АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 7 ФЕВРАЛЬ, 1971 ВЫПУСК 1

УСТОЙЧИВОСТЬ ГРАВИТИРУЮЩИХ СИСТЕМ ТОЧЕЧНЫХ МАСС. I. ОГРАНИЧЕННЫЙ ПО РАДИУСУ ЦИЛИНДР

Г. С. БИСНОВАТЫЙ-КОГАН

Поступила 10 апреля 1970

Исследована устойчивость бесконечно длинного, ограниченного по радиусу цилиндра с различными равновесными функциями распределения. Применялся метод интегрирования по траекториям. Рассматривалась функция распределения по оси z $f(v_z)$, состоящая из двух взаимно проникающих пучков с одинаковыми тепловыми разбросами и произвольной относительной скоростью. Получено, что при подавлении джинсовской неустойчивости, за счет выбора достаточно большого теплового разброса по z, отсутствует и пучковая неустойчивость при любой относительной скорости пучков. В противоположность плазме, где с увеличением относительной скорости всегда появляется пучковая неустойчивость, в гравитирующем цилиндре увеличение относительной скорости пучков способствует стабилизации системы.

1. *Введение.* Аналогия электростатических и гравитационных сил позволила применить мощный аппарат кинетической теории устойчивости плазмы для исследования устойчивости гравитирующих систем точечных масс [1—8]. Как уже отмечалось во многих работах по гравитационной неустойчивости, исследование устойчивости гравитирующей среды осложняется тем, что однородное состояние не является равновесным, поэтому необходима неоднородность, анизотропия или вращение для существования равновесия в гравитирующей среде. В работах [1—6] была получена пучковая неустойчивость однородной среды при отсутствии равновесного состояния. В [8] получена анизотропная неустойчивость гравитирующего цилиндра, но не проверялось, подавлена ли при этом джинсовская неустойчивость.

В работах [6, 9, 10] кинетические неустойчивости исследовались квазиклассическим методом, т. е. для коротких волн.

В настоящей работе исследуется устойчивость равновесных цилиндра и шара путем точного решения линеаризованных уравнений методом, изложенным в [11].

Рассматривается вращающийся ограниченный по радиусу цилиндр равновесие в плоскости вращения которого достигается равенством центробежной и гравитационной сил или выбором равновесной функции распределения. По оси вращения рассматривалась функция распределения $f(v_z)$, предложенная для плазмы Джексоном [12], позволяющая вычислять аналитически возникающие интегралы, а в остальном дающая результаты, совпадающие с максвелловским распределением.

Функция $f(v_z)$ состояла из двух взаимно проникающих пучков с одинаковыми тепловыми разбросами и произвольной относительной скоростью. В результате получено, что при любой относительной скорости подавление джинсовской ветви колебаний за счет выбора достаточно большой температуры, аналогично гидродинамическому случаю, рассмотренному в [9], автоматически влечет за собой подавление неустойчивости на пучковой ветви колебаний. Более того, относительная скорость пучков оказывает стабилизирующее влияние на джинсовскую ветвь колебаний.

2. *Равновесные состояния однородного вращающегося цилиндра.* В декартовой системе координат, вращающейся с угловой скоростью Ω, направленной по оси z, кинетическое уравнение для частиц одинаковой массы m имеет вид [6—8]

$$\frac{\partial f}{\partial t}+v_x\frac{\partial f}{\partial x}+v_y\frac{\partial f}{\partial y}+v_z\frac{\partial f}{\partial z}+\left[\Omega^2x+2\Omega v_y-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]\frac{\partial f}{\partial v_x}+ \\ +\left[\Omega^2y-2\Omega v_x-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right]\frac{\partial f}{\partial v_y}-\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial v_z}=0. \tag{1}$$

Рассмотрим цилиндр, бесконечный по оси z, ограниченный по радиусу $r=r_0$, однородной плотности ρ_0, вращающийся в плоскости (xy) с угловой скоростью Ω. Его гравитационный потенциал Φ_0, определяемый из уравнения Пуассона, есть

$$\Phi_0=\pi G\rho_0(x^2+y^2)+c=\frac{\omega_0^2}{4}(x^2+y^2)+c \\ \omega_0^2=4\pi G\rho_0. \tag{2}$$

Найдем равновесные функции распределения такого цилиндра методом, аналогичным [13—15]. Для этого найдем интегралы уравнений характеристик кинетического уравнения (1) и построим функцию распределения, зависящую от этих интегралов и дающую при интегрировании по скоростям однородную плотность.

