АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 7 МАЙ, 1971 ВЫПУСК 2

К ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ АНИЗОТРОПНОМ РАССЕЯНИИ

В. П. ГРИНИН

Поступила 22 октября 1970

Рассматривается нестационарная диффузия излучения в одномерной, анизотропно рассеивающей среде. Считается, что длительность пребывания кванта в среде обусловлена временем, в течение которого он находится в пути между рассеяниями

Для определения интенсивности выходящего излучения предлагается модификация вероятностного метода В. В. Соболева на случай анизотропного рассеяния. В случае полубесконечной среды для вероятностей выхода кванта из среды $p_j(\tau, u, x, \lambda)$, $j = 1, 2$, получены простые выражения через функции Бесселя I_0 и I_1.

Приводится соотношение подобия, связывающее коэффициенты пропускания и отражения σ и ρ при любом x в интервале от 0 до 1 с соответствующими величинами при $x = 1/2$ (изотропное рассеяние).

Задачи о нестационарном свечении среды возникают при решении ряда астрофизических и геофизических проблем. Сначала подобные задачи рассматривались в предположении об изотропном рассеянии фотонов. Для этого случая В. В. Соболевым [1] были разработаны удобные методы решения, которые получили дальнейшее развитие в работах И. Н. Минина [2]. В последнее время выяснилась также необходимость решения нестационарных задач при анизотропном рассеянии, и этот случай рассматривался в ряде работ. В частности, в работах [3, 4] был исследован процесс отражения света одномерной анизотропно рассеивающей средой, освещаемой извне нестационарным источником. В этом же приближении можно указать простой способ, позволяющий найти интенсивность выходящего излучения для случая произвольного расположения источников света, находящихся как внутри среды, так и вне ее. Воспользуемся для этого вероятностным методом, предложенным В. В. Соболевым [5] и ограничимся здесь рассмотрением случая полубесконечной среды.

Обозначим через $p_j(\tau, u)\,du$ вероятность того, что квант, летевший в направлении $j\,(j=1,\,2)$ и поглощенный на оптической глубине τ в момент времени $u=0$, выйдет из среды в интервале времени от u до $u+du$.

Если указанные величины известны, то интенсивность излучения, выходящего из среды, может быть вычислена по формуле

$$I(u)=\int\limits_0^\infty d\tau\int\limits_0^u\sum_j p_j(\tau,\,u-u')\,L_j(\tau,\,u')\,du',\tag{1}$$

где $L_j(\tau, u)$ — количество энергии, пришедшее непосредственно от источников света в направлении j и поглощенное на оптической глубине τ в момент времени u.

Примем, что длительность пребывания кванта в среде обусловлена временем, в течение которого он находится в пути между рассеяниями. Тогда вероятности $p_j(\tau, u)$ должны удовлетворять следующим интегральным уравнениям:

$$\begin{gathered}p_1(\tau,\,u)=\lambda(1-x)\,\delta(u-\tau)\,e^{-\tau}+\\+\lambda(1-x)\int\limits_0^\tau e^{-(\tau-\tau')}p_2(\tau',\,u-\tau+\tau')\,d\tau'+\\+\lambda x\int\limits_\tau^\infty e^{-(\tau'-\tau)}p_1(\tau',\,u-\tau'+\tau)\,d\tau'.\\p_2(\tau,\,u)=\lambda x\delta(u-\tau)\,e^{-\tau}+\lambda x\int\limits_0^\tau e^{-(\tau-\tau')}p_2(\tau',\,u-\tau+\tau')\,d\tau'+\\+\lambda(1-x)\int\limits_\tau^\infty e^{-(\tau'-\tau)}p_1(\tau',\,u-\tau'+\tau)\,d\tau'.\end{gathered}\tag{2}$$

Здесь λ — вероятность выживания кванта при однократном рассеянии, x — вероятность переизлучения в первоначальном направлении, u — безразмерное время: $u=t/\alpha c$, где α — объемный коэффициент поглощения, c — скорость света; индекс $j=2$ соответствует направлению к границе.

