

О КОНВЕКЦИИ В ПЕРИОДИЧЕСКОМ
ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Л. Н. ИВАНОВ

Поступила 28 декабря 1969

В приближении теории длин перемешивания получена зависимость от времени конвективного потока энергии (61) при периодических изменениях ускорения силы тяжести. Сжимаемость вещества учитывалась только при вычислении силы плавучести, действующей на конвективные элементы. Показано, что возможные изменения плотности вещества, обусловленные приливами, могут только увеличить амплитуду колебаний величины конвективного потока.

Введение. Если звезда входит в состав тесной двойной системы и обладает несинхронным вращением относительно своего спутника, конвективный перенос энергии в этой звезде происходит в условиях периодического по времени ускорения силы тяжести. Так как ускорение силы тяжести является одним из основных параметров, определяющих конвекцию, исследование специфических особенностей конвективной теплопроводности в периодическом гравитационном поле позволит лучше понять структуру и динамику компонентов тесных двойных систем.

На первом этапе таких исследований полезно рассмотреть упрощенную задачу о конвекции в плоском газовом слое, представляющем собой часть конвективной оболочки звезды, находящемся в переменном поле силы тяжести, задаваемом выражением:

$$g(t) = g_0 (1 + x \cos 2\omega t); \quad (1)$$

Цель настоящей работы — найти зависимость от времени конвективного потока энергии в этом слое, так как знание именно потока энергии важно для астрофизических применений. При этом будем предполагать, что время тепловой релаксации слоя значительно пре-

вышает период изменения $g(t)$, поэтому приливные колебания, которые он может испытать, считаем адиабатическими.

К сожалению, в настоящее время нет точной нелинейной теории конвекции даже при постоянном ускорении силы тяжести, поэтому ниже, при выводе уравнений для величин, характеризующих конвективный перенос энергии, воспользуемся процедурой, предложенной В. Унно в [1] и опирающейся на представление о длине перемешивания. Далее будем учитывать следующие ограничения:

1. Величина длины перемешивания конвективных элементов много меньше характерного масштаба приливных движений.

2. Конвективные скорости дозвуковые. Турбулентное давление не существенно по сравнению с газовым. К конвективным движениям применимо приближение Буссиньеса, т. е. сжимаемость учитывается только при вычислении силы плавучести.

3. Выражения для турбулентной вязкости и температуропроводности берутся в том виде, как они предлагаются в теории длины перемешивания.

2. *Основные уравнения.* Состояние газового слоя полностью определяется заданием полей скоростей, плотности и температуры. Они описываются уравнениями неразрывности, движения и теплопроводности:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \mathbf{v} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + g; \quad (3)$$

$$\frac{dT}{dt} - \left(\frac{dT}{dP} \right)_{ad} \frac{dP}{dt} = -\frac{1}{\rho c_p} \nabla F_r, \quad (4)$$

где лучистый поток энергии определяется выражением

$$F_r = -\frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\kappa \rho} \nabla T; \quad (5)$$

Связь между термодинамическими параметрами задается уравнением состояния:

$$P = \frac{R^*}{\mu} \rho T. \quad (6)$$

Здесь принято обозначение:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla). \quad (7)$$

Символ κ означает непрозрачность, μ — молекулярный вес, R^* — газовую постоянную.

Следует отметить, что вещество слоя участвует в двух видах движения: конвективном и приливном. И если приливному движению свойственна систематичность, упорядоченность, то конвективные движения характеризуются хаотичным распределением скоростей, таким, что средняя его скорость в некоторой горизонтальной плоскости равна нулю. Аналогично, поля температуры и плотности также можно представить в виде двух компонент: усредненной, плавно меняющейся с высотой и наложенными на нее флуктуациями, связанными с конвективными элементами. Таким образом,

$$v = \bar{v} + v', \quad P = \bar{P} + P', \quad T = \bar{T} + T' \quad \text{и т. д.} \quad (8)$$

где чертой сверху обозначены величины, усредненные по горизонтали, а величины со штрихом обозначают конвективные флуктуации.