Система уравнений характеристик для потенциала (2) имеет вид

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = \frac{dv_x}{2\Omega v_y - 2\alpha x} = \frac{dv_y}{-2\Omega v_x - 2\alpha y}; \qquad v_z = \text{const}$$
$$\alpha = \frac{1}{4}(\omega_0^2 - 2\Omega^2) = \frac{1}{2}(\Omega_0^2 - \Omega^2); \quad \Omega_0^2 = \omega_0^2/2. \tag{3}$$

Первый интеграл характеристической системы уравнений—сохраняющаяся величина полной энергии в плоскости вращения

$$J_1 = \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2) + \alpha(x^2 + y^2). \tag{4}$$

Второй интеграл системы (4) выражает сохранение проекции момента количества движения на ось z.

$$J_2 = 2\alpha(xv_y - yv_x) - \Omega(v_x^2 + v_y^2). \tag{5}$$

Третий, очевидный, интеграл есть сохраняющаяся скорость по оси z

$$J_3 = v_z. \tag{6}$$

Функция распределения, описывающая однородный, ограниченный по радиусу, бесконечный по z цилиндр, имеет вид

$$f = \begin{cases} -\frac{n_0}{\pi}\delta(2\alpha r_0^2 - 2J_1)\psi(J_3) & J_1 \leqslant \alpha r_0^2 \\ 0 & J_1 > \alpha r_0^2 \end{cases} \tag{7}$$

Здесь $\int f d\vec{v} = n_0$, r_0 — радиус цилиндра, ψ — произвольная функция. Учитывая (4), (6), можно записать функцию распределения (7) в виде

$$f = \begin{cases} \frac{n_0}{\pi}\delta[2\alpha(r_0^2 - r^2) - v_\perp^2]\psi(v_z), & v_\perp^2 \leqslant 2\alpha(r_0^2 - r^2) \\ 0 & v_\perp^2 > 2\alpha(r_0^2 - r^2) \end{cases} \tag{8}$$
$$v_\perp^2 = v_x^2 + v_y^2; \qquad r^2 = x^2 + y^2.$$

Из (8) при $\Omega = 0$, $\alpha = \Omega_0^2/2$, получаем решение для невращающегося цилиндра, найденное в [17]. При $\alpha = 0$ вращение полностью компенсирует гравитацию в плоскости (xy).

В этом случае интеграл J_1 не зависит от пространственной координаты и решение, получаемое из (8), представляет собой цилиндр, где частицы в плоскости (xy) движутся по круговым траекториям. Устойчивость такого цилиндра относительно возмущений, лежащих в плоскости (xy), рассматривалась в [9]. Случай $\alpha = 0$ является в некотором смысле вырожденным, так как для бесконечного по радиусу цилиндра точным решением здесь является произвольная функция $f(v_\perp^2)$, что рассматривалось в [6—8]. Для ограниченного по радиусу цилиндра этого не будет. Бесконечный по радиусу цилиндр всегда неустойчив по Джинсу относительно возмущений с достаточной длиной волны, зависящих от z. Поэтому, как отмечено в [7, 9], справедливо только рассмотрение возмущений, не зависящих от z. Здесь рассматривается только ограниченный по радиусу цилиндр, для которого справедливо рассмотрение возмущений произвольного типа.

