_1^0}{4} + \frac{\nu_1^{02}}{4} - \frac{\lambda_1^0 - \nu_1^0}{2R}\right) = 4\pi P_0. \tag{5}$$

$$e^{-\lambda_0}\left(\frac{\nu_1^0}{R} + \frac{1}{R^2}\right) - \frac{1}{R^2} = 8\pi P_0. \tag{6}$$

$$e^{-\lambda_0}\left(\frac{\lambda_1^0}{R} - \frac{1}{R^2}\right) + \frac{1}{R^2} = 8\pi\rho, \tag{7}$$

которые легко интегрируются при $\rho = \text{const}$. Из (7) имеем

$$e^{-\lambda_0} = 1 - \frac{8\pi\rho R^2}{3}. \tag{8}$$

Далее, просуммировав (5) и (6) и имея в виду (8), для ν^0 получим

$$e^{\nu_0} = \frac{1}{4C^2}\left(3 - C\sqrt{1 - \frac{8\pi\rho R^2}{3}}\right)^2. \tag{9}$$

(Здесь и в дальнейшем приняты обозначения $\partial\psi/\partial R = \psi_1$, $\partial^2\psi/\partial R = \psi_2$). Те же уравнения дают $P_0 = P_0(R)$:

$$P_0 = \rho\frac{C\sqrt{1 - \frac{8\pi\rho R^2}{3}} - 1}{3 - C\sqrt{1 - \frac{8\pi\rho R^2}{3}}}, \tag{10}$$

где

$$C = \frac{3\alpha + 1}{\alpha + 1}.$$

Система уравнений (3), (4) допускает разделение переменных, если решения искать в виде разложения в ряд по полиномам Лежандра [4]

$$\begin{aligned} N(R, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} N_l(R) P_l(\gamma), \qquad f(R, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l(R) P_l(\gamma), \\ \Phi(R, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \Phi_l(R) P_l(\gamma), \qquad p(R, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} p_l(R) P_l(\gamma), \end{aligned} \tag{11}$$

причем все неизвестные функции (сказанное не относится к функции $q(R, \theta)$, способ определения которой будет описан ниже) можно в итоге выразить через $N_l(t)$ и свести решение поставленной задачи к интегрированию следующих уравнений:

$$\frac{d^2N_l(t)}{dt^2} + X(t)\frac{dN_l(t)}{dt} + Y_l(t)\,N_l(t) = \frac{3}{\sqrt{8\pi\rho}}\left[Z(t)\,\delta_{l0} + V(t)\,\delta_{l2}\right] \qquad (12)$$

$$l = 0,\ 2,$$

где

$$X(t) = -\left|\frac{2t^2+1}{t(1-t^2)} + \frac{2Ct-3}{t(3-Ct)}\right|,$$

$$Y_0(t) = \frac{3(2Ct+3)}{(1-t^2)(3-Ct)} - \frac{4C^2}{(3-Ct)^2},$$

$$Y_2(t) = Y_0(t) - \frac{6}{(1-t^2)^2},$$

$$Z(t) = \frac{8C^2t^2}{3(1-t^2)(3-Ct)^2}\left\{Q^2\left|6 - \frac{4C}{t}\left(\frac{1-t^2}{3-Ct}\right) + \right.\right.$$

$$+ \frac{6}{t^2}\left(\frac{1-t^2}{3-Ct}\right) - \frac{96\,C}{t}\left(\frac{1-t^2}{3-Ct}\right)^2 + \frac{60\,C^2}{t^2}\left(\frac{1-t^2}{3-Ct}\right)^3\Big| +$$

$$+ Q_1^2\left|1 + 2C^2\left(\frac{1-t^2}{3-Ct}\right)^2\right| +$$

$$\left. + QQ_1\left|4 - \frac{4C}{t}\left(\frac{1-t^2}{3-Ct}\right) - \frac{48\,C}{t}\left(\frac{1-t^2}{3-ct}\right)^2\right|\right\},$$

$$V(t) = \frac{4C^2t^2}{(3-Ct)^2(1-t^2)}\left\{-2Q^2\left|3 - \frac{2C}{t}\left(\frac{1-t^2}{3-Ct}\right) + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{3}{t^2}\left(\frac{1-t^2}{3-Ct}\right) - \frac{2}{t^2}\right| - Q_1^2 + 4QQ_1\left|\frac{C}{t}\left(\frac{1-t^2}{3-Ct}\right) - 1\right|\Big\} + \frac{Z(t)}{2},$$

