АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 7 ФЕВРАЛЬ, 1971 ВЫПУСК 1

ОБРАЗОВАНИЕ ЛИНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ. II. ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКОВ

Х. ДОМКЕ

Поступила 29 января 1970

В рамках модели Милна-Эддингтона рассматривается образование линий в атмосферах звезд при наличии однородного магнитного поля. Считается, что рассеяние происходит с полным перераспределением по частотам. Вводятся скалярные функции источников, зависящие только от оптической глубины. Для них получена система интегральных уравнений типа Винера-Хопфа. В некоторых частных случаях система вырождается в одно уравнение. Путем обобщения метода В. В. Соболева на векторный случай показано, что резольвента системы выражается через обобщенные Н-функции, для которых выводится система нелинейных интегральных уравнений. Через эти функции выражается и выходящее излучение для случая линейной зависимости мощности первичных источников от оптической глубины.

1. *Введение*. В первой статье [1] было рассмотрено рассеяние поляризованного излучения элементарным объемом, находящимся в магнитном поле. В настоящей статье изучается многократное рассеяние излучения в спектральной линии при наличии однородного магнитного поля.

Обычно теория переноса излучения в спектральной линии строится без учета поляризации. Тогда задача об образовании линий сводится к скалярному уравнению переноса, методы решения которого изложены, например, в [2, 3]. При учете поляризации уравнение переноса пишется для вектора Стокса. Векторные уравнения переноса излучения в зеемановском мультиплете были получены В. Унно [4] и В. Е. Степановым [5] для случая чистого поглощения и В. Е. Степановым [6], Д. Н. Рачковским [7—9] и В. Н. Обридко [10] с учетом рассеяния света. В этих работах непосредственно применялись методы скалярной теории. При учете рассеяния это приводит к довольно громоздким уравнениям. Фигурирующие в них функции зависят от нескольких переменных и не инвариантны при переходе к другой системе представления векторов Стокса.

В [1] было показано, что при некоторых предположениях матрицу рассеяния можно представить в виде суммы диад. Это позволяет ввести инвариантные функции источников, зависящие только от одного переменного. Для них мы получим систему неоднородных интегральных уравнений типа Винера-Хопфа. В некоторых частных случаях, например, если верхний для рассматриваемого перехода уровень не расщепляется под влиянием магнитного поля, система вырождается в одно уравнение, решение которого находится в замкнутой форме. В общем случае получить решение системы в явном виде нельзя. Однако удается выяснить ряд свойств решений, в частности, для модели атмосферы Милна-Эддингтона выходящее излучение можно выразить через обобщенные Н-функции, определяемые системой нелинейных интегральных уравнений.

Используются обозначения [1], которые, как правило, не поясняются. Ссылки вида (I.24) означают формулу (24) из [1].

2. *Уравнение переноса.* Пусть в плоскопараллельной полубесконечной атмосфере имеются атомы с двумя уровнями. При наличии магнитного поля Н верхний уровень расщепляется на $2j_u+1$, а нижний на $2j_e+1$ подуровень. Кроме того имеются поглощение и излучение в непрерывном спектре, не зависящие от частоты в пределах рассматриваемого зеемановского мультиплета. Пусть магнитное поле однородно и образует угол γ_0 с внешней нормалью к границе атмосферы. Предположим, что при рассеянии света происходит полное перераспределение по частотам внутри переходов с общим верхним подуровнем, полное перераспределение электронов нижнего состояния по подуровням, а перераспределение электронов по подуровням верхнего состояния отсутствует. Тогда, как установлено в [1], матрица рассеяния имеет вид (I.24)

$$\hat{S}(\nu, \gamma;\ \nu',\ \gamma') = \sum_{k=-j_u}^{+j_u} \lambda_k C_k \vec{S}_k(\nu, \gamma) \vec{S}_k^T(\nu', \gamma'). \tag{1}$$

Здесь $\vec{S}_k(\nu, \gamma)$ — характеристический вектор Стокса излучения при переходах электронов с подуровня k вниз, определенный согласно (I.18), а

$$C_k = \left[\int_0^\infty d\nu \int_{4\pi} d\omega \vec{J}^T \vec{S}_k(\nu, \gamma) \right]^{-1}, \tag{2}$$

где $\vec{J}$ — вектор-оператор выделения полной интенсивности (I.7); γ и γ' — углы, образуемые направлениями соответственно рассеянного и падающего излучения с магнитным полем. Наконец,

$$\vec{S}_k(\nu, \gamma) = \hat{A}(\nu, \gamma) \vec{J}, \tag{3}$$

где $\hat{A}(\nu, \gamma)$ — оператор поглощения, определяемый формулой (I.9). Вместо $\hat{A}$, $\vec{S}_k$ и C_k будем употреблять величины

$$\hat{\alpha}(\nu, \gamma) = \frac{1}{k_L} \hat{A}(\nu, \gamma), \tag{4}$$

$$\vec{s}_k(\nu, \gamma) = \frac{1}{k_L} \vec{S}_k(\nu, \gamma), \tag{5}$$

$$c_k(\nu, \gamma) = k_L C_k(\nu, \gamma), \tag{6}$$

где k_L — атомный коэффициент поглощения, характеризующий поглощение в зеемановском мультиплете. Будем считать, что при таком определении величины (4), (5) и (6) не зависят от глубины. Явный вид $\hat{\alpha}(\nu, \gamma)$ пока не конкретизируется. В частности, $\hat{\alpha}$ может учитывать и эффект Фарадея, т. е. вращение плоскости линейной поляризации в магнитном поле [9].