3. *Линеаризованное кинетическое уравнение и траектории частиц в поле невозмущенного потенциала.* Линеаризованное кинетическое уравнение, получающееся из (1), имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \left[\Omega^2 x + 2\Omega v_y - \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right] \frac{\partial f}{\partial v_x} + \\ + \left[\Omega^2 y - 2\Omega v_x - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right] \frac{\partial f}{\partial v_y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial f_0}{\partial v_y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial f_0}{\partial v_z}. \tag{9}$$

Линеаризованное уравнение Пуассона в цилиндрических координатах (r, z, φ)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 4\pi G \rho, \qquad \rho = m \int f d\vec{v}. \tag{10}$$

Для решения уравнения (9) применим метод „интегрирования по траекториям", описанный, в применении к плазме, в работах [11, 16]. Уравнение (9) аналогично рассмотренному в [11] уравнению, описывающему плазму в продольном магнитном и радиальном электрическом полях. Вращение здесь играет роль магнитного поля, а гравитационное поле—электрического. При исследовании устойчивости плазмы обычно имеют дело с равновесными решениями, в которых частицы движутся по произвольным траекториям. В гравитации, из-за отсутствия „нейтральности", часто приходится иметь дело с дельта-функционными равновесными решениями, в которых набор траектории невозмущенного состояния ограничен: например, цилиндр с круговыми орбитами, получающийся из (8) при $\alpha = 0$, или шар с круговыми орбитами. При возмущении дельта-функционного решения возникают траектории, отличающиеся от траекторий нулевого решения. Поэтому необходимо рассмотрение возмущенных траектории в поле невозмущенного потенциала.

Для (9) имеет место следующая система уравнений траекторий в поле потенциала (2):

$$dt = \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = \frac{dv_x}{2(\Omega v_y - \alpha x)} = \frac{dv_y}{-2(\Omega v_x + \alpha y)}; \quad \frac{dv_z}{dt} = 0. \tag{11}$$

При написании (11) было учтено, что $\partial\Phi_0/\partial x - \Omega^2 x = 2\alpha x$, $\partial\Phi_0/\partial y - \Omega^2 y = 2$

Систему уравнений (11) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -2\alpha x + 2\Omega\frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -2\alpha y - 2\Omega\frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Система уравнений (12) полностью аналогична соответствующей системе для траекторий из [11]. Так же, как в [11], введем переменную $\xi = x + iy$, для которой получаем из (12) уравнение

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2i\Omega\frac{d\xi}{dt} + 2\alpha\xi = 0. \tag{13}$$

Решение ищем в виде $\xi = ae^{i\omega t}$ и после подстановки в (13) и решения характеристического уравнения

$$\omega^2 + 2\Omega\omega - 2\alpha = 0$$

получаем ответ в виде

$$\begin{aligned} \xi &= ae^{i\omega_a t} + be^{i\omega_b t} \\ \omega_a &= -\Omega - \sqrt{\Omega^2 + 2\alpha}, \\ \omega_b &= -\Omega - \sqrt{\Omega^2 + 2\alpha}. \end{aligned} \tag{14}$$

Постоянные a и b найдем из начальных условий в момент времени t'

$$\xi' = r'e^{i\varphi'} = ae^{i\omega_a t} + be^{i\omega_b t},$$
$$\frac{d\xi'}{dt'} = v'_\perp e^{i\theta'} = i\left(a\omega_a e^{i\omega_a t'} + b\omega_b e^{i\omega_b t'}\right). \tag{15}$$

