АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 7 ФЕВРАЛЬ, 1971 ВЫПУСК 1

ПРОБЛЕМА МИЛНА С ВОЗМУЩЕНИЕМ НА ГРАНИЦЕ

В. П. ГРИНИН

Поступила 25 мая 1970

Рассматривается задача о нестационарном свечении атмосферы звезды. Предполагается, что температурное возмущение вызвано появлением на границе источника излучения переменной интенсивности. Приводятся основные уравнения для функции источника $S(\tau, u)$ и интенсивности отраженного излучения $I_{\delta}(u)$. При выводе этих уравнений принято во внимание возмущение оптических свойств атмосферы. Получено приближенное решение задачи для одномерной среды и дается физическая интерпретация результатов.

В настоящей заметке продолжается начатое ранее [1] исследование процесса нестационарного отражения света в эруптивных звездах. В статье [1] была рассмотрена упрощенная модель этого явления: предполагалось, что рассеивающая среда изотермична и ее оптические свойства не меняются с течением времени. Последнее предположение существенно в том отношении, что оно допускает разделение полей излучения — стационарного излучения звезды и нестационарного излучения, вызванного вспышкой. При этом процессы диффузии стационарного и нестационарного излучения считаются независимыми друг от друга, а результирующее поле излучения представляет собой суперпозицию этих полей.

Такая постановка задачи значительно упрощает ее решение, однако предположения, положенные в ее основу, в условиях звездных атмосфер представляются довольно искусственными.

Здесь мы откажемся от этих ограничений и рассмотрим процесс нестационарного свечения температурно-неоднородной среды с учетом возмущения ее оптических свойств.

1. *Постановка задачи.* Будем считать, что атмосфера звезды находится в условиях локального термодинамического равновесия, и объемный коэффициент поглощения α не зависит от частоты („серое" приближение).

Другим параметром, определяющим скорость переноса лучистой энергии, является среднее время t_1 проводимое квантом* в поглощенном состоянии. Как было показано В. В. Соболевым [2], в условиях ЛТР величина t_1 удовлетворяет следующему соотношению:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{E_1}{E_2}. \tag{1}$$

Здесь E_1 — энергия в поглощенном состоянии в 1 $см^3$, E_2 — плотность лучистой энергии: $E_2 = aT^4$, t_2 — среднее время, проводимое квантом в пути между двумя последовательными рассеяниями: $t_2 = 1/\alpha c$, где c — скорость света.

В звездных атмосферах основную часть времени излучение проводит в поглощенном состоянии ($E_1 \gg E_2$) и величиной t_2 можно пренебречь по сравнению с t_1.

Для полного определения элементарного акта рассеяния фотона наряду с величиной t_1 необходимо еще знание функции $\psi(t)$, дающей вероятность переизлучения фотона через промежуток времени t после его поглощения.

Так же, как и в [1], мы примем, что

$$\psi(t)\,dt = e^{-\frac{t}{t_1}}\,\frac{dt}{t_1}. \tag{2}$$

Это соотношение справедливо только в стационарной среде, когда величина t_1 не меняется с течением времени. Если же $t_1 = t_1(t)$, то тогда вместо (2) будем иметь:

$$\psi(t',\, t)\,dt = \exp\left(-\int\limits_{t'}^{t}\frac{dt}{t_1(t)}\right)\frac{dt}{t_1(t)}, \tag{3}$$

где t' — момент времени, соответствующий поглощению фотона.

Оптические параметры α и t_1, определяющие скорость переноса лучистой энергии, являются функциями термодинамического состояния вещества и, следовательно, зависят от интенсивности поля излучения в среде.

---

* Имеется в виду средний планковский квант, соответствующий локальной температуре среды.

Появление на границе атмосферы нестационарного источника интенсивности $E(t)$ приведет к дополнительному нагреву среды и ее температура $T_0(r)$ получит некоторое приращение $T(\vec{r}, t)$: $\tilde{T}(\vec{r}, t) = T_0(r) + T(\vec{r}, t)$. Следствием этого будет изменение оптических свойств среды (величины α_0 и t_1^0 получат приращение соответственно α и t_1).

Таким образом, рассмотрение процесса нестационарного свечения атмосферы приводит к задаче о диффузии излучения в среде, оптические свойства которой меняются с течением времени. Причем это изменение в свою очередь определяется изменением интенсивности излучения.

Мы рассмотрим эту задачу в линейном приближении, то есть будем предполагать, что температурное возмущение мало

$$\left|\frac{T}{T_0}\right| \ll 1. \tag{4}$$

Учитывая, что в условиях ЛТР температура среды T_0 однозначно связана с функцией источника: $S_0 \sim T_0^4$, от температурного возмущения T можно перейти к соответствующему приращению функции источника S:

$$\tilde{S}(\vec{r}, t) = S_0(r) + S(\vec{r}, t). \tag{5}$$

При этом, очевидно, $T/T_0 = S/4S_0$. Тогда величины α и t_1 могут быть представлены в виде

$$\tilde{\alpha}(\vec{r}, t) = \alpha_0(r)\left[1 + a_1(r)\frac{S(\vec{r}, t)}{S_0(r)}\right]; \tag{6}$$

$$\tilde{t}_1(\vec{r}, t) = t_1^0(r)\left[1 + a_2(r)\frac{S(\vec{r}, t)}{S_0(r)}\right], \tag{7}$$

где

$$a_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{d\ln\alpha}{d\ln T}\right)_v; \quad a_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{d\ln t_1}{d\ln T}\right)_v. \tag{8}$$

Это даст нам возможность выполнить линеаризацию уравнения относительно искомой величины S, в которое параметры α и t_1 войдут нелинейным образом.