$$Q(t) = q(t) + i\sqrt{8\pi\rho}\,.$$

Система уравнений записана в системе $m_n^4c^5/8\pi h^3 = 1$, $c = K = 1$. Что касается функции $\omega(t, \theta)$, то она определяется из уравнения

$$\frac{e^{-\lambda_0}}{2}\left[\omega_{11} + \frac{\omega_1}{2}\left(\frac{8}{R} - \nu_1^0 - \lambda_1^0\right) + \frac{1}{R^2}\left[\omega_{22} + 3\omega_2 \operatorname{ctg}\theta\right]\right] =$$

$$= 8\pi(P_0 + \rho)(\omega + \Omega). \qquad (13)$$

Решение (13) в вакууме имеет вид [3]:

$$\omega(R) = -\sqrt{\beta}\sum_{l=0}^{\infty} C_l z^{l+1} F(l+2,\ l-1,\ 2l+2,\ z)\, P_l^{(1)}(\gamma). \qquad (14)$$

Здесь $P_l^{(1)} = dP_l^1/d\gamma$, P_l^1 — первый присоединенный полином Лежандра, $\gamma = \cos\vartheta$, $z = 2U/R$, $F(l+2,\ l-1,\ 2l+2,\ z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Запишем внутреннее решение в виде разложения по присоединенным полиномам Лежандра

$$\omega = \sqrt{\beta}\sum_{l=0}^{\infty} b_l Q_l(R)\, P_l^{(1)}(\gamma). \qquad (15)$$

Поскольку $\omega \sim \Omega$, а изменение формы поверхности звезды имеет место лишь в приближении Ω^2, то, ограничиваясь вторым приближением по Ω, нужно требовать непрерывность ω и ее производной на поверхности сферы радиуса R_0 (R_0 — радиус соответствующей сферической конфигурации). Из условия сшивки непосредственно следует, что отличны от нуля только коэффициенты C_1 и b_1, так что ω — функция только радиуса. Для значений параметра C в интервале $1 \leqslant C < 3$ внутреннее решение ω выражается следующим образом:

$$\omega = \sqrt{\beta}\,[kF(a,\ q;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ x) - \sqrt{8\pi\rho}\,],$$

где

$$F(a,\ q;\ \alpha,\ \beta,\ \delta,\ x) = 1 + \sum_n c_n x^n,$$

$$a = \frac{3+C}{2C},\quad q = \frac{6}{C},\quad \alpha = 0,\quad \beta = 2,\quad \delta = \frac{5}{2},\quad \gamma = \frac{5}{2},$$

$$x = \frac{3+C}{2}\,\frac{1-t}{3-Ct},$$

коэффициенты c_n определяются из рекуррентных формул, приведенных в [3], а $k = 3/(3F(R_0) + R_0F_1(R_0))$ — из условия сшивки.

Зная $q(R)$, можно перейти к интегрированию системы (12). Функцию $N_l(R)$ удобно искать в виде

$$N_0 = N_0(t),$$
$$N_2 = B_2L_2(t) + S_2(t),$$

где $B_2L_2(t)$ — общее решение соответствующего однородного уравне-

ния, е $S_2(t)$ — частное решение неоднородного. В качестве начальных условий в интервале $1 \leqslant C \leqslant 2$ выбираем следующие. Поскольку в выражение $K(R, \theta)$ входит произвольная постоянная $C = C_0 + \beta C_{10}$, то, без нарушения общности, можно считать начальные значения $N_0(t)$ равными нулю

$$N_0(1) = \frac{dN_0(1)}{dt} = 0.$$

Вблизи центра конфигурации $L_2 = (1 - t)$, а $S_2 \sim (1 - t)^2$, поэтому

$$L_2(1) = 0, \quad dL_2/dt = -1,$$

$$S_2(1) = dS_2/dt = 0.$$

Как внешние, так и внутренние решения содержат произвольные постоянные, которые определяются из требования непрерывности компонент метрического тензора и их первых производных на границе конфигурации.