Здесь φ — угол между радиусом-вектором частицы и осью x, θ— угол между радиусом-вектором скорости частицы и осью v_x в пространстве скоростей. Выражая теперь величины в момент t' через их значения в момент t, получим

$$r'e^{i\varphi'} = \frac{re^{i\varphi}}{\omega_b - \omega_a}\left[\omega_b e^{i\omega_a(t'-t)} - \omega_a e^{i\omega_b(t'-t)}\right] +$$
$$+ i\frac{v_\perp e^{i\theta}}{\omega_b - \omega_a}\left[e^{i\omega_a(t'-t)} - e^{i\omega_b(t'-t)}\right]. \tag{16}$$

$$v'_\perp e^{i\theta'} = ire^{i\varphi}\frac{\omega_a\omega_b}{\omega_b - \omega_a}\left[e^{i\omega_a(t'-t)} - e^{i\omega_b(t'-t)}\right] -$$
$$- \frac{v_\perp e^{i\theta}}{\omega_b - \omega_a}\left[\omega_a e^{i\omega_a(t'-t)} - \omega_b e^{i\omega_b(t'-t)}\right]. \tag{17}$$

Решение третьего уравнения (12) тривиально; выражая значения в момент t' через их значения в момент t, имеем

$$v'_z = v_z; \qquad z' = z + v_z(t' - t). \tag{18}$$

Для дальнейшего понадобятся выражения для $v'^2_\perp$ и r'^2, выпишем их.

$$r'^2 = r^2\left\{\frac{\omega_b^2 + \omega_a^2}{(\omega_b - \omega_a)^2} + \frac{4a}{(\omega_b - \omega_a)^2}\cos\left[(\omega_a - \omega_b)(t' - t)\right]\right\} +$$
$$+ \frac{2v_\perp^2}{(\omega_b - \omega_a)^2}\{1 - \cos\left[(\omega_a - \omega_b)(t' - t)\right]\} - \frac{rv_\perp}{(\omega_b - \omega_a)^2}\{4\Omega\sin(\varphi - \theta) +$$
$$+ 2\omega_b\sin\left[\varphi - \theta + (\omega_a - \omega_b)(t' - t)\right] + 2\omega_a\sin\left[\varphi - \theta - (\omega_a - \omega_b)(t' - t)\right]\}.$$
$$\tag{19}$$
$$v'^2_\perp = -r^2 2a\left\{\frac{2\omega_a\omega_b}{(\omega_b - \omega_a)^2} + \frac{4a}{(\omega_b - \omega_a)^2}\cos\left[(\omega_a - \omega_b)(t' - t)\right]\right\} +$$
$$+ \frac{v_\perp^2}{(\omega_b - \omega_a)^2}\{\omega_a^2 + \omega_b^2 - 2\omega_a\omega_b\cos\left[(\omega_a - \omega_b)(t' - t)\right]\} +$$
$$+ \frac{rv_\perp 2a}{(\omega_b - \omega_a)^2}\{4\Omega\sin(\varphi - \theta) + 2\omega_b\sin\left[\varphi - \theta + (\omega_a - \omega_b)(t' - t)\right] +$$
$$+ 2\omega_a\sin\left[\varphi - \theta - (\omega_a - \omega_b)(t' - t)\right]\}.$$

Из (18), (19) следует, что аргументы нулевой функции распределения не меняются при движении частицы в невозмущенном потенциале

$$2\alpha\,(r_0^2 - r'^2) - v_\perp'^2 = 2\alpha\,(r_0^2 - r^2) - v_\perp^2. \tag{20}$$

$$v_z' = v_z.$$

4. *Решение линеаризованного кинетического уравнения.* Левую часть уравнения (9) можно рассматривать как полную производную от функции распределения по времени, где координаты и скорости частиц меняются во времени в соответствии с (16), (17).

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial\vec{r}}\,\frac{\partial f_0}{\partial\vec{v}}. \tag{21}$$

Интегрируя (21) по времени от $-\infty$, где возмущения обращаются в нуль, до t, получим

$$f = \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{\partial\Phi}{\partial\vec{r}'}\,\frac{\partial f_0}{\partial\vec{v}'}\,dt'. \tag{22}$$

Здесь Φ, f_0 — функции $\vec{r}'$, $\vec{v}'$, которые, в свою очередь, по формулам (16)—(18) выражаются через $\vec{r}$, $\vec{v}$, t, t'. Таким образом, (22) определяет решение линеаризованного кинетического уравнения как функцию $\vec{r}$, $\vec{v}$, t.