Вместо геометрической глубины h введем оптическую глубину в мультиплете

$$\tau = \int_{-\infty}^{h} n k_L dh',$$

где n — концентрация поглощающих атомов. Обозначим через μ косинус угла, образуемого направлением распространения излучения с внешней нормалью, а через φ — азимут. Уравнение переноса для вектора Стокса $\vec{I}(\tau, \nu, \mu, \varphi)$ имеет при наших предположениях следующий вид:

$$\mu\frac{\partial}{\partial\tau}\vec{I}(\tau, \nu, \mu, \varphi) = [\hat{\alpha}(\nu, \gamma) + \beta]\vec{I}(\tau, \nu, \mu, \varphi) -$$

$$- \sum_{k=-j_a}^{j_a} \lambda_k c_k \vec{s}_k(\nu, \gamma) \int_{4\pi} d\omega \int_0^\infty d\nu' \vec{s}_k^T(\nu', \gamma') \vec{I}(\tau, \nu', \mu', \varphi') - \tag{7}$$

$$- \frac{1}{2}\left\{\sum_{k=-j_a}^{j_a} \vec{s}_k(\nu, \gamma) g_k(\tau) + \vec{J} g_c(\tau)\right\},$$

где β — отношение коэффициента поглощения в непрерывном спектре к $k_L n$ и

$$\cos\gamma = \mu\cos\gamma_0 + \sqrt{1-\mu^2}\sin\gamma_0\cos\varphi. \tag{8}$$

Первый член в правой части (7) описывает поглощение излучения атомами в мультиплете и в непрерывном спектре. Второй член описывает рассеяние света на атомах, а третье слагаемое—вклад первичных источников в мультиплете и в непрерывном спектре. Мы будем считать, что

$$\frac{g_k(\tau)}{1-\lambda_k} = g_c(\tau) = B(T(\tau)), \tag{9}$$

где $B(T)$ — функция Планка. Это значит, в частности, что переизлучение в непрерывном спектре происходит согласно ЛТР.

К уравнению переноса (7) необходимо добавить граничное условие

$$\vec{I}(0, \nu, \mu, \varphi) = 0,$$
$$0 < \mu \leqslant 1, \quad 0 < \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 < \nu < \infty. \tag{10}$$

3. *Функции источников*. Введем скалярные функции источников

$$S_k(\tau) = 2c_k\lambda_k \int_0^\infty d\nu \int_{4\pi} d\omega\, \vec{s}_k^T(\nu, \gamma)\, \vec{I}(\tau, \nu, \mu, \varphi) + g_k(\tau), \tag{11}$$

$$k = -j_a, -j_a+1, \dots j_a-1, j_a.$$

Поскольку и подынтегральное выражение в (11) представляет собой скалярное произведение двух векторов Стокса, $S_k(\tau)$ не зависят от системы представления этих векторов. Если вместо $\vec{I}(\tau, \nu, \mu, \varphi)$ в (11) подставить вектор Стокса планковского излучения $(1/2)\,\vec{J}B(T)$, то при помощи (2), (3) и (9) найдем

$$S_k(\tau) = \left| c_k \lambda_k \int_0^\infty d\nu \int_{4\pi} d\omega \vec{s}_k^{\,T}(\nu, \gamma) \vec{J} + 1 - \lambda_k \right| B(T) = B(T), \tag{12}$$

как и должно быть.

Сведем уравнение переноса (7) с граничным условием (10) к системе интегральных уравнений для функций источников $S_k(\tau)$. Учитывая (11), уравнение (7) можно представить в виде

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} \vec{I}(\tau, \nu, \mu, \varphi) = [\hat{\alpha}(\nu, \gamma) + \beta]\, \vec{I}(\tau, \nu, \mu, \varphi) - \\ - \frac{1}{2} \sum_{k=-j_a}^{j_a} \vec{s}_k(\nu, \gamma)\, S_k(\tau) - \frac{1}{2} \vec{J} g_c(\tau). \tag{13}$$

Формальное решение этого уравнения при граничном условии (10) есть

$$\mu > 0, \quad \vec{I}(\tau, \nu, \mu, \varphi) = \int_\tau^\infty \exp\left\{-[\hat{\alpha}(\nu, \gamma) + \beta](\tau' - \tau) \frac{1}{\mu}\right\} \times \\ \times \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=-j_a}^{j_a} \vec{s}_k(\nu, \gamma)\, S_k(\tau') + \vec{J} g_c(\tau') \right\} \frac{d\tau'}{\mu}; \tag{14}$$

$$\mu < 0, \quad \vec{I}(\tau, \nu, \mu, \varphi) = -\int_0^\tau \exp\left\{-[\hat{\alpha}(\nu, \gamma) + \beta](\tau' - \tau) \frac{1}{\mu}\right\} \times \\ \times \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=-j_a}^{j_a} \vec{s}_k(\nu, \gamma)\, S_k(\tau') + \vec{J} g_c(\tau') \right\} \frac{d\tau'}{\mu}. \tag{15}$$

В частности, для выходящего из среды излучения получаем

$$\vec{I}(0, \nu, \mu, \varphi) = \int_0^\infty \exp\left\{-[\hat{\alpha}(\nu, \gamma) + \beta] \frac{\tau}{\mu}\right\} \times \\ \times \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=-j_a}^{j_a} \vec{s}_k(\nu, \gamma)\, S_k(\tau) + \vec{J} g_c(\tau) \right\} \frac{d\tau}{\mu}. \tag{16}$$

Под выражением $\exp\left\{-[\hat{\alpha}(\nu, \gamma)+\beta]\frac{\tau}{\mu}\right\}$ понимается функция от матрицы в обычном смысле [11]. Предположим, что матрица $\hat{\alpha}(\nu, \gamma)$ диагонализуется. Пусть $\lambda_l(\nu, \gamma)$ — ее собственные значения, а $\vec{\psi}_l(\nu, \gamma)$ — собственные векторы, образующие базисную систему векторного пространства. Если $\vec{\psi}^*_l(\nu, \gamma)$биортогональная система, определяемая соотношениями

$$\vec{\psi}_l^{*T}(\nu, \gamma)\,\vec{\psi}_l(\nu, \gamma) = \delta_{ll}, \tag{17}$$