Поскольку во втором приближении конфигурации перестают быть сферическими, радиус границы в направлении θ можно записать следующим образом:

$$r(\theta) = 1 + \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l P_l(\gamma), \tag{17}$$

где $r(\theta)$ — относительный радиус R/R_0, $\gamma_l = d_l/R_0$.

Сравнивая ньютоновский потенциал на больших расстояниях с нерелятивистским пределом g_{00}, получим массу вращающихся конфигураций и квадрупольный момент [4]

$$M_{\text{вр}} = M_0 - \frac{\beta}{2} A_0,$$

$$D = A_2 + \frac{C_1^2}{M_0}.$$

Максимальная угловая скорость вращения определяется из условия отсутствия истечения вещества с экватора, т. е. из равенства нулю полной силы, действующей на частицу в постоянном гравитационном поле [5]

$$\vartheta_{\max} = \frac{\Omega_{\max}^2}{8\pi\rho} = \frac{1}{6 + \dfrac{A_0}{R_0}\dfrac{1}{1-t^2} + 3(\gamma_0 - 0.5\gamma_2)}.$$

3. Численное интегрирование системы (12) проведено на ЭВМ „Наири" методом Рунге-Кутта. Результаты представлены таблицей и на рис. 1—4.

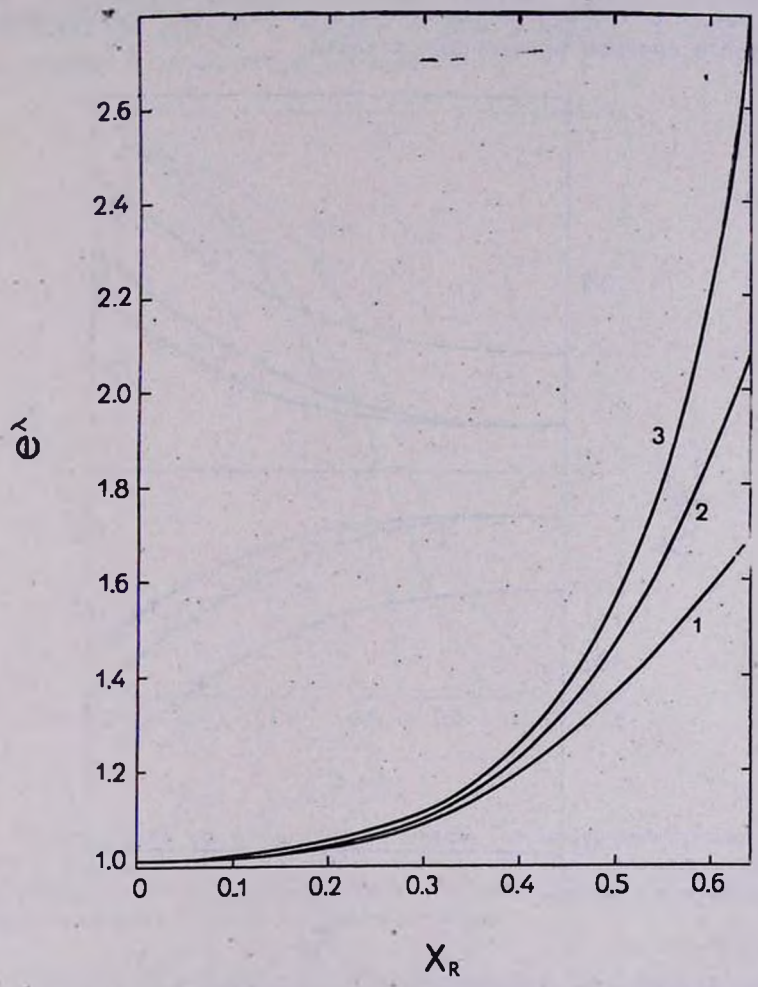

Рис. 1. Распределение e^{λ} внутри конфигурации (C=1.3). На оси абсцисс отложено значение x_R. Кривая 1 соответствует статической модели, кривая 2 представляет распределение e^{λ} в направлении экватора, кривая 3 — e^{λ} в направлении $\theta=0$.

Нужно отметить, что все величины приводятся в специальной системе отсчета $k = c = 1$, в которой давление измеряется в единицах ρ, радиус $x_R = (8\pi\rho/3)^{1/2} R$, масса в единицах $(4\pi\rho/3)(3/8\pi\rho)^{3/2}$, так что масса статической конфигурации $M_0 = x_R^3$.