К системе интегральных уравнений (2) применим оператор Лапласа по переменной u. Дифференцируя полученные уравнения дважды по τ, приходим к системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+s)^2}\frac{d^2\bar{p}_1}{d\tau^2} &= \left(1-\frac{\lambda x}{1+s}\right)\bar{p}_1 - \frac{\lambda(1-x)}{1+s}\bar{p}_2 - \\ &\quad - \frac{\lambda x}{(1+s)^2}\frac{d\bar{p}_1}{d\tau} + \frac{\lambda(1-x)}{(1+s)^2}\frac{d\bar{p}_2}{d\tau}, \\ \frac{1}{(1+s)^2}\frac{d^2\bar{p}_2}{d\tau^2} &= \left(1-\frac{\lambda x}{1+s}\right)\bar{p}_2 - \frac{\lambda(1-x)}{1+s}\bar{p}_1 + \\ &\quad + \frac{\lambda x}{(1+s)^2}\frac{d\bar{p}_2}{d\tau} - \frac{\lambda(1-x)}{(1+s)^2}\frac{d\bar{p}_2}{d\tau} \end{aligned} \tag{3}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &\bar{p}_1(0, s)\left(1-\frac{\lambda x}{1+s}\right) - \frac{1}{1+s}\frac{d\bar{p}_1}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} + \frac{\lambda(1-x)}{1+s}\bar{p}_2(0, s) = 2\lambda(1-x) \\ &\bar{p}_2(0, s)\left(1+\frac{\lambda x}{1+s}\right) - \frac{1}{1+s}\frac{d\bar{p}_2}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} + \frac{\lambda(1-x)}{1+s}\bar{p}_1(0, s) = 2\lambda x \\ &\bar{p}_1(\infty, s) = \bar{p}_2(\infty, s) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Непосредственно из вида уравнений (3) и граничных условий (4) следует, что лапласовские образы $\bar{p}_j$ должны удовлетворять соотношению:

$$\bar{p}_j(\tau, s, x, \lambda) = \lambda\bar{p}_j\left(\tau\lambda, \frac{s+1-\lambda}{\lambda}, x, 1\right). \tag{5}$$

Переходя к оригиналам p_j, отсюда получаем соотношение подобия

$$p_j(\tau, u, x, \lambda) = \lambda^2 e^{-(1-\lambda)u} p_j(\tau\lambda, u\lambda, x, 1), \tag{6}$$

которое позволяет ограничиться нахождением вероятностей p_j при $\lambda = 1$. Следует отметить, что соотношение, аналогичное (6), было получено ранее в работе Кущера и Цвейфеля [6] для случая изотропного рассеяния.

Решение системы (3) с учетом граничных условий (4) при $\lambda = 1$ имеет следующий вид:

$$\bar{p}_1(\tau, s, x, 1) = \left(1 + (s-k)\frac{x}{1-x}\right)e^{-k\tau}$$
$$\bar{p}_2(\tau, s, x, 1) = (1 + s - k)e^{-k\tau}, \tag{7}$$

где
$$k = \sqrt{s(s + 2(1-x))}. \tag{8}$$

Обращая функции $\bar{p}_j$ методом контурного интегрирования (предварительно выделив из них δ-функцию), получаем при $u > \tau$:

$$p_1(\tau, u, x, 1) = (1-x)\,\delta(u-\tau)\,e^{-\tau(1-x)} +$$
$$+ (1-x)^2 e^{-u(1-x)}\left\{\frac{x}{1-x} I_0(z)\frac{\tau}{u+\tau} +\right.$$
$$\left. + \frac{I_1(z)}{z}\left[(1-x)\tau + \frac{x}{1-x}\frac{u-\tau}{u+\tau}\right]\right\} \tag{9}$$
$$p_2(\tau, u, x, 1) = x\,\delta(u-\tau)\,e^{-\tau(1-x)} +$$
$$+ (1-x)^2 e^{-u(1-x)}\left\{I_0(z)\frac{\tau}{u+\tau} + \frac{I_1(z)}{z}\left[x\tau + \frac{u-\tau}{u+\tau}\right]\right\}$$

и $p_1 = p_2 = 0$ при $u < \tau$.