то оператор $\exp\left\{-[\hat{\alpha}(\nu, \gamma)+\beta]\frac{\tau}{\mu}\right\}$ можно выразить следующим образом:

$$\exp\left\{-[\hat{\alpha}(\nu, \gamma)+\beta]\frac{\tau}{\mu}\right\} = \sum_{l=1}^{4} \vec{\psi}_l(\nu, \gamma)\, e^{-[\lambda_l(\nu, \gamma)+\beta]\frac{\tau}{\mu}}\, \vec{\psi}_l^{*T}(\nu, \gamma). \tag{18}$$

Отметим, что при отсутствии эффекта Фарадея оператор $\hat{\alpha}(\nu, \gamma)$ симметричен (I.10), и в этом случае $\vec{\psi}_l(\nu, \gamma) = \vec{\psi}^*_l(\nu, \gamma)$. Как легко проверить, при этом только два собственных вектора, скажем, $\vec{\psi}_1$ и $\vec{\psi}_2$, являются настоящими векторами Стокса.

Отметим свойство симметрии оператора $\hat{\alpha}(\nu, \gamma)$. Если направление излучения характеризуется параметрами μ и φ и образует угол γ с магнитным полем, то противоположное — параметрами $-\mu$, $\varphi \pm \pi$, а согласно (8) угол с H становится $\gamma \pm \pi$. Из явного выражения для оператора $\hat{\alpha}(\nu, \gamma)$, приведенного в [9] с учетом эффекта Фарадея, можно вывести, что

$$\hat{\alpha}(\nu, \gamma \pm \pi) = \hat{i}\,\hat{\alpha}(\nu, \gamma)\,\hat{i}, \tag{19}$$

где

$$\hat{i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Соотношение (19) было впервые отмечено Д. Н. Рачковским [8, 9]. Появление матрицы $\hat{i}$ объясняется тем, что при замене направления излучения на противоположное два первых параметра Стокса I_1 и I_2 не меняются, а два последних (v, u) изменяют знак. Сам же процесс поглощения инвариантен относительно такой замены.

Подставим теперь формальное решение (14) и (15) в определение функций источников (11). Используя свойство симметрии оператора $\hat{\alpha}(\nu, \gamma)$, получаем систему интегральных уравнений

$$S_k(\tau) = \frac{1}{2}\lambda_k \int\limits_0^\infty d\tau' \sum_{l=-j_u}^{j_u} K_{kl}(\beta; |\tau - \tau'|)\, S_l(\tau') + S_k^*(\tau), \tag{20}$$

$$k = -j_u, \dots j_u.$$

Здесь

$$K_{kl}(\beta; \tau) = 2c_k \int\limits_0^\infty d\nu \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \vec{s}_k^{\,T}(\nu, \gamma)\, e^{-[\hat{\alpha}(\nu, \gamma)+\beta]\frac{\tau}{\mu}}\, \vec{s}_l(\nu, \gamma) \tag{21}$$

и

$$S_k^*(\tau) = \frac{1}{2}\lambda_k \beta \int\limits_0^\infty d\tau' L_k(\beta; |\tau - \tau'|)\, g_c(\tau') + g_k(\tau) \tag{22}$$

известная функция, причем

$$L_k(\beta; \tau) = 2c_k \int\limits_0^\infty d\nu \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \vec{s}_k^{\,T}(\nu, \gamma)\, e^{-[\hat{\alpha}(\nu, \gamma)+\beta]\frac{\tau}{\mu}}\, \vec{J}. \tag{23}$$

Поскольку в выражениях (21) и (23) стоят скалярные произведения векторов Стокса, они не могут быть отрицательными. Эти функции имеют простой вероятностный смысл: $(\lambda_k/2)\, K_{kl}(\beta; \tau)\, d\tau$ есть вероятность того, что квант излучится при разрушении возбуждения k-го верхнего подуровня и впервые поглотится в плоском слое толщины $d\tau$, находящемся на оптическом расстоянии τ от места излучения, возбуждая подуровень l верхнего состояния. Поэтому при отсутствии поглощения в непрерывном спектре ($\beta = 0$) должно иметь место соотношение

$$\int\limits_0^\infty d\tau \sum_{l=-j_u}^{j_u} K_{kl}(0; \tau) = 1.$$

Действительно, его легко доказать, подставляя в $K_{kl}(0; \tau)$ выражения

(6) и (2) для c_k, а также (5) и (3) для $\vec{s}_k(\nu, \gamma)$. Аналогичным образом функции $L_k(\beta; \tau)$ описывают взаимодействие между излучением в непрерывном спектре и возбуждениями атомов.

Для частного случая нерасщепленного верхнего уровня ($j_a = 0$) получаем только одно интегральное уравнение вида (20) с ядром

$$K(\beta; \tau) = 2c \int_0^\infty d\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \vec{J}^T \hat{\alpha}^T(\nu, \gamma) \times$$
$$\times \sum_{i=1}^4 \vec{\psi}_i(\nu, \gamma) e^{-[\lambda_i(\nu, \gamma)+\beta]\frac{\tau}{\mu}} \vec{\psi}_i^{*T}(\nu, \gamma) \hat{\alpha}(\nu, \gamma) \vec{J}. \tag{24}$$

При написании (24) использованы соотношения (3), (5) и (18). В случае отсутствия магнитного вращения ядро (24) упрощается еще больше:

$$K(\beta; \tau) = 2c \int_0^\infty d\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \sum_{i=1}^2 \lambda_i^2(\nu, \gamma) e^{-[\lambda_i(\nu, \gamma)+\beta]\frac{\tau}{\mu}}. \tag{25}$$

Сумма по i содержит только два члена, поскольку оператор полной интенсивности $\vec{I}$ выделяет только два собственных вектора $\vec{\psi}_1(\nu, \gamma)$ и $\vec{\psi}_2(\nu, \gamma)$. Аналогично для $L(\beta; \tau)$ получаем

$$L(\beta; \tau) = 2c \int_0^\infty d\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \sum_{i=1}^4 \lambda_i(\nu, \gamma) e^{-[\lambda_i(\nu, \gamma)+\beta]\frac{\tau}{\mu}}. \tag{26}$$

Методы решения скалярного уравнения хорошо известны [2, 3].