Будем искать решение для f и Φ в виде $f = fe^{i(kz-\omega t)}$, $\Phi = \Phi e^{i(kz-\omega t)}$ Обозначив $u = 2\alpha\,(r_0^2 - r^2) - v_\perp^2$, получим

$$\frac{\partial f_0}{\partial v_x'} = 2v_x'\,\frac{\partial f_0}{\partial u}, \qquad \frac{\partial f_0}{\partial v_y'} = 2v_y'\,\frac{\partial f_0}{\partial u}.$$

Подставляя это в (22) и учитывая (20), имеем

$$\begin{aligned} fe^{i(kv_z-\omega t)} &= 2\,\frac{\partial f_0}{\partial u}\int\limits_{-\infty}^{t}\left(v_x'\,\frac{\partial\Phi}{\partial x'} + v_y'\,\frac{\partial\Phi}{\partial y'}\right)e^{i(kz'-\omega t')}\,dt' + \\ &+ \frac{\partial f_0}{\partial v_z}\int\limits_{-\infty}^{t} ik\Phi e^{i(kz'-\omega t')}\,dt'. \end{aligned} \tag{23}$$

Учитывая, что $\left(v'_x \frac{\partial \Phi}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial \Phi}{\partial y'}\right) dt' = d\Phi$ и беря первый интеграл (23) по частям с учетом (18), получим

$$f = -i \left[2(\omega - kv_z) \frac{\partial f_0}{\partial u} - k \frac{\partial f_0}{\partial v_z}\right] \int\limits_{-\infty}^{t} \Phi(r', \varphi') e^{i(\omega - kv_z)(t-t')} dt' - \\ -2 \frac{\partial f_0}{\partial u} \Phi(r, \varphi). \tag{24}$$

Подставляя в (24) функцию распределения (8) и учитывая, что f и Φ пропорциональны $e^{im\varphi}$, получим для возмущенной функции распределения

$$f = i \frac{n_0}{\pi} \left[2(\omega - kv_z) \frac{d\delta}{du} \psi(v_z) - k\delta(u) \frac{d\psi}{dv_z}\right] \times \\ \times \int\limits_{-\infty}^{t} \Phi(r') e^{im(\varphi' - \varphi) + i(\omega - kv_z)(t-t')} dt' + 2 \frac{n_0}{\pi} \frac{d\delta}{du} \psi(v_z) \Phi(r). \tag{25}$$

5. *Случай* $\alpha = 0$. Этот случай обычно рассматривается при исследовании устойчивости гравитирующего цилиндра [6—9]. Для произвольной функции $f_0(v_\perp^2, v_z)$, являющейся решением для бесконечного по r цилиндра, функция (24) является решением линеаризованного уравнения для возмущений, $u = -v_\perp^2$. Дисперсионное уравнение можно получить, полагая в (24) все величины $\sim e^{i(k_x x + k_y y)}$ и беря интеграл с помощью разложения в ряд по функциям Бесселя. После этого находят возмущенную плотность $n = \int f d\vec{v}$ и, подставляя в линеаризованное уравнение Пуассона (10), получают дисперсионное соотношение, использованное в [6—8]. При этом всегда есть неустойчивость для $k \neq 0$.

Здесь рассматривается ограниченный по радиусу цилиндр, поэтому при $\alpha = 0$ все частицы движутся по круговым орбитам и невозмущенная функция распределения (8) есть

$$f_0 = -\frac{n_0}{\pi} \delta(-v_\perp^2) \psi(v_z). \tag{26}$$

Решения уравнений для траекторий в этом случае упрощаются и из (16)—(19) имеем

$$r'^2 = r^2 - \frac{rv_\perp}{\Omega}\{\sin(\varphi - \theta) - \sin[\varphi - \theta + 2\Omega(t' - t)]\} +$$

$$+ \frac{v_\perp^2}{2\Omega^2}[1 - \cos 2\Omega(t' - t)]. \tag{27}$$

$$r'e^{i\varphi'} = re^{i\varphi} + i\frac{v_\perp}{2\Omega}e^{i\theta}(e^{-2i\Omega(t'-t)} - 1).$$