Подставим (8) в уравнения (2) — (4) и проведем усреднение в горизонтальной плоскости, тогда получим группу уравнений, описывающих поля усредненных величин:

$$\frac{D\bar{\rho}}{Dt} + \bar{\rho} \nabla \bar{v} = 0; \quad (9)$$

$$\frac{D\bar{v}}{Dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \bar{P} + g - \overline{(v'\nabla)v'} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \bar{P} + g; \quad (10)$$

(здесь пренебрегли выражением $(v'\nabla)v'$, представляющим турбулентное давление)

$$\frac{D\bar{T}}{Dt} - \left(\frac{dT}{dP}\right)_{ad} \frac{D\bar{P}}{Dt} + \overline{v'\nabla T'} = -\frac{1}{\rho c_p} \nabla \bar{F}, \quad (11)$$

причем, оператор

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\bar{v}\nabla) \quad (12)$$

означает субстанциальную производную, связанную с приливыми движениями.

Вычитая из уравнений (2), (3), (4) соответственно уравнения (9), (10), (11) и пользуясь приближением Буссинеска, получим уравнения для флуктуаций

$$\nabla \mathbf{v}' = 0; \quad (13)$$

$$\frac{D\mathbf{v}'}{Dt} + [(\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v}' - \overline{(\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v}'}] = -\frac{1}{\rho} \nabla P' + \frac{\rho'}{\rho^2} \nabla \bar{P} - (\mathbf{v}' \nabla) \bar{\mathbf{v}}; \quad (14)$$

$$\frac{DT'}{Dt} + [(\mathbf{v}' \nabla) T' - \overline{(\mathbf{v}' \nabla) T'}] - \beta \mathbf{v}' = -\frac{1}{\rho c_p} \nabla F'. \quad (15)$$

Здесь

$$\beta = - \left[\frac{dT}{dz} - \left(\frac{dT}{dz} \right)_{ad} \right] \quad (16)$$

— сверхadiaбатический градиент.

Определяя, как обычно, конвективный поток энергии выражением

$$F_c = \overline{\rho c_p \mathbf{v}' T'}; \quad (17)$$

и используя (13), запишем

$$\overline{\mathbf{v}' \nabla T'} = \frac{1}{\rho c_p} \nabla F_c,$$

тогда уравнение энергии (11) примет вид

$$\frac{D\bar{T}}{Dt} - \left(\frac{dT}{dP} \right)_{ad} \frac{D\bar{P}}{Dt} = -\frac{1}{\rho c_p} \nabla (\bar{F}_r + F_c). \quad (18)$$

В уравнении (14) пренебрегаем последним членом по сравнению с $(\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v}'$, так как величина $\bar{\mathbf{v}}$ меняется в пространстве гораздо медленнее, чем \mathbf{v}' .

Выражения в квадратных скобках в (14) и (15) соответствуют турбулентному трению и турбулентной теплопроводности; в приближении теории длины перемешивания их можно представить в виде

$$(\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v}' - \overline{(\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v}'} = \frac{\tilde{\mathbf{v}}}{R} \mathbf{v}'; \quad (19)$$

$$(\mathbf{v}' \nabla) T' - \overline{(\mathbf{v}' \nabla) T'} = \frac{\tilde{\mathbf{v}}}{R} T'; \quad (20)$$

причем, $2R$ — характерный размер конвективного элемента, а

$$\tilde{\mathbf{v}} = |\mathbf{v}'|. \quad (21)$$

Пользуясь уравнением неразрывности (13), в уравнении (14) можно освободиться от члена, содержащего P' . Пренебрегая затем детальной структурой конвективных элементов, полагаем $v_x = \bar{v}$ и в результате получаем

$$\frac{D\bar{v}}{Dt} = -\frac{\bar{v}^2}{R} - \frac{\bar{T}}{2\bar{T}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z}. \quad (22)$$

Здесь учтено, что

$$\frac{\rho'}{\rho} = -\frac{\bar{T}}{\bar{T}}, \quad (23)$$

где

$$\bar{T} = |\bar{T}'|. \quad (24)$$

В приближении длины перемешивания, для оптически толстых конвективных элементов можно написать:

$$\frac{1}{\rho c_p} \nabla F_r' = -\frac{4ac}{3} \frac{\bar{T}^3}{\rho^3 c_p} \nabla^2 T' = \frac{4ac}{3} \frac{\bar{T}^3}{\rho^3 c_p} \frac{\bar{T}}{R^2} = \frac{\gamma}{R^2} \bar{T}, \quad (25)$$

где γ — коэффициент лучистой температуропроводности.