4. *Решение системы интегральных уравнений (20).* Таким образом, наша задача в общем случае, т. е. при расщепленном верхнем уровне, свелась к решению многомерного интегрального уравнения типа Винера-Хопфа. Такие системы подробно изучены И. Ц. Гохбергом и М. Г. Крейном [12]. Ими был обобщен метод Винера-Хопфа и доказана возможность факторизации матриц—функций. Мы обобщили развитый для решения скалярного уравнения метод В. В. Соболева [2, 3].

Удобно записать систему (20) компактно в виде $(2j_a+1)$ — мерного векторного уравнения. Для этого введем диагональные матрицы

$$\bar{\mathfrak{C}} = (c_k \delta_{kl}), \qquad \bar{\Lambda} = (\lambda_k \delta_{kl}), \tag{27}$$

затем матрицы

$$\tilde{\mathfrak{C}}^l(\nu, \gamma) = (\mathfrak{C}^l_{kl}(\nu, \gamma)) = ([\vec{\psi}_l^{*T}(\nu, \gamma) \cdot \vec{s}_l(\nu, \gamma)][\vec{s}_k^T(\nu, \gamma) \cdot \vec{\psi}_l(\nu, \gamma)]), \tag{28}$$

а также векторы

$$\mathfrak{C}^l(\nu, \gamma) = (\mathfrak{C}^l_k(\nu, \gamma)) = ([\vec{\psi}_l^{*T}(\nu, \gamma) \cdot \vec{J}][\vec{s}_k^T(\nu, \gamma) \cdot \vec{\psi}_l(\nu, \gamma)]). \tag{29}$$

При помощи этих величин ядро $\bar{\mathfrak{K}}(\beta; \tau) = (K_{kl}(\beta; \tau))$ векторного интегрального уравнения можно записать в виде

$$\bar{\mathfrak{K}}(\beta; \tau) = 2\bar{\mathfrak{C}} \int_0^\infty d\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \sum_{l=1}^4 \tilde{\mathfrak{C}}^l(\nu, \gamma)\, e^{-\frac{\tau}{z_l(\beta; \nu, \mu, \varphi)}}, \tag{30}$$

где

$$z_l(\beta; \nu, \mu, \varphi) = \frac{\mu}{\lambda_l(\nu, \gamma) + \beta}. \tag{31}$$

Аналогично (L_k) записывается как $(2j_a+1)$ — мерный вектор

$$\mathfrak{L}(\beta; \tau) = 2\tilde{\mathfrak{C}} \int_0^\infty d\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \sum_{l=1}^4 \mathfrak{C}^l(\nu, \gamma)\, e^{-\frac{\tau}{z_l(\beta; \nu; \mu, \varphi)}}. \tag{32}$$

В результате, система (20) заменяется интегральным уравнением для вектора $S(\tau) = S_k(\tau))$:

$$S(\tau) = \frac{1}{2}\bar{\Lambda} \int_0^\infty d\tau' \,\bar{\mathfrak{K}}(\beta; |\tau - \tau'|)\, S(\tau') + S^*(\tau), \tag{33}$$

где

$$S^*(\tau) = \frac{1}{2}\beta\bar{\Lambda} \int_0^\infty d\tau' \,\mathfrak{L}(\beta; |\tau - \tau'|)\, g_c(\tau') + \mathfrak{G}_0 g_c(\tau), \tag{34}$$

а $\mathfrak{G}_0 = (g_{0k}) = (1 - \lambda_k)$.

Обозначим через $\tilde{\Gamma}(\beta; \tau, \tau')$ резольвенту уравнения (33). Через нее решение выражается в виде

$$S(\tau) = \int_0^\infty d\tau' \tilde{\Gamma}(\beta; \tau, \tau') S^*(\tau') + S^*(\tau). \tag{35}$$

$\tilde{\Gamma}(\beta; \tau, \tau')$ — удовлетворяет уравнениям

$$\tilde{\Gamma}(\beta; \tau, \tau') = \frac{1}{2} \Lambda \int_0^\infty d\tau'' \tilde{\mathfrak{R}}(\beta; |\tau - \tau''|) \tilde{\Gamma}(\beta; \tau'', \tau') + \frac{1}{2} \Lambda \tilde{\mathfrak{R}}(\beta; |\tau - \tau'|) \tag{36}$$

и

$$\tilde{\Gamma}(\beta; \tau, \tau') = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\tau'' \tilde{\Gamma}(\beta; \tau, \tau'') \Lambda \tilde{\mathfrak{R}}(\beta; |\tau'' - \tau'|) + \frac{1}{2} \Lambda \tilde{\mathfrak{R}}(\beta; |\tau - \tau'|). \tag{37}$$

Резольвенту можно выразить через функции $\tilde{\Gamma}(\beta; \tau, 0)$ и $\tilde{\Gamma}(\beta; 0, \tau)$. Дифференцируя (36) по τ' и τ, получаем, учитывая линейность уравнений (36) и (37),

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau'} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \tilde{\Gamma}(\beta; \tau, \tau') = \tilde{\Gamma}(\beta; \tau, 0) \tilde{\Gamma}(\beta; 0, \tau). \tag{38}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(\beta; \tau, \tau') &= \tilde{\Gamma}(\beta; \tau - \tau', 0) + \tilde{\Gamma}(\beta; 0, \tau' - \tau) + \\ &+ \int_0^{\min(\tau', \tau)} d\alpha\, \tilde{\Gamma}(\beta; \tau - \alpha, 0) \tilde{\Gamma}(\beta; 0, \tau' - \alpha), \end{aligned} \tag{39}$$

где по определению

$$\tilde{\Gamma}(\beta; \tau, 0) = \tilde{\Gamma}(\beta; 0, \tau) = 0, \text{ если } \tau < 0.$$

Покажем, что $\tilde{\Gamma}(\beta; \tau, 0)$ и $\tilde{\Gamma}(\beta; 0, \tau)$ выражаются через некоторые вспомогательные функции, являющиеся обобщениями H-функции скалярной теории.