Для того, чтобы взять интеграл в (25), разложим $\Phi(r')$ и $e^{im(\varphi'-\varphi)}$ в ряд Тэйлора по степеням $v_\perp$, при этом удобно разлагать комбинации $\Phi(r')/r'^m$ и $[r'e^{i(\varphi'-\varphi)}]^m$. После этого интегрируем по скоростям и получаем возмущенную плотность n. Из-за наличия δ-функции в f_0 достаточно иметь только два первых члена разложения по степеням $v_\perp$. После серии простых, но довольно громоздких вычислений, для плотности n имеем

$$n = n_0\left[\left(\Phi'' + \frac{\Phi'}{r} - \frac{m^2}{r^2}\Phi\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(v_z)dv_z}{4\Omega^2 - (\omega - kv_z)^2} - \right.$$

$$\left. - \Phi\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{k(d\psi/dv_z)dv_z}{\omega - kv_z}\right]. \tag{28}$$

Здесь штрих означает производную по r. Подставляя (28) в уравнение Пуассона (10), получаем, аналогично гидродинамическому случаю [9]

$$\Phi'' + \frac{\Phi'}{r} - \left(\frac{m^2}{r^2} - q^2\right)\Phi = 0 \qquad r < r_0$$

$$\Phi'' + \frac{\Phi'}{r} - \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2\right)\Phi = 0 \qquad r > r_0$$

$$q^2 = -k^2\frac{1 - \frac{\omega_0^2}{k}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\psi}{dv_z}\frac{dv_z}{\omega - kv_z}}{1 - \omega_0^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(v_z)dv_z}{4\Omega^2 - (\omega - kv_z)^2}}. \tag{29}$$

Решение уравнений (29) должно быть везде конечным, обращаться в нуль на бесконечности и быть непрерывным вместе с первой производной. Удовлетворяющее этим условиям решение есть

$$\begin{aligned} \Phi &= AJ_m(qr) \qquad r < r_0 \\ \Phi &= Bk_m(kr) \qquad r > r_0. \end{aligned} \tag{30}$$

Здесь J_m — функция Бесселя первого рода, k_m — функция Макдональда [18]. Из условия непрерывности (30) вместе с первой производной при $r = r_0$ получаем коэффициенты A, B, и условие существования нетривиального решения для них

$$\frac{qJ_{m-1}(qr_0)}{J_m(qr_0)} = -\frac{kk_{m-1}(kr_0)}{k_m(kr_0)}. \tag{31}$$

Из (31) следует, что q имеет минимум $q_{\min} r_0 = 2.4$ — первый нуль функции $J_0(x)$*. Таким образом дисперсионное уравнение имеет вид

$$k^2\left[1 - \frac{\omega^2}{k}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\psi/dv_z}{\omega - kv_z}dv_z\right] = -q^2\left[1 - \omega_0^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(v_z)\,dv_z}{4\Omega^2 - (\omega - kv_z)^2}\right]. \tag{32}$$

Дискретный набор значений q, как функция k, m, r_0, задается (31). Для нас важно только то, что величина q имеет минимум

$$q_{\min} = \frac{2.4}{r_0}.$$

6. *Случай* $\alpha = 0$. *Функция распределения Джэксона.* Для того, чтобы интегралы, входящие в дисперсионное уравнение (32), можно было взять аналитически, Джэксоном в аналогичном случае плазмы была предложена [12] функция

$$\psi(v) = \frac{\Delta}{2\pi}\left[\frac{1}{(v-u)^2 + \Delta^2} + \frac{1}{(v+u)^2 + \Delta^2}\right]. \tag{33}$$

Эта функция очень похожа на максвелловскую и удобна для исследования пучковой неустойчивости. Здесь Δ — тепловой разброс пучка, $2u$ — относительная скорость пучков. При $u < \Delta/\sqrt{3}$ функция распределения (33) имеет только один горб. При больших u, $\psi(v)$ имеет уже два горба и минимум при $v = 0$. Неустойчивость в плазме имеет место при $u > \Delta$ и начинается с самых длинных волн [12]. Воз-

---

* Это утверждение не вполне точно, подробнее см. [20].