Теперь уравнение (15) примет вид

$$\frac{D\bar{T}}{Dt} = \beta \bar{v} - \frac{\bar{v}\bar{T}}{R} - \frac{\gamma}{R^2} \bar{T}. \quad (26)$$

Для того, чтобы получить полное представление о зависимости конвективного потока от времени, нужно решить систему уравнений (9), (10), (18), (22), (26), задав начальные условия. Решение этих уравнений безусловно, представляет собой весьма сложную математическую задачу. Однако для получения приближенной картины вариаций конвективного потока можно обойтись без такого точного решения всей системы.

3. *Приближенное рассмотрение задачи.* Предположим, что период изменения $g(t)$ больше времени механической релаксации газового слоя, тогда распределение давления в нем сравнительно быстро будет приспосабливаться к новым значениям g . Таким образом, можно

приближенно считать, что все время будет справедливо уравнение гидростатического равновесия

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} = -\bar{\rho}g. \quad (27)$$

Благодаря этому, уравнение (21) примет вид

$$\frac{D\bar{v}}{Dt} = -\frac{\bar{v}^2}{R} + \frac{g(t)\bar{T}}{2\bar{T}}. \quad (28)$$

Далее будем рассматривать уравнения (26) и (28) как замкнутую систему, считая величины β , χ , \bar{T} , R , g параметрами.

При периодических изменениях g , величины \bar{T} , β , R , χ также могут испытывать периодические же отклонения от некоторых своих средних значений. Вследствие большой величины времени тепловой релаксации газового слоя эти средние значения изменяются гораздо медленнее, чем g , и мы считаем их постоянными во времени.

В настоящей работе ограничимся случаем, когда χ , \bar{T} , β вообще постоянны, что, по-видимому, справедливо для внутренних областей конвективной зоны.

К сожалению, очень мало известно о величине длины перемешивания. Принято, что в звездах она порядка высоты однородной атмосферы, т. е.

$$R = \alpha \frac{R^*T}{\mu g}, \quad (29)$$

где α — множитель порядка единицы.

О возможных изменениях R при колебаниях величины g вообще ничего не известно, поэтому рассмотрим вначале случай постоянного R (случай А). Он важен тем, что допускает аналитическое решение системы уравнений (26) и (28).

В случае переменного R (случай В) будем предполагать, что изменения размеров конвективных элементов связаны с общими приливными деформациями газового слоя, при этом масса элемента не должна меняться, т. е.

$$\bar{\rho}R^3 = M = \text{const.} \quad (30)$$

Чтобы распространить это предположение и на случай постоянного R , очевидно, нужно потребовать неизменности средней плотности вещества при изменениях g , т. е.

$$\bar{\rho}(g(t)) = \text{const.} \quad (31)$$

В случае А уравнение (31) играет роль уравнения состояния.

4. *Случай постоянного R.* Преобразуем уравнения (26) и (28) с помощью подстановки

$$\bar{v} = \frac{Ru'}{u}. \quad (32)$$

В этом разделе штрих означает дифференцирование по времени.