Если в полученном таким путем уравнении ограничиться членами порядка S/S_0, то оно будет линейным как относительно величины S, так и относительно возмущения $E(t)$. Следовательно, в этом случае имеет смысл нахождение резольвентных решений.

Ниже будет дано решение этой задачи в одномерном приближении. Что касается перехода к трехмерной среде, то при этом не возникает никаких принципиальных трудностей, и соответствующие этому случаю уравнения будут приведены в конце статьи.

2. *Основные уравнения*. Функция источника S_0, соответствующая стационарному решению проблемы Милна, в одномерном приближении (эквивалентном приближению Шварцшильда-Шустера) определяется уравнением

$$S_0(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-|\tau-\tau'|}\, S_0(\tau')\, d\tau' \tag{9}$$

и равна

$$S_0 = \frac{\varepsilon_0}{\alpha_0} = \frac{E_0}{2}(1+\tau). \tag{10}$$

Здесь ε_0 — объемный коэффициент излучения, E_0 — поток лучистой энергии за единицу времени, τ — эффективное оптическое расстояние, такое, что $\tau/2 = t$, где t — реальная оптическая глубина: $t = \int_0^r \alpha_0(r)\, dr$ (множитель 1/2 соответствует усредненному по полусфере значению $\cos\theta$).

Уравнение (9) может быть записано в несколько иной форме:

$$S_0(\tau) = \frac{1}{2f(\tau)}\int_0^\infty e^{-|\tau-\tau'|}\, d\tau' \int_{-\infty}^{u} e^{-(u-u')/f(\tau)}\, S_0(\tau')\, du', \tag{11}$$

где принято во внимание, что элементарный акт рассеяния фотона происходит с задержкой во времени, определяемой соотношением (2).

В качестве временного масштаба здесь выбрано значение t_1^0 на оптической глубине $\tau = 0$ и введено обозначение $u = t/t_1^0(0)$. При этом $t_1^0(\tau) = t_1^0(0)\, f(\tau)$, и

$$S_0(\tau) = \sigma T_0^4 t_1^0(0). \tag{12}$$

Допустим теперь, что в момент времени $u = 0$ в поверхностных слоях атмосферы возникло температурное возмущение, вызванное появлением на границе нестационарного источника интенсивности $E(u)$. Не умаляя общности, можно принять, что $E(u)=\delta(u)$, где $\delta(u)$ — дельта-функция Дирака.

Температурному возмущению T согласно формуле (12) будет соответствовать приращение функции источника $S=4\sigma T_0^3 Tt_1(1)$. С другой стороны, по определению $\bar{S}=(\varepsilon_0+\varepsilon)/(\alpha_0+\alpha)$, и, следовательно,

$$S=\varepsilon/\alpha_0-S_0\alpha/\alpha_0. \tag{13}$$

Учитывая, что согласно (6) $\alpha/\alpha_0=a_1 S/S_0$, отсюда находим:

$$(1+a_1)\,S=\varepsilon/\alpha_0\equiv S_1. \tag{14}$$

Уравнение, определяющее функцию S, удобно вывести в два этапа: сначала составить уравнение для величины $S_0+S_1=(\varepsilon_0+\varepsilon)/\alpha_0$, а затем с помощью соотношения (14) перейти в нем от S_1 к S. При этом необходимо учесть возмущение оптических параметров α и t_1.

Согласно (6), вероятность того, что квант, излученный в момент времени u' $(u'>0)$ на оптической глубине τ', будет поглощен в интервале оптических глубин от τ до $\tau+d\tau$ определяется теперь соотношением

$$\begin{aligned} g(u',\tau',\tau)\,d\tau=\exp\left(-|\tau-\tau'|-\int\limits_{|\tau-\tau'|} a_1(t)\,\frac{S(t,u')}{S_0(t)}\,dt\right)\times \\ \times\left(1+a_1(\tau)\,\frac{S(\tau,u')}{S_0(\tau)}\right)d\tau, \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\int\limits_{|\tau-\tau'|}=\int\limits_{\min(\tau,\,\tau')}^{\max(\tau,\,\tau')},$$

а вероятность того, что квант, поглощенный на оптической глубине τ в момент времени u', переизлучится в интервале времени от u до $u+du$, согласно (3) и (7), будет равна:

$$\begin{aligned} \varphi(\tau,u',u)\,du=\exp\left(-\frac{u-u'}{f(\tau)}+\frac{a_2(\tau)}{f(\tau)}\int\limits_{\max(0,\,u')}^{u}\frac{S(\tau,t)}{S_0(\tau)}\,dt\right)\times \\ \times\left(1-a_2(\tau)\,\frac{S(\tau,u)}{S_0(\tau)}\right)\frac{du}{f(\tau)}. \end{aligned} \tag{16}$$

Уравнение, определяющее величину S_0+S_1, должно, очевидно, учитывать излучение, пришедшее непосредственно от нестационарного источника, и излучение, рассеянное в атмосфере (включая „собственное“ излучение среды).