5. *Вспомогательные уравнения.* Имея в виду специальную форму (30) ядра $\tilde{\mathfrak{R}}(\beta; \tau)$ и линейность интегральных уравнений, рассмотрим следующие вспомогательные уравнения:

$$\tilde{S}(\beta;\tau,z)=\frac{1}{2}\tilde{\Lambda}\int\limits_0^\infty d\tau'\tilde{\mathfrak{R}}(\beta;|\tau-\tau'|)\tilde{S}(\beta;\tau',z)+\tilde{\mathrm{E}}e^{-\frac{\tau}{z}} \tag{40}$$

и

$$\tilde{S}^+(\beta;\tau,z)=\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty d\tau'\tilde{S}^+(\beta;\tau',z)\tilde{\Lambda}\tilde{\mathfrak{R}}(\beta;|\tau'-\tau|)+\tilde{\mathrm{E}}e^{-\frac{\tau}{z}}, \tag{41}$$

где $\tilde{\mathrm{E}}$ — единичная матрица.

Решения этих уравнений выражаем через резольвенту

$$\tilde{S}(\beta;\tau,z)=\int\limits_0^\infty d\tau'\tilde{\Gamma}(\beta;\tau,\tau')e^{-\frac{\tau'}{z}}+\tilde{\mathrm{E}}e^{-\frac{\tau}{z}}, \tag{42}$$

$$\tilde{S}^+(\beta;\tau,z)=\int\limits_0^\infty d\tau'\tilde{\Gamma}(\beta;\tau',\tau)e^{-\frac{\tau'}{z}}+\tilde{\mathrm{E}}e^{-\frac{\tau}{z}}. \tag{43}$$

$\tilde{S}(\beta;\tau,z)$ и $\tilde{S}^+(\beta;\tau,z)$ — по существу являются преобразованиями Лапласа от резольвенты по одному из аргументов. В частности,

$$\tilde{S}(\beta;0,z)=\int\limits_0^\infty d\tau'\tilde{\Gamma}(\beta;0,\tau')e^{-\frac{\tau'}{z}}+\tilde{\mathrm{E}}\equiv\tilde{\mathfrak{H}}(\beta;z), \tag{44}$$

$$\tilde{S}^+(\beta;0,z)=\int\limits_0^\infty d\tau'\tilde{\Gamma}(\beta;\tau',0)e^{-\frac{\tau'}{z}}+\tilde{\mathrm{E}}\equiv\tilde{\mathfrak{H}}(\beta;z). \tag{45}$$

Эти соотношения показывают, что если найти $\tilde{\mathfrak{H}}(\beta;z)$ и $\tilde{\mathfrak{H}}^+(\beta;z)$, то путем обращения преобразования Лапласа можно получить $\tilde{\Gamma}(\beta;0,\tau)$ и $\tilde{\Gamma}(\beta;\tau,0)$, а тем самым резольвенту $\tilde{\Gamma}(\beta;\tau,\tau')$. В частности, через $\tilde{\mathfrak{H}}$ и $\tilde{\mathfrak{H}}^+$ выражается и выходящее излучение.

Выведем нелинейное интегральное уравнение для $\tilde{\mathfrak{H}}(\beta;z)$ и $\tilde{\mathfrak{H}}^+(\beta;z)$. Для этого умножим уравнение (38) на $e^{-\left(\frac{\tau}{z}+\frac{\tau'}{z'}\right)}$ и проинтегрируем по τ и τ' от 0 до ∞. Тогда, интегрируя по частям и учитывая формулы (42)—(45), получим

$$\widetilde{\mathfrak{R}}(z, z') = \int_0^\infty d\tau\, e^{-\frac{\tau}{z'}} \widetilde{S}(\beta; \tau, z) = \int_0^\infty d\tau\, e^{-\frac{\tau}{z}} \widetilde{S}^+(\beta; \tau, z') =$$
$$= \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z'}\right)^{-1} \widetilde{\mathfrak{H}}^+(\beta; z')\, \widetilde{\mathfrak{H}}(\beta; z). \tag{46}$$

Из формул (37) и (41) следует

$$\widetilde{\Gamma}(\beta; 0, \tau) = \frac{1}{2}\widetilde{\Lambda}\widetilde{\mathfrak{C}}\int_0^\infty d\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \sum_{i=1}^4 2\widetilde{\mathfrak{C}}^i(\nu, \gamma)\widetilde{S}^+(\beta; \tau, z_i(\beta; \nu, \mu, \varphi)). \tag{47}$$

Подставляя это в уравнение (44), при помощи (46) получаем искомое нелинейное уравнение

$$\widetilde{\mathfrak{H}}(\beta; z) = \widetilde{\mathrm{E}} + \frac{1}{2}\widetilde{\Lambda}\widetilde{\mathfrak{C}}\int_0^\infty d\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \sum_{i=1}^4 2\widetilde{\mathfrak{C}}^i(\nu, \gamma) \times$$
$$\times \frac{\widetilde{\mathfrak{H}}^+(\beta; z_i(\beta; \nu, \mu, \varphi))}{z^{-1} + z_i^{-1}(\beta; \nu, \mu, \varphi)} \widetilde{\mathfrak{H}}(\beta; z). \tag{48}$$