В результате получим:

$$(\bar{T}u)' = \beta Ru' - \frac{\chi}{R^2} \bar{T}u; \quad (33)$$

$$u'' - \frac{g}{2TR} \bar{T}u = 0. \quad (34)$$

Дифференцируя по t (33), используя (34), и вводя новую функцию:

$$\varphi = \bar{T}u, \quad (35)$$

имеем

$$\varphi'' = \frac{\beta g}{2T} \varphi - \frac{\chi}{R^2} \varphi'. \quad (36)$$

Подстановкой

$$\varphi = \psi \exp\left(-\frac{\chi}{2R^2} t\right) \quad (37)$$

это уравнение сводится к уравнению Хилла:

$$\psi'' - \left(\frac{\chi^2}{4R^4} + \frac{\beta g}{2T}\right) \psi = 0, \quad (38)$$

так как коэффициент при ψ есть периодическая функция от времени. Обычно уравнение Хилла записывают в виде

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + J(z)\psi = 0,$$

где $z = \omega t$ и

$$J(z) = \theta_0 + 2\theta_1 \cos 2z + \dots$$

В нашем случае:

$$\theta_0 = -\frac{1}{\omega^2} \left(\frac{\chi^2}{4R^4} + \frac{\beta g_0}{2T} \right); \quad \theta_1 = -\frac{1}{\omega^2} \frac{\beta g_0}{4T} \chi. \quad (39)$$

Решение уравнения (38) имеет вид

$$\psi = e^{\mu\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{2n\omega t}; \quad (40)$$

и, следовательно,

$$\varphi = e^{\eta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{2n\omega t}, \quad (41)$$

где

$$\eta = \mu\omega - \frac{\chi}{2R^2}, \quad (42)$$

характеристический показатель μ определяется из условия:

$$\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi i\mu\right) = \Delta(0) \sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\theta_0}\right), \quad (43)$$

где $\Delta(0)$ — определитель Хилла, выражается через θ_0 и θ_1 , в нашем случае его значения порядка единицы [2] (при $\kappa = 0$, $\Delta(0) = 1$).

Так как $\theta_0 < 0$ при $\beta > 0$, то μ — вещественное число. В конвективной зоне должно быть $\eta > 0$, так как только в этом случае, как увидим ниже, имеет физический смысл выражение для конвективного потока, поэтому из двух возможных значений μ , определяемых уравнением (43), нужно выбрать одно — положительное.

Отметим, что как при малых амплитудах χ , так и при больших периодах колебаний g

$$\mu \sim \frac{1}{\omega} \left(\frac{\chi^2}{4R^4} + \frac{\beta g_0}{2T} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (44)$$

что следует из (43) при $\kappa \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow 0$. Отсюда, используя (42), легко получить выражение для η в случае постоянного $g(t) = g_0$:

$$\eta_0 = \frac{\chi}{2R^2} \left[-1 + \left(1 + 2 \frac{\beta g_0 R^4}{T \chi^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (45)$$

Детальный анализ соотношения (43) показывает, что η мало отличается от η_0 при переменном g .

Теперь, используя (34), имеем

$$u' = \frac{1}{2TR} \int g \varphi dt + c_1, \quad (46)$$

$$u = \frac{1}{2\bar{T}R} \int g\varphi dt + c_1 t + c_2, \quad (47)$$

c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Так как в нашем случае решение уравнения Хилла вещественно, его можно записать в виде

$$\varphi(t) = e^{\eta t} [1 + B(t)], \quad (48)$$

где

$$B(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos 2n\omega t + B_n^* \sin 2n\omega t).$$

Используя (1), получим

$$u'(t) = \frac{g_0}{2\bar{T}R\eta} \left[e^{\eta t} (1 + A(t)) + \frac{c_1}{\eta} \right], \quad (49)$$

где

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos 2n\omega t + A_n^* \sin 2n\omega t).$$

Далее

$$u(t) = \frac{g_0}{2\bar{T}R\eta^2} [e^{\eta t} (1 + D(t)) + c_1 t + c_2], \quad (50)$$

где $D(t)$ — тригонометрический ряд, аналогичный $A(t)$.

Теория уравнения Хилла позволяет найти коэффициенты ряда $B(t)$, а через них, η , ω и χ , выражаются коэффициенты в $A(t)$ и $D(t)$.