В первом столбце табл. 1 даны значения релятивистского параметра $\alpha = P_c/\rho$, далее приводятся массы вращающихся и статических конфигураций соответственно, затем радиусы статических конфигураций, а также большая и малая полуоси эллипсоподобных кривых, получающихся в сечении вращающихся звезд.

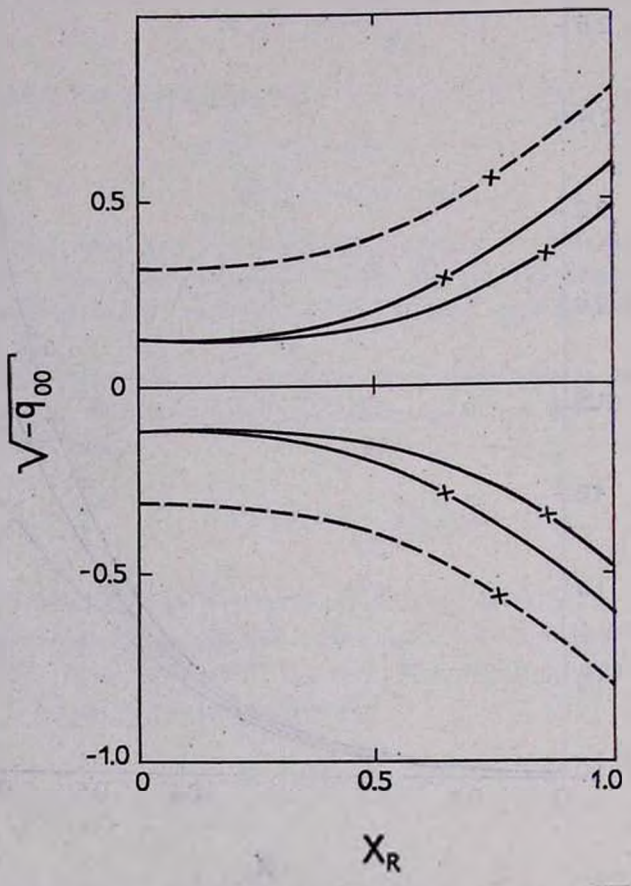

Рис. 2. Общерелятивистский аналог потенциала тяготения $\sqrt{g_{00}}$ как функция радиального расстояния для ряда конфигураций, состоящих из несжимаемой жидкости. Тройка кривых для $C=1.3$ изображает соответственно статическую (пунктир) вращающуюся в направлении $\theta=0$ и вращающуюся в направлении $\theta=\pi/2$, модель. Крестики соответствуют границе конфигурации.

На рис. 1 и 2 представлены функции $\nu(x_R)$ и $\lambda(x_R)$ для вращающихся конфигураций ($C=1.3$). Для сравнения на обоих рисунках приведены кривые 1, соответствующие статической модели.

Как видно из рис. 1, вращение не изменяет характера зависимости e' от координатного радиуса. Вблизи центра конфигурации e' обращается в единицу, затем с ростом радиуса кривые 2 и 3 все более отличаются от кривой 1, причем в разной степени в направлении полюса (кривая 3) и экватора (кривая 2).