Аналогично получаем, используя (36), (40) и (46)

$$\widetilde{\mathfrak{H}}^+(\beta; z) = \widetilde{\mathrm{E}} + \frac{1}{2}\widetilde{\mathfrak{H}}^+(\beta; z)\int_0^\infty d\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \sum_{i=1}^4 \frac{\widetilde{\mathfrak{H}}(\beta; z_i(\beta; \nu, \mu, \varphi))}{z^{-1} + z_i^{-1}(\beta; \nu, \mu, \varphi)} \times$$
$$\times \widetilde{\Lambda}\widetilde{\mathfrak{C}} 2\widetilde{\mathfrak{C}}^i(\nu, \gamma). \tag{49}$$

Матрицы $\widetilde{\mathfrak{H}}(\beta; z)$ и $\widetilde{\mathfrak{H}}^+(\beta; z)$ являются обобщенными Н-функциями Чандрасекара [13]. В случае $j_a = 0$ это две равные скалярные функции $\mathrm{H}(\beta; z)$. В общем случае при симметричном операторе поглощения $\hat{\alpha}$ имеется простая связь между ними. Учтя диагональность матриц $\widetilde{\mathfrak{C}}$ и $\widetilde{\Lambda}$ и симметричность матриц $\widetilde{\mathfrak{C}}^i(\nu, \gamma)$, при помощи уравнений (48) и (49) легко убедиться в том, что

$$\widetilde{\Lambda}\widetilde{\mathfrak{C}}\widetilde{\mathfrak{H}}^{+T}(\beta; z) = \widetilde{\mathfrak{H}}(\beta; z)\widetilde{\Lambda}\widetilde{\mathfrak{C}}. \tag{50}$$

Рассмотрим более подробно случай нерасщепленного верхнего уровня. Тогда все уравнения становятся одномерными, как в теории без учета поляризации и магнитного поля. Хотя ядро $\widetilde{\mathfrak{K}}(\beta; \tau)$ в нашем случае имеет более сложный вид, оно сохраняет все существенные свойства, которые позволяют найти решение задачи в замкнутом виде. Отметим, в частности, что для $\mathrm{H}(\beta; z)$ справедлива формула [3]

$$\ln \mathrm{H}(\beta; z) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \ln\left[1-\lambda V(u; \beta)\right]\frac{z\,du}{z^2u^2+1}, \tag{51}$$

где

$$V(u; \beta) = \int_0^\infty d\tau K(\beta; \tau)\cos u\tau. \tag{52}$$

При отсутствии эффекта Фарадея для $V(u; \beta)$ получаем из (52) и (25)

$$V(u; \beta) = 2c\int_0^\infty d\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu}\sum_{i=1}^{2}\frac{\lambda_i^2(\nu, \gamma)\, z_i(\beta; \nu, \mu, \varphi)}{1+u^2z_i^2(\beta; \nu, \mu, \varphi)}. \tag{53}$$

Найти решение в общем случае ($j_u \neq 0$) в замкнутом виде не удается.

В дальнейшем нам потребуются моменты матриц $\mathfrak{H}$-функций, определенные следующим образом:

$$\widetilde{\mathfrak{h}}_n(\beta) = \int_0^\infty d\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu}\sum_{i=1}^{4} z_i^{n+1}(\beta; \nu, \mu, \varphi)\, \widetilde{\mathfrak{H}}(\beta; z_i(\beta; \nu, \mu, \varphi))\widetilde{\Lambda}\widetilde{\mathfrak{C}}2\widetilde{\mathfrak{C}}^i(\nu, \gamma) \tag{54}$$

и

$$\widetilde{\mathfrak{h}}_n^+(\beta) = \int_0^\infty d\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu}\sum_{i=1}^{4} z_i^{n+1}(\beta; \nu, \mu, \varphi)\widetilde{\mathfrak{C}}\times$$
$$\times 2\widetilde{\mathfrak{C}}^i(\nu, \gamma)\, \widetilde{\mathfrak{H}}^+(\beta; z_i(\beta; \nu, \mu, \varphi)). \tag{55}$$

Через них выражается, например, $\widetilde{\mathfrak{H}}(\beta; \infty)$, а именно:

$$\widetilde{\mathfrak{H}}(\beta; \infty) = \left[\mathrm{E} - \frac{1}{2}\widetilde{\Lambda}\,\widetilde{\mathfrak{h}}_0^+(\beta)\right]^{-1}. \tag{56}$$

Последнее соотношение легко получить из нелинейного интегрального уравнения (48).

6. *Выходящее излучение.* Теперь применим развитую выше теорию к задаче об образовании линий в атмосфере. Для этого перепишем выражение (16) для вектора Стокса выходящего излучения при помощи (18) в виде

$$\vec{I}(0, \nu, \mu, \varphi) = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{4}\vec{\psi}_l(\nu, \gamma)\frac{1}{\mu}\left\{\sum_{k=-j_u}^{j_u} a_{lk}(\nu, \gamma)\int_0^\infty d\tau\, e^{-\frac{\tau}{z_l(\beta;\,\nu,\mu,\varphi)}} \times \right. \tag{57}$$

$$\left. \times S_k(\tau) + \beta a_{lc}(\nu, \gamma)\int_0^\infty d\tau\, e^{-\frac{\tau}{z_l(\beta;\,\nu,\mu,\varphi)}} g_c(\tau)\right\},$$

где

$$a_{lk}(\nu, \gamma) = \vec{\psi}_l^{*T}(\nu, \gamma)\, \vec{s}_k(\nu, \gamma), \tag{58}$$

$$a_{lc}(\nu, \gamma) = \vec{\psi}_l^{*T}(\nu, \gamma)\, \vec{J}. \tag{59}$$

Формулу (57) представим при помощи вектор-функции

$$\mathfrak{R}(z) = \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{z}} S(\tau)\, d\tau, \tag{60}$$