Окончательно общее решение системы уравнений (26) и (28) имеет вид

$$\bar{v}(t) = \frac{Ru'}{u} = R\eta \frac{e^{\eta t} [1 + A(t)] + \frac{c_1}{\eta}}{e^{\eta t} [1 + D(t)] + c_1 t + c_2}; \quad (51)$$

$$\tilde{T}(t) = \frac{\varphi}{u} = \frac{2\bar{T}R\eta^3}{g_0} \frac{e^{\eta t} [1 + B(t)]}{e^{\eta t} [1 + D(t)] + c_1 t + c_2}. \quad (52)$$

5. Конвективный поток энергии в случае А. Напомним, что по формуле (17)

$$F_c = \bar{\rho} c_p \overline{v' T'}.$$

Обычно при вычислении F_c заменяют среднее от произведения произведением средних, т. е. полагают

$$\overline{v'T'} = \overline{v'} \cdot \overline{T'} = \bar{v} \cdot \bar{T}. \quad (53)$$

Таким образом, для нахождения зависимости $F_c(t)$ достаточно подставить в (17) выражение (51) и (52) для \bar{v} и \bar{T} . Чтобы выяснить закономерности, описываемые получаемой таким образом формулой, рассмотрим случай, когда ускорение силы тяжести в некоторый момент времени t_0 изменяется скачком от одного постоянного значения g_1 до другого — g_0 . При этом конвективный поток энергии также должен измениться. Чтобы получить выражения, описывающие этот процесс, нужно решить исходную систему уравнений (26), (28), положив $g = g_0$, $x = 0$, $\omega = 0$. Тогда, учитывая, что $A(t) = B(t) = D(t) = 0$, $\Delta(0) = 1$, $\eta = \eta_0$, получим

$$\bar{v} = R\eta_0 \frac{e^{\eta_0 t} + \frac{c_1}{\eta_0}}{e^{\eta_0 t} + c_1 t + c_2}; \quad (54)$$

$$\bar{T} = \frac{2\bar{T}R\eta_0^2}{g_0} \frac{e^{\eta_0 t}}{e^{\eta_0 t} + c_1 t + c_2}. \quad (55)$$

Значения постоянных c_1 и c_2 определяются из условия, что в момент $t = t_0$: $\bar{v} = \bar{v}(g_1)$, $\bar{T} = \bar{T}(g_1)$. Отсюда видим, что с течением времени величины \bar{v} и \bar{T} стремятся к постоянным значениям:

$$\bar{v}(g_0) = R\eta_0, \quad (56)$$

$$\bar{T}(g_0) = \frac{2\bar{T}R\eta_0^2}{g_0}. \quad (57)$$

Предельное значение конвективного потока при $g = g_0$ определяется выражением

$$F_c(g_0) = 2\bar{\rho}c_p \frac{\bar{T}R^2\eta_0^3}{g_0}. \quad (58)$$

Как видно из формул (54) и (55), промежуток времени, в течение которого происходит приспособление конвекции к новому гравитационному полю, зависит от η_0 . В связи с этим величину η_0^{-1} естественно назвать характерным временем релаксации конвективного потока энер-

гии — t_c . В астрофизических условиях, при больших размерах конвективных элементов, когда

$$\frac{\lambda^2}{4R^4} \ll \frac{\beta g_0}{2\bar{T}}, \quad (59)$$

справедливо приближенно

$$t_c = \sqrt{\frac{2\bar{T}}{\beta g_0}}. \quad (60)$$

Это выражение удобно тем, что не зависит от параметра R .

Возвращаясь к формулам (51), (52), видим, что там величина η^{-1} имеет смысл характерного промежутка времени, за который конвекция приспособляется к стационарному колебательному режиму.

Для моментов времени, отстоящих достаточно далеко от начального, характер вариаций конвективного потока уже не зависит от начальных условий, они „забываются“. Учитывая это, с помощью формул (51), (52) легко получить выражение для режима стационарных колебаний конвективного потока

$$F_c(t) = 2\bar{\rho}c_p \frac{\bar{T}R^2\eta^3}{g_0} \frac{[1 + A(t)][1 + B(t)]}{[1 + D(t)]^2}. \quad (61)$$