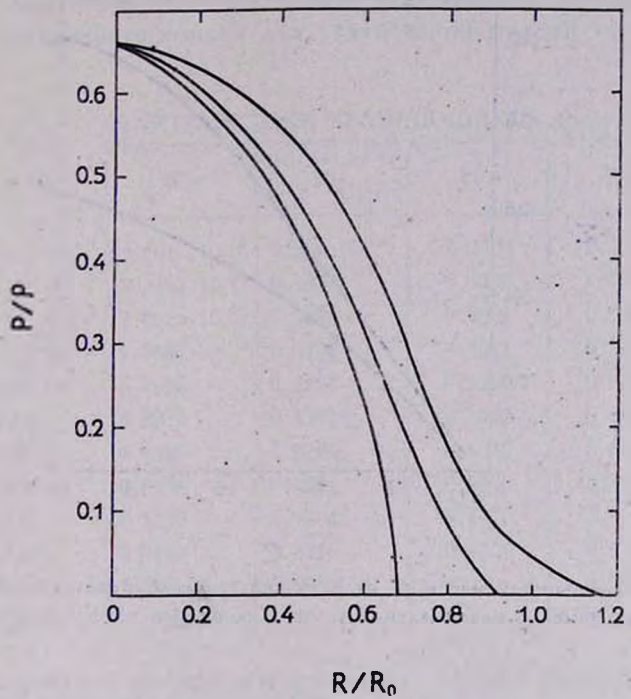

Рис. 3. Распределение давления внутри звезды. Тройка кривых относится к конфигурации с $C = 1.3$, верхняя кривая изображает зависимость в направлении экватора, средняя кривая взята из расчета статических конфигураций, а нижняя дает $P(R)$ в случае вращающейся звезды в направлении полюса.

Ввиду своей связи с ньютоновским потенциалом большой интерес представляет g_{00}, квадратный корень из которой является мерой расстояния между состояниями с положительной и отрицательной энергиями

$$\sqrt{-g_{00}} = \frac{\text{энергия покоящейся частицы}}{\text{энергия покоя частицы в } \infty} = \frac{E_+}{mc^2} = -\frac{E_-}{mc^2} = \frac{E_+ - E_-}{2mc^2}.$$

На рис. 2 показано, как $\sqrt{-g_{00}}$ изменяется в зависимости от радиальной координаты. Расстояние между крайними метками дает

энергию, выделяющуюся при аннигиляции пары e^+, e^- на бесконечности ($2mc^2$). Расстояние между следующими метками пропорционально энергии, выделяющейся при аннигиляции пары e^+ и e^- в центре звезды ($C = 1.3$), которая в $e^{\sqrt{2}}$ раз меньше $2mc^2$.

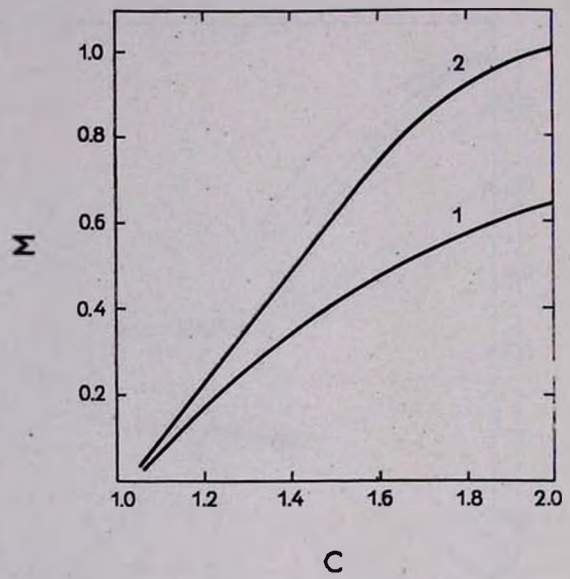

Рис. 4. Зависимость массы M от релятивистского параметра C. Кривая 2 относится к вращающимся с максимальной угловой скоростью конфигурациям, кривая 1— к статическим.

Как показывает расчет, расстояние между состояниями с положительной и отрицательной энергиями уменьшается в случае вращающихся конфигураций по сравнению со статическими, соответствующими тому же α. Смысл этого, очевидно, можно пояснить следующим образом. Если в центре звезды аннигилирует электрон—позитронная пара, то каждый из образующихся квантов, обладающий энергией mc^2 в лоренцевой системе отсчета, связанной с центром звезды, на бесконечности будет иметь меньшую энергию (а именно $e^{\sqrt{2}}mc^2$), причем эта энергия в случае вращающихся конфигураций еще более уменьшается, т. е. квант теряет больше энергии на преодоление тяготения вращающейся звезды. Аналогично статическому случаю с ростом релятивистского параметра α расстояние между состояниями с положительной и отрицательной энергиями убывает.

На рис. 3 дано давление (в единицах ρ) как функция расстояния от центра. Как и следовало ожидать, вращение изменяет градиент

давления, уменьшая его в направлении экватора и увеличивая в направлении полюса. Тройка кривых получена для конфигурации $C = (3\alpha + 1)/(\alpha + 1) = 1.3$, причем средняя кривая соответствует статической конфигурации, верхняя и нижняя кривые описывают поведение давления в направлении $\theta = \pi/2$ и $\theta = 0$.