скалярной функции

$$R_c(z) = \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{z}} g_c(\tau)\, d\tau \tag{61}$$

и вектора $\mathfrak{A}_l(\nu, \gamma) = (a_{lk}(\nu, \gamma))$ в следующем виде:

$$\vec{I}(0, \nu, \mu, \varphi) = \frac{1}{2\mu}\sum_{l=1}^{4}\vec{\psi}_l(\nu, \gamma)\{\mathfrak{A}_l^T(\nu, \gamma)\,\mathfrak{R}(z_l(\beta;\, \nu, \mu, \varphi)) + \tag{62}$$

$$+ \beta a_{lc}(\nu, \gamma)\, R_c(z_l(\beta;\, \nu, \mu, \varphi))\}.$$

Найдем вектор $\mathfrak{R}(z)$. Для этого рассмотрим вначале вспомогательный случай матрицы функций первичных источников

$$\widetilde{S}^*\left(\tau, \frac{1}{m}\right) = \widetilde{\mathrm{E}} e^{-m\tau}. \tag{63}$$

Ясно, что матрицей функций источников является тогда $\widetilde{S}(\beta;\, \tau,\, 1/m)$. Из (46) следует, что матрица

$$\widetilde{\mathfrak{R}}\left(z, \frac{1}{m}\right) = \int_0^\infty d\tau\, e^{-\frac{\tau}{z}} \widetilde{S}\left(\beta; \tau, \frac{1}{m}\right) = z \frac{\widetilde{\mathfrak{H}}^+(\beta; z)\widetilde{\mathfrak{H}}\left(\beta; \frac{1}{m}\right)}{1 + mz}. \tag{64}$$

В частности, для $\widetilde{S}^*(\tau) = \widetilde{\mathrm{E}}$ получаем

$$\widetilde{\mathfrak{R}}(z, \infty) = z\widetilde{\mathfrak{H}}^+(\beta; z)\widetilde{\mathfrak{H}}(\beta; \infty) = \widetilde{\mathfrak{R}}_0(z). \tag{65}$$

Рассмотрим еще случай

$$\widetilde{S}_1^*(\tau) = \widetilde{\mathrm{E}}\tau. \tag{66}$$

Поскольку

$$\widetilde{S}_1^*(\tau) = -\lim_{m\to 0} \frac{\partial}{\partial m} \widetilde{S}^*\left(\tau, \frac{1}{m}\right), \tag{67}$$

то в силу линейности нашей системы

$$\widetilde{\mathfrak{R}}_1(z) = -\lim_{m\to 0} \frac{\partial}{\partial m} \widetilde{\mathfrak{R}}\left(z, \frac{1}{m}\right) =$$
$$= z\widetilde{\mathfrak{H}}^+(\beta; z)\left\{z + \widetilde{\mathfrak{H}}(\beta; \infty)\frac{1}{2}\widetilde{\Lambda}\widetilde{\mathfrak{h}}_1^+(\beta)\right\}\widetilde{\mathfrak{H}}(\beta; \infty). \tag{68}$$

При получении производной по m от матрицы $\widetilde{\mathfrak{H}}(\beta; 1/m)$ было использовано уравнение (48).

Предположим, что источники в непрерывном спектре представляются линейной функцией оптической глубины, т. е.

$$g_c(\tau) = B_0(1 + b\tau). \tag{69}$$

Тогда из (34) следует

$$S^*(\tau) = B_0\left\{(1 + b\tau)\,\mathfrak{S}_1(\beta) + \int_0^\infty d\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \sum_{i=1}^4 e^{-\frac{\tau}{z_i(\beta;\, \nu, \mu, \varphi)}} \times \right.$$
$$\left. \times\, \mathfrak{S}_2^i(\beta; \nu, \mu, \varphi)\right\}, \tag{70}$$

где

$$\mathfrak{S}_1(\beta) = 2\beta \int_0^\infty d\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \sum_{i=1}^4 z_i(\beta; \nu, \mu, \varphi)\,\widetilde{\Lambda}\widetilde{\mathfrak{C}}\mathfrak{C}^i(\nu, \gamma) + \mathfrak{S}_0 \tag{71}$$

и

$$\mathfrak{G}_2^i(\beta;\ \nu,\ \mu,\ \varphi) = \beta z_i(\beta;\ \nu,\ \mu,\ \varphi)\,(bz_i(\beta;\ \nu,\ \mu,\ \varphi) - 1)\ \widetilde{\Lambda}\widetilde{\mathfrak{C}}\mathfrak{C}^i(\nu,\ \gamma). \qquad (72)$$

Функция $\mathfrak{R}(z)$ выражается поэтому через $\widetilde{\mathfrak{R}}(z,\ 1/m)$, $\widetilde{\mathfrak{R}}_0(z)$ и $\widetilde{\mathfrak{R}}_1(z)$ следующим образом:

$$\mathfrak{R}(z) = B_0\Bigg\{(\widetilde{\mathfrak{R}}_0(z) + b\widetilde{\mathfrak{R}}_1(z))\,\mathfrak{G}_1(\beta) + \\ + \int\limits_0^\infty d\nu \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \sum_{i=1}^{4} \mathfrak{R}(z;\ z_i(\beta;\ \nu,\ \gamma))\,\mathfrak{G}_2^i(\beta;\ \nu,\ \mu,\ \varphi)\Bigg\}. \qquad (73)$$

Скалярная же функция $R_c(z)$ дает выражение для выходящего излучения при отсутствии рассеяния. Для нее имеем

$$R_c(z) = B_0 z\,(1 + bz). \qquad (74)$$

Таким образом, все функции, входящие в формулу (62), нами найдены. Подобным образом можно выразить выходящее излучение через обобщенные H-функции и в более сложных случаях зависимости первичных источников от глубины, а именно, если $g_c(\tau)$ есть произведение полиномов от τ на экспоненту, но мы на этом не будем останавливаться.