Как уже отмечалось выше, безразмерные коэффициенты рядов A , B , D выражаются через θ_0 , θ_1 , η , κ , ω . Так как величины η и ω имеют размерности $[\text{сек}^{-1}]$, они должны входить в выражения для коэффициентов в комбинации $\omega/\eta = \omega t_c$. Если для t_c справедлива формула (60), то, как это видно из (39), θ_0 и θ_1 выражаются через ωt_c и κ . В результате можно утверждать, что характер относительных изменений конвективного потока при периодических изменениях g определяется величинами κ и

$$q = \omega t_c. \quad (62)$$

При $q \gg t$ вычисления показывают, что в (61) можно ограничиться только первыми гармониками, тогда:

$$1 + A(t) = 1 - \frac{\kappa^2}{8} \frac{1}{1+q^2} + \frac{\kappa}{4} \frac{1}{1+q^2} \cos 2\omega t + \frac{\kappa}{4} \frac{1+2q^2}{q(1+q^2)} \sin 2\omega t; \quad (63)$$

$$1 + B(t) = 1 - \frac{\kappa}{4} \frac{1}{1+q^2} \cos 2\omega t + \frac{\kappa}{4} \frac{1}{q(1+q^2)} \sin 2\omega t; \quad (64)$$

$$1 + D(t) = 1 - \frac{\kappa^2}{8} \frac{1}{1+q^2} - \frac{\kappa}{4} \frac{1}{1+q^2} \cos 2\omega t + \frac{\kappa}{4} \frac{1}{q(1+q^2)} \sin 2\omega t. \quad (65)$$

Из этих формул легко получить, что при увеличении q амплитуда колебаний $F_c(t)$ стремится к нулю. Это означает, что при достаточно быстрых колебаниях g , конвективный поток не успевает на них реагировать. По мере уменьшения амплитуды наблюдается смещение по фазе максимального значения $F_c(t)$ относительно максимального значения $g(t)$.

При $q < 1$ выражения для рядов A, B, D сильно усложняются, но можно получить простую зависимость $F_c(t)$ при $\omega t_c \ll 1$. В самом деле, в течение промежутка времени, малого по сравнению с периодом изменения g , но превышающего время релаксации t_c , можно считать $g(t)$ постоянным и определить поток по формуле (58). Иными словами, для того, чтобы получить зависимость $F_c(t)$ при $q \ll 1$, нужно воспользоваться выражениями (45), (58) для τ_0 и F_c , считая в них параметр g переменным.

Очевидно, при условии, когда справедливо (60), $F_c(t)$ изменяется как $[g(t)]^{1/2}$, или приближенно

$$F_c(t) = F_c(g_0) \left(1 + \frac{\alpha}{2} \cos 2\omega t \right). \quad (66)$$

Результаты непосредственного численного интегрирования системы уравнений (26) и (28) показывают, что зависимость конвективного

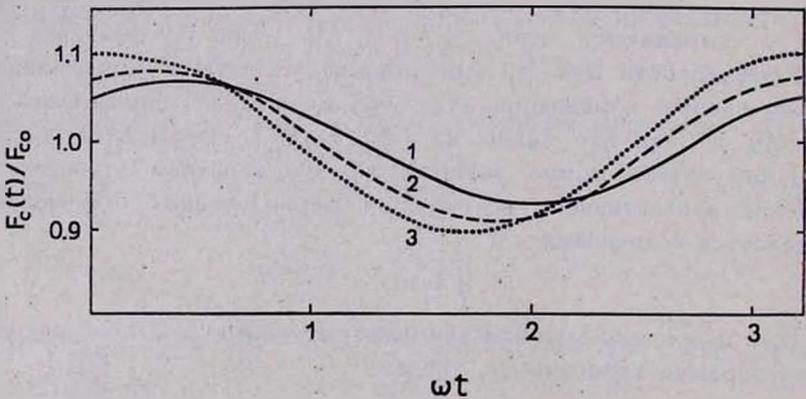


Рис. 1. Относительные изменения конвективного потока при постоянном R и различных значениях параметра $q = \omega t_c$. Кривая 1 соответствует $q = 1$; 2: $q = 0.5$; 3: $q \ll 1$. Во всех случаях $\alpha = 0.2$.