никновение неустойчивости со стороны длинных волн характерно для пучковой неустойчивости в плазме. Для взятия интегралов в (32) воспользуемся правилом обхода полюсов подынтегральных выражений, найденным Ландау [19]. В результате получаем дисперсионное уравнение в виде

$$1+\frac{\omega_0^2}{k^2}\frac{\left(\frac{\omega}{k}+i\Delta\right)^2+u^2}{\left[\left(\frac{\omega}{k}+i\Delta\right)^2-u^2\right]^2}=$$
$$=-\frac{q^2}{k^2}\left\{1+\frac{\omega_0^2}{k^2}\frac{\left(\frac{\omega}{k}+i\Delta\right)^2+u^2-4\frac{\Omega^2}{k^2}}{\left[\left(\frac{\omega}{k}+i\Delta\right)^2+u^2-4\frac{\Omega^2}{k}\right]^2-4u^2\left(\frac{\omega}{k}+i\Delta\right)^2}\right\}. \quad (34)$$

Так же, как в плазме, здесь наиболее неустойчивыми являются длинные волны. Действительно, рассмотрим сначала случай $u=0$. Тогда из (34) имеем

$$1+\frac{\omega_0^2/k^2}{\left(\frac{\omega}{k}+i\Delta\right)^2}=-\frac{q^2}{k^2}\left\{1+\frac{\omega_0^2}{k^2}\left[\left(\frac{\omega}{k}+i\Delta\right)^2-4\frac{\Omega^2}{k^2}\right]^{-1}\right\}.$$
$$\omega_0^2=2\Omega^2 \quad (35)$$

Решение для $z=(\omega/\Omega+i(k\Delta/\Omega))^2$, выражаемое через $x=k^2/q^2$, имеет вид

$$z=1\pm\sqrt{1+\frac{8x}{1+x}}\,. \quad (36)$$

Неустойчивость может возникнуть только на ветви со знаком „—" причем, так как функция $\frac{1}{x}\left(1-\sqrt{1+\frac{8x}{1+x}}\right)$ монотонно растет с ростом x, наиболее неустойчивыми являются длинные волны. При $x\to 0$ имеем

$$\omega_{1,2}=-ik\left(\Delta\pm 2\frac{\Omega}{q}\right), \qquad \omega_{3,4}=\pm\sqrt{2}\,\Omega-ik\Delta. \quad (37)$$

Из (37) следует, что при $\Delta>2\Omega/q_{\min}$ джинсовская неустойчивость по оси z подавлена и при $u=0$ вращающийся цилиндр радиуса r_0 с функцией распределения (33) устойчив. Очевидно, что этот вывод сохраняется для любой функции распределения по v_z, не имеющей горбов при $v = 0$ и обладающей достаточным тепловым разбросом. Этот же вывод получен в [9] с помощью анизотропной гидродинамики.

Рассмотрим теперь случай $u \neq 0$, $k \to 0$. В этом случае неустойчивой может стать ветвь $\omega = -ik(\Delta - 2\,\Omega/q)$. Обозначив $p = (u^2q^2)/\Omega^2$, получим из (34) решение в виде

$$\frac{z}{x} = p - 2 \pm 2\sqrt{1-2p}. \tag{38}$$

При малых p имеем

$$\left(\frac{z}{x}\right)_1 = -4 + 3p; \qquad \left(\frac{z}{x}\right)_2 = -p.$$

При $p > 1/2$ имеем

$$I_m\sqrt{\frac{z}{x}} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{p^2+4p}-p+2)} \to \pm\sqrt{2}.$$

$$p \to \infty.$$

Таким образом наличие относительной скорости двух пучков с тепловым разбросом оказывает стабилизирующее воздействие, прямо противоположное случаю плазмы. Подавление джинсовской неустойчивости влечет за собой затухание пучковых ветвей колебаний. При наличии скорости u для стабилизации джинсовской неустойчивости цилиндра требуется меньший тепловой разброс, чем при $u = 0$.