Рассмотрим опять случай нерасщепленного верхнего уровня ($j_a = 0$). Если не учитывать эффект Фарадея, то величины (58) и (59) становятся равными

$$a_i(\nu,\ \gamma) = \vec{\psi}_i^{\,T}(\nu,\ \gamma)\,\vec{s}(\nu,\ \gamma) = (\vec{\psi}_i^{\,T}(\nu,\ \gamma)\,\hat{\alpha}(\nu,\ \gamma)\,\vec{J}), \qquad (75)$$

$$a_i(\nu,\ \gamma) = \begin{cases} \lambda_i(\nu,\ \gamma), & i = 1, 2 \\ 0 & i = 3, 4, \end{cases}$$

а

$$a_{ic}(\nu,\ \gamma) = \vec{\psi}_i(\nu,\ \mu,\ \varphi)\,\vec{I} = \begin{cases} 1, & i = 1, 2 \\ 0, & i = 3, 4. \end{cases} \qquad (76)$$

Для выходящего излучения получаем тогда согласно (62)

$$\vec{I}(0,\ \nu,\ \mu,\ \varphi) = \frac{1}{2\mu} \sum_{i=1}^{2} \vec{\psi}_i(\nu,\ \gamma)\ \times \\ \times \{R\,(z_i(\beta;\ \nu,\ \mu,\ \varphi))\,\lambda_i(\nu,\ \gamma) + \beta R_c\,(z_i(\beta;\ \nu,\ \mu,\ \varphi))\}, \qquad (77)$$

где

$$R(z) = B_0 z H(\beta; z)\left\{\left[1 + H(\beta; \infty)\frac{1}{2}\lambda h_1(\beta) + z\right] H(\beta; \infty)\, G_1(\beta) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^\infty d\nu \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \sum_{i=1}^{2} \frac{H(\beta; z_i(\beta; \nu, \mu, \varphi))}{z + z_i(\beta; \nu, \mu, \varphi)}\, z_i(\beta; \nu, \mu, \varphi)\, G_2^i(\beta)\right\}, \tag{78}$$

$$G_1(\beta) = \beta \int\limits_0^\infty d\nu \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \sum_{i=1}^{2} 2\lambda c z_i(\beta; \nu, \mu, \varphi)\, \lambda_i(\nu, \mu, \varphi) + (1-\lambda), \tag{79}$$

$$G_2^i(\beta; \nu, \mu, \varphi) = \beta\lambda c\lambda_i(\nu, \mu, \varphi)\,[b z_i(\beta; \nu, \mu, \varphi) - 1]. \tag{80}$$

Отметим, что в этом частном случае выходящее излучение представляется линейной комбинацией только двух ортогональных векторов $\vec{\psi}_1(\nu, \gamma)$ и $\vec{\psi}_2(\nu, \gamma)$. Два других собственных вектора оператора поглощения $\hat{\alpha}(\nu, \gamma)$ не входят ни в одну функцию, характеризующую поле излучения. Этот факт показывает, что теорию можно с самого начала построить на основе этих двух ортогонально поляризованных лучей света, что было сделано В. Е. Степановым [6]. Ясно также, что такой подход в общем случае неправилен.

В заключение отметим, что наши результаты включают и случай монохроматического рассеяния. Для перехода к нему нужно во все интегралы по частоте ввести δ-функцию Дирака, $\delta(\nu' - \nu)$, где ν — рассматриваемая частота (см. [1]). При полном перераспределении электронов по подуровням верхнего состояния атомов теория формально совпадает с частным случаем $j_a = 0$ развитой выше теории, только оператор поглощения $\hat{\alpha}(\nu, \gamma)$ имеет тогда более сложную зависимость от частоты (см. также [1]).

Таким образом, мы получили решение задачи об образовании линий при наличии магнитного поля для нескольких моделей рассеяния света на атомах. При этом поведение поля поляризованного излучения описывалось при помощи скалярных функций источников, зависящих только от одной переменной и имеющих простой физический смысл.

В следующей части работы будут приведены результаты численных расчетов, выполненных на основе развитой выше теории.

Астрофизическая обсерватория
Потсдам, ГДР

LINE FORMATION IN THE PRESENCE OF MAGNETIC FIELD. II. SOURCE FUNCTIONS

H. DOMKE

Theory of line formation in Milne-Eddington model atmospheres with homogeneous magnetic field is developed. Complete frequency redistribution upon scattering is taken into account. Scalar source functions are introduced depending only on optical depth. For these functions coupled integral equations of Wiener-Hopf type are derived. In special cases these equations degenerate to one equation. The resolvent of the coupled equations may be found in terms of generalized H-functions by generalizing Sobolev's method to vectorial case. For the generalized H-functions coupled nonlinear integral equations are found. The emergent radiation is found in terms of these H-functions for the case of the energy output of primary sources linearly increasing with the optical depth.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Х. Домке*, Астрофизика, 5, 521, 1969.
2. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.
3. *В. В. Иванов*, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
4. *W. Unno*, P.A.S. Japan, 8, 108, 1956.
5. *В. Е. Степанов*, Изв. КрАО, 18, 136, 1958.
6. *В. Е. Степанов*, Изв. КрАО, 19, 20, 1958.
7. *Д. Н. Рачковский*, Изв. КрАО, 30, 267, 1963.
8. *Д. Н. Рачковский*, Изв. КрАО, 36, 9, 1967.
9. *Д. Н. Рачковский*, Изв. КрАО, 37, 56, 1967,
10. *В. Н. Обридко*, Астрон. ж., 42, 502. 1965.
11. *Ф. Р. Гантмахер*, Теория матриц, Гостехиздат, М., 1953.
12. *И. Ц. Гохберг*, *М. Г. Крейн*, УМН, 13, 3, 1958.
13. *S. Chandrasekhar*, Radiative Transfer, Oxford, 1950.