потока от времени при $q < 1$ не сильно отличается по форме от зависимостей, соответствующих $q \ll 1$ и $q = 1$ (рис. 1).

6. *Конвективный поток в случае В.* Выше была рассмотрена конвекция в предположении, что длина перемешивания при изменениях g остается постоянной. Но вследствие того, что в уравнениях (26) и (28) от величины R зависят члены, описывающие лучистый теплообмен конвективных элементов с окружающей средой, а также турбулентные теплопроводность и вязкость, переменность R скажется на вариациях конвективного потока. Как известно, при постоянном g величина R связана с высотой однородной атмосферы (см. формулу (29)). Предположим, что и при переменном g характер этой связи сохраняется, т. е. при прочих равных условиях большему g соответствует меньшее R

$$R(t) \approx \frac{R^* \bar{T}}{\mu g(t)}. \quad (67)$$

В результате приливных деформаций газового слоя конвективный элемент может менять свои размеры в разных направлениях по разному (по-видимому, изменения в направлении \vec{g} будут наибольшими и ближе всего соответствовать формуле (67)).

Так как R — это характерный радиус элемента, то его зависимость от времени должна быть слабее. Поэтому пишем

$$R(t) = \frac{R_0(g_0)}{1 + \delta \cos 2\omega t}, \quad (68)$$

где $\delta \ll \kappa$. Равенство $\delta = \kappa$ означало бы, что слой испытывает изотропные растяжения или сжатия. Отличия δ от κ в некоторой мере учитывают реальную анизотропию приливных деформаций.

При переменном R уже не удастся найти аналитическое решение системы уравнений (26) и (28), но, как и ранее, можно получить приближенную зависимость $F_c(t)$ при $\omega t_c \ll 1$.

Действительно, по формуле (58) имеем:

$$F_c(t) = 2\bar{\rho}c_p \frac{\bar{T}R^2(t) \eta^3(g(t))}{g(t)}. \quad (69)$$

Учитывая (30), можно записать:

$$F_c(t) = 2Mc_p \frac{\bar{T}\eta^3(g(t))}{R(t)g(t)}. \quad (70)$$

Если справедливо (60), то легко получаем приближенное выражение:

$$F_c(t) = F_c(g_0) \left[1 + \left(\delta + \frac{\kappa}{2} \right) \cos 2\omega t \right]. \quad (71)$$

Сравнивая эту формулу с (66) видим, что переменность R способствует увеличению амплитуды колебаний величины $F_c(t)$.

Этот вывод полностью подтверждается результатами численного интегрирования уравнений (26), (28). На рис. 2 приведены результаты вычислений при $q = 0.25$, $\alpha = 0.2$, как при постоянном R , так и при $\delta = 0.1$.

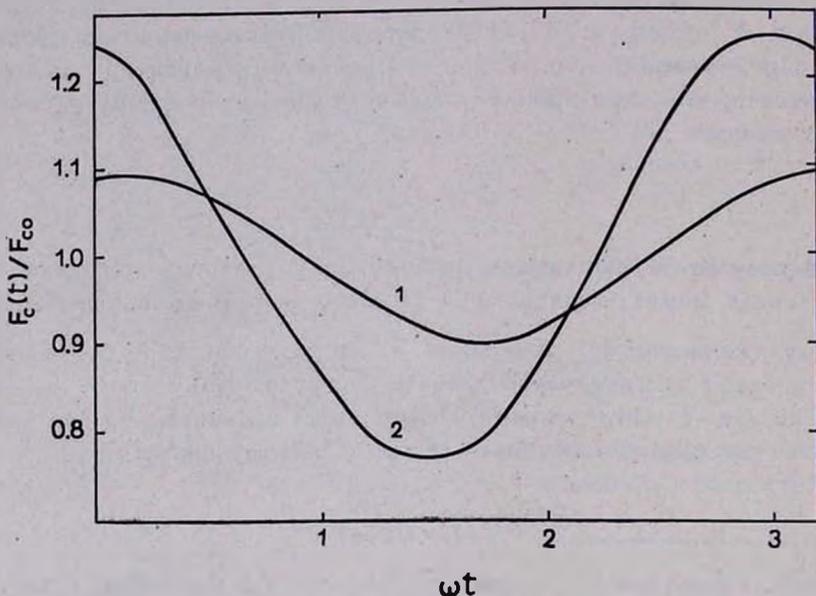


Рис. 2. Относительные изменения конвективного потока при $\alpha = 0.2$, $q = 0.25$ в случае постоянного R ($\delta = 0$, кривая 1) и в случае переменного R ($\delta = 0.1$, кривая 2).