Здесь I_0 и I_1 — функции Бесселя чисто мнимого аргумента, $z = (1-x)\sqrt{u^2 - \tau^2}$.

Обозначая через $p(\tau, u, 1/2, 1)$ вероятность выхода кванта для случая изотропного рассеяния, из (9) находим при $x = 1/2$:

$$p(\tau, u, 1/2, 1) = \frac{1}{2}\,\delta(u-\tau)\,e^{-\frac{\tau}{2}} +$$
$$+ \frac{1}{2}e^{-\frac{u}{2}}\left\{\frac{1}{2} I_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{u^2-\tau^2}\right)\frac{\tau}{u+\tau} + \right. \tag{10}$$
$$\left. + \frac{I_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{u^2-\tau^2}\right)}{\sqrt{u^2-\tau^2}}\left(\frac{u-\tau}{u+\tau} + \frac{\tau}{2}\right)\right\}.$$

Ранее В. В. Соболевым [5] для этой величины было получено другое выражение:

$$
\begin{aligned}
p(\tau, u, 1/2, 1) = {} & \frac{1}{2}\delta(u-\tau)\, e^{-\frac{\tau}{2}} + \\
& + \frac{1}{\pi}\int_0^1 e^{-(1-y)u}\left(y \sin \tau\sqrt{y(1-y)} + \right. \\
& \left. + \sqrt{y(1-y)} \cos \tau \sqrt{y(1-y)}\,\right) dy.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Отметим простые асимптотические формулы, которые получаются из (9) при $z \gg 1$:

$$
\begin{aligned}
p_1(\tau, u, x, 1) = {} & \frac{(1-x)^2}{\sqrt{2\pi z}}\, e^{-z-u(1-x)} \times \\
& \times \left[\frac{\tau}{u+\tau}\cdot\frac{x}{1-x} + \frac{1}{z}\left(\frac{u-\tau}{u+\tau}\,\frac{x}{1-x} + \tau(1-x)\right) + O(z^{-2})\right] \\
p_2(\tau, u, x, 1) = {} & \frac{(1-x)^2}{\sqrt{2\pi z}}\, e^{-z-u(1-x)} \times \\
& \times \left[\frac{\tau}{u+\tau} + \frac{1}{z}\left(\frac{u-\tau}{u+\tau} + \tau x\right) + O(z^{-2})\right].
\end{aligned} \tag{12}
$$

Полагая здесь $u \gg \tau \gg 1$, получим

$$
p_1(\tau, u, x, 1) = \frac{\tau}{u}\sqrt{\frac{1-x}{2\pi u}}\, e^{-\frac{(1-x)\tau^2}{2u}} = p_2(\tau, u, x, 1) + O(\tau^{-1}). \tag{13}
$$

Этот результат означает, что в рассматриваемой области ($u \gg \tau \gg 1$) поле излучения на границе среды практически не зависит от направления, в котором излучают первичные источники света, находящиеся на глубине τ.

Таким образом, соотношения (9)—(12) позволяют путем интегрирования по формуле (1) рассчитать свечение среды при произвольном расположении источников света. В некоторых случаях это делается весьма просто. Например, если среда освещается мгновенным изотропным источником единичной мощности, расположенным на глубине τ, то, согласно (1), при $u > \tau$

$$I(u,\ x,\ \tau)=\frac{1}{2}\int_{0}^{\tau}e^{-(\tau-\tau')}p_2(\tau',\ u+\tau'-\tau)\,d\tau'+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\tau}^{\infty}e^{-(\tau'-\tau)}p_1(\tau',\ u-\tau'+\tau)\,d\tau',\tag{14}$$