Именно при изменении u от 0 до ∞ необходимый для устойчивости тепловой разброс уменьшается от $2\Omega/q_{\min}$ до $\sqrt{2}\,\Omega/q_{\min}$, т. е. требуется подавление неустойчивости как бы каждого пучка в отдельности с плотностью $\rho_0/2$.

Таким образом, кинетическая энергия пучка препятствует гравитации и способствует затуханию колебаний, а не их раскачке, как в плазме.

Выражаю благодарность А. Б. Михайловскому и А. М. Фридману за полезное обсуждение.

Институт прикладной математики
АН СССР

THE STABILITY OF THE GRAVITATING SYSTEMS OF POINT MASSES I. THE FINITE CYLINDER OF RADIUS

G. S. BISNOVATY-KOGAN

The rotating cylinder of finite radius r_0 and infinite along the z axis is considered. The equilibrium state of this cylinder is due to the rotation and apropriate distribution function. Along the z axis the function of Jackson [12] is considered, which for plasma permits to calculate analytically the appearing integrals which are similar to the Maxwell Function in other respects.

The distribution function $f(v_z)$ is constructed by mens of two penetrating streams with equal thermal velocity and arbitrary relative velocities. As a result it is obtained that in the presence of arbitrary large relative velosity the absence of Jaens instibility, due to sufficiently large thermal velocity also renders the absence of the instability on the two-stream branch of the oscillations. Moreover, the relative velocity has a stabilizing influence on the Jeans branch of oscillations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *P. Sweet*, M. N., 125, 285, 1963.
2. *D. Lynden-Bell*, M. N., 124, 279, 1962.
3. *М. Н. Максумов, Л. С. Марочник*, ДАН СССР, 164, 1019, 1965.
4. *В. И. Лебедев, М. Н. Максумов, Л. С. Марочник*, Астрон. ж., 42, 709, 1965.
5. *М. Н. Максумов, Л. С. Марочник*, Астрон. ж., 42, 261, 1965.
6. *Л. С. Марочник, Н. Т. Птицына*, Астрон. ж., 45, 516, 1968.
7. *E. P. Lee*, Ap. J., 148, 185, 1967.
8. *G. S. Wu.*, Phys. Fluids, 11, 545, 1968.
9. *Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович, Р. З. Сагдеев, А. М. Фридман*, ПМТФ, № 3, 3, 1969.
10. *Л. С. Марочник, А. А. Сучков*, Астрон., ж., 46, 319, 1969.
11. *M. N. Rosenbluth, N. A. Krall, N. Rostoker*, Ядерный синтез, Дополнение, кн. I, 143, 1962.
12. *J. D. Jackson*, Nucl. En. part C: Plasma Phys., 1, 171, 1960.
13. *E. D. Fackerell*, Ap. J., 153, 643, 1968.
14. *Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович*, Астрофизика, 5, 223, 1969.
15. *Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович*, Астрофизика, 5, 425, 1969.
16. *В. Д. Шафронов*, Вопросы теории плазмы, вып. 3, 3, 1963.
17. *Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович*, Астрофизика, 6, 387, 1970.
18. *И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев*, Справочник по математике, Наука, М., 1964.
19. *Л. Д. Ландау*, ЖЭТФ, 16, 574, 1946; УФН, 93, 527, 1967.
20. *А. Б. Михайловский, А. М. Фридман*, ЖЭТФ, 1971 (в печати).