На рис. 4 представлена зависимость масс вращающихся конфигураций от параметра $C = (3\alpha + 1)/(\alpha + 1)$ (кривая 2). Для сравнения приведена аналогичная кривая для статической модели (кривая 1).

Таблица 1

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВРАЩАЮЩИХСЯ КОНФИГУРАЦИЙ

$\alpha = \frac{P_c}{\rho}$	M_0	$M_{вр.}$	x_R	$R_{pol.}$	R_{eq}	$\bar{\rho}_{max}$
0.0025	$9.8643 \cdot 10^{-4}$	$9.901 \cdot 10^{-4}$	$9.954 \cdot 10^{-2}$	0.0983	0.124	0.0863
0.0050	$2.7451 \cdot 10^{-3}$	$2.7451 \cdot 10^{-3}$	0.1411	0.1390	0.173	0.0861
0.0250	$2.8347 \cdot 10^{-2}$	$2.9626 \cdot 10^{-2}$	0.3049	0.3001	0.373	0.0898
0.0500	$7.2302 \cdot 10^{-2}$	$7.7681 \cdot 10^{-2}$	0.4166	0.4071	0.509	0.0956
0.1110	0.1689	0.1986	0.5528	0.5260	0.673	0.1094
0.1765	0.2609	0.3314	0.6392	0.5952	0.681	0.1253
0.2500	0.3427	0.4689	0.6998	0.6350	0.8105	0.1435
0.3333	0.4140	0.6008	0.7453	0.6570	0.859	0.1628
0.4285	0.4757	0.7337	0.7806	0.6710	0.8692	0.1876
0.6666	0.5748	0.9900	0.8315	0.7000	0.8750	0.2800
1.0	0.6496	1.030	0.8661	0.720	0.8800	0.2530

Аналогично случаю статических конфигураций масса вращающихся звезд является монотонно растущей с повышением релятивизма, ограниченной величиной, достигающей максимума в точке $\alpha = 1$. Масса, как и все остальные интегральные параметры, рассчитана для случая вращения с максимальной угловой скоростью. Здесь, на наш взгляд, интересно отметить следующее. Поскольку на величину скорости звука в несжимаемой жидкости не может быть поставлено никаких ограничений, то в принципе возможны модели с $P_c > \rho$ ($\alpha > 1$). В настоящей статье результаты расчета для конфигураций с $\alpha > 1$ не приводятся. Поведение интегральных характеристик в этой области существенно отличается от поведения соответствующих характеристик в интервале $0 < \alpha < 1$, но область $\alpha > 1$ является, по всей вероятности, нефизической и модель с $P_c > \rho$ реально неосуществима.

Обобщая, можно придти, очевидно, к следующему заключению. Ввиду того, что характер изменения всех указанных величин за счет

вращения в случае однородного распределения вещества (если ограничиться $\alpha \leqslant 1$) совершенно аналогичен характеру изменений для конфигураций, описываемых реальным уравнением состояния вещества [6], изучение вопросов, связанных с вращением, качественно можно проводить на такой упрощенной модели, какой является модель несжимаемой жидкости.

Авторы выражают благодарность Г. С. Саакяну и участникам семинара кафедры теоретической физики за обсуждения.

Ереванский государственный
университет
Бюраканская астрофизическая
обсерватория

ON THE ROTATION OF A CONFIGURATION WITH A HOMOGENEOUS MATERIAL DISTRIBUTION IN GENERAL RELATIVITY

G. G. ARUTYUNIAN, D. M. SEDRAKIAN

The problem of uniform rotation of a model consisting of incompressible liquid is solved by taking into account the second order terms of the angular velocity. The most important integral parameters of configurations, as well as the characteristics of interinal structure are calculated.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гравитация и относительность, под ред. Х. Цзю и В. Гоффмана, Мир, М, 1965.
2. *Г. Ламб*, Гидродинамика, Гостехиздат, М., 1947.
3. *Г. Г. Арутюнян, Д. М. Седракян*, Уч. зап. ЕГУ, 3, 21, 1969.
4. *Д. М. Седракян, Э. В. Чубарян*, Астрофизика, 4, 239, 481. 1968.
5. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Теория поля, Физматгиз, М., 1967.
6. *Г. Г. Арутюнян, Д. М. Седракян, Э. В. Чубарян*, Астрон. ж., 48, 3, 1971.