откуда с учетом (2) следует

$$I(u,\ x,\ \tau)=\frac{1}{2}\left(\sum_{j}p_j(\tau,\ u,\ x,\ 1)-\delta(u-\tau)\,e^{-\tau}\right).\tag{15}$$

Из формул (9) замечаем, что

$$\sum_{j}p_j(\tau,\ u,\ x,\ 1)=4(1-x)\,p\,(2\tau(1-x),\ 2u(1-x),\ 1/2,\ 1).\tag{16}$$

Поэтому окончательно при $\lambda=1$

$$I(u,\ x,\ \tau)=\frac{1}{2}\left[p\,(2(1-x)\tau,\ 2(1-x)u,\ 1/2,\ 1)-\delta(u-\tau)\,e^{-\tau}\right].\tag{17}$$

Из этого соотношения следует, что для нахождения интенсивности излучения, выходящего из анизотропно рассеивающей среды, в случае изотропных источников, в принципе, достаточно знать лишь вероятность выхода кванта при изотропном рассеянии.

В частности, если источник находится на границе, то интенсивность $I(u,\ x,\ 0)$ в этом случае совпадает с вероятностью отражения кванта $\rho(u,\ x)$ [5]. Из (10) и (17) при $\tau=0$ получаем

$$\rho(u,\ x)=\frac{1}{u}\,e^{-(1-x)u}\,I_1((1-x)\,u).\tag{18}$$

Последнее выражение было найдено ранее [3] другим способом.

В заключение отметим, что полученные выше разультаты легко обобщаются на случай среды конечной оптической толщины τ_0. Оказывается, что в этом случае при $\lambda=1$ для вероятностей отражения и пропускания имеет место соотношение подобия:

$$\begin{aligned}\rho(u,\ x,\ \tau_0)&=2(1-x)\,\rho\,(2(1-x)\,u,\ 1/2,\ 2(1-x)\,\tau_0)\\ \sigma(u,\ x,\ \tau_0)&=2(1-x)\,\sigma\,(2(1-x)\,u,\ 1/2,\ 2(1-x)\,\tau_0),\end{aligned}\tag{19}$$

которое позволяет использовать аналогичные величины для случая изотропного рассеяния, предварительно заменив в них значения u и τ_0 на эффективные значения $2(1-x)\,u$ и $2(1-x)\,\tau_0$.

В пределе, при $\tau_0 \to \infty$, $\sigma \to 0$, $\rho(u, x, \tau_0) \to \rho(u, x)$, и в этом случае, согласно (10), имеем

$$\rho(u, x) = 2(1 - x)\rho(2(1 - x)u, 1/2). \tag{20}$$

Последнее соотношение можно также получить непосредственно из формулы (18).

Крымская астрофизическая обсерватория

ON THE THEORY OF NONSTATIONARY RADIATION TRANSFER FOR ANISOTROPIC SCATTERING

V. P. GRININ

The nonstationary radiation transfer in homogenous atmosphere is considered. It is assumed that the mean lifetime of photons inside the medium is determined by the time interval between two subsequent scatterings.

The modification of the Sobolev's probability method is used in the case of anisotropic scattering to obtain the intensity of emergent radiation. In the case of semi-infinite medium the probabilities of exit of photons from the medium $p_j(\tau, u, x, \lambda)$, $(j = 1, 2)$ are expressed in terms of Bessel functions I_0 and I_1.

The relation of similarity is given connecting the transparency and reflaction coefficients σ and ρ for arbitrary x in the interval from 0 to 1 with the same coefficients corresponding to $x = 1/2$ (isotropic scattering).

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.
2. *И. Н. Минин*, Сб. „Теория звездных спектров", Наука, М., 1966.
3. *А. П. Иванов, И. Л. Кацев*, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 3, № 7, 1967.
4. *А. П. Иванов, И. Л. Кацев*, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 4, № 7, 1968.
5. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 28, 355, 1951.
6. *I. Kuscer, P. F. Zweifel*, J. Math. Phys., 6, No. 7, 1965.