7. Некоторые следствия. В предыдущих разделах было показано, как меняется конвективный поток энергии при периодических изменениях ускорения силы тяжести. Зависимость интенсивности конвективных движений от изменений g наблюдалась в ряде экспериментов (см., например, [3]). Результаты настоящей работы находятся в качественном согласии с приведенными в [3] данными о поведении конвективного потока паро-жидкостной смеси при колебаниях величины ускорения силы тяжести.

Отметим, что результаты непосредственного численного интегрирования уравнений (26), (28) подтвердили вывод о том, что характер вариаций конвективного потока, при фиксированных значениях α и δ , определяется величиной $q = \omega/\tau_1 = \omega t_c$, куда параметры R , \bar{T} , γ , g_0 , β , ω входят в определенной комбинации, а не индивидуальными

значениями этих параметров. Таким образом, если рассмотреть два набора различных значений указанных параметров, но таких, что величина q остается одной и той же, то и вариации конвективного потока в обоих случаях будут совпадать.

Значения величин x , δ , q меняются в звезде от места к месту. Параметр x , малый в полярных областях звезды, достигает своего наибольшего значения близ экватора. В тесных двойных системах величина x может быть порядка 0.1—0.2, эти оценки следуют из данных, приведенных в [4—5]. Об изменениях параметра δ пока ничего не известно, но можно ожидать, что он сильно меняется с глубиной.

Оценки по формуле (60) показывают, что величина времени релаксации конвективного потока может меняться вдоль радиуса звезды в весьма широких пределах. Если, например, взять даже постоянные значения $\beta = 10^{-5}$ град/см, $g_0 = 10^4$ см/сек², то в результате роста температуры с глубиной, величина t_c меняется от 8 минут при $\bar{T} = 10^4$ °К до 1 часа 20 минут при $\bar{T} = 10^6$ °К.

Очевидно теперь, что и амплитуда колебаний величины конвективного потока меняется в звезде от места к месту. В таких условиях вариации конвективного потока могут существенно сказаться на динамике конвективных оболочек тесных двойных звезд. В первую очередь это относится к звездам-карликам позднего спектрального класса, где перенос энергии посредством конвекции является преобладающим.

В дальнейшем предполагается рассмотреть конвекцию в периодическом гравитационном поле с учетом турбулентного ее характера и применить полученные результаты к тесным двойным системам, в частности, к звездам типа U Близнецов.

В заключение автор благодарит В. Г. Горбацкого за помощь при выполнении настоящей работы и С. А. Каплана за ряд ценных критических замечаний.

Ленинградский государственный
университет

ON CONVECTION IN THE PERIODICAL GRAVITATION FIELD

L. N. IVANOV

In the mixing — length theory approximation the time dependent expression (61) for convective flux of energy with the periodical changes of the gravitation field is obtained. Compressibility of the

fluid is taken into consideration in the calculations of the buoyance force only.

It is proved, that tidal variations of density have to increase the amplitude of the convective flux oscillations.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *W. Unno*, PAS Japan, 19, 140, 1967.
2. *E. T. Уиттекер, Г. Н. Ватсон*, Курс современного анализа, ГТТИ, 1934, стр. 243.
3. *J. B. Woodward, H. Morte*, „Proc. 3-rd Internat. Heat Transfer Conf., Chicago, 1966“, 1966, p. 216.
4. *Krzeminski*, Ap. J., 142, 1051, 1965.
5. *Krzeminski*, Ap. J., 140, 921, 1964.