Принимая во внимание (15) и (16), можем записать его следующим образом:

$$
\begin{gathered}
S_0(\tau)+S_1(\tau, u)= \\
=\frac{1}{2f(\tau)}\, e^{-\tau-u/f(\tau)}+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} e^{-|\tau-\tau'|}\, d\tau' \int\limits_{-\infty}^{0} \psi(\tau, u', u)+S_0(\tau')\, du' + \\
+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} d\tau' \int\limits_0^{u} g(u', \tau', \tau)\, \psi(\tau, u', u)\,(S_0(\tau')+S_1(\tau', u'))\, du' .
\end{gathered}
\tag{17}
$$

Линеаризация этого уравнения заключается в разложении функций g и ψ в ряды по степеням возмущения. Ограничиваясь при этом членами порядка S/S_0, будем иметь

$$
g(u', \tau', \tau)=e^{-|\tau-\tau'|}\left(1+a_1(\tau)\,\frac{S(\tau, u')}{S_0(\tau)}-\int\limits_{|\tau-\tau'|} a_1(t)\,\frac{S(t, u')}{S_0(t)}\, dt\right), \tag{18}
$$

$$
\psi(\tau, u', u)=\frac{1}{f(\tau)}\, e^{-(u-u')/f(\tau)}\left(1-a_2(\tau)\,\frac{S(\tau, u)}{S_0(\tau)}+\frac{a_2(\tau)}{f(\tau)} \int\limits_{\max(0,\, u')} \frac{S(\tau, t)}{S_0(\tau)}\, dt\right). \tag{19}
$$

Учитывая далее соотношения (10), (11) и (14), после некоторых упрощений получаем

$$
\begin{gathered}
f(\tau)\,\beta(\tau)\, S(\tau, u)=\frac{1}{2}\, e^{-\tau-u/f(\tau)}+\int\limits_0^{u} e^{-(u-u')/f(\tau)}\Big\{(\beta(\tau)-1)\, S(\tau, u')+ \\
+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} e^{-|\tau-\tau'|}\left|\,(1+a_1(\tau'))\, S(\tau', u')-S_0(\tau)\int\limits_{|\tau-\tau'|} a_1(t)\,\frac{S(t, u')}{S_0(t)}\, dt\,\right| d\tau'\Big\}\, du',
\end{gathered}
\tag{20}
$$

где $\beta(\tau)=1+a_1(\tau)+a_2(\tau)$, или с учетом (1) и (8)

$$
\beta(\tau)=\left(\frac{d \ln E_1}{d \ln E_2}\right)_v=\frac{1}{4}\,\frac{T_0}{E_1}\,\rho_0 c_v, \tag{21}
$$

и

$$
f(\tau)\,\beta(\tau)=\frac{c_v}{16\, \sigma \varkappa_0 T_0^3 t_1^0(0)} . \tag{22}
$$

Здесь c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме, $\varkappa$ — коэффициент поглощения на 1 г вещества.

Согласно Е. А. Шпигелю [3], величина $c_v/16\sigma\varkappa_0 T_0^3$ представляет собой характерное время релаксации t_r оптически тонкой температурной флуктуации. Из формулы (22) следует, что эта величина связана со средним временем пребывания кванта в поглощённом состоянии соотношением

$$t_r = \beta t_1. \tag{23}$$

В случае идеального газа, не имеющего внутренних степеней свободы, $\beta = 1/4$, и, следовательно, $t_r = t_1/4$.

Если процесс температурного возмущения происходит при постоянном давлении, то тогда $t_r = \gamma\beta t_1$, где γ — показатель адиабаты: $\gamma = c_p/c_v$.

Уравнение (20) можно несколько упростить. Для этого продифференцируем его по u и примем во внимание, что

$$\int_0^\infty e^{-|\tau-\tau'|}\left[a_1(\tau')\,S(\tau', u) - S_0(\tau')\int_{|\tau-\tau'|} a_1(t)\,\frac{S(t, u)}{S_0(t)}\,dt\right]d\tau' =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^\infty \frac{e^{-|\tau-\tau'|}}{1+\tau'}\,a_1(\tau')\,S(\tau', u)\,d\tau'. \tag{24}$$

В результате получим уравнение

$$f(\tau)\,\beta(\tau)\,\frac{\partial S(\tau, u)}{\partial u} + S(\tau, u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-|\tau-\tau'|}\,S(\tau', u)\,d\tau' -$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^\infty \frac{e^{-|\tau-\tau'|}}{1+\tau'}\,a_1(\tau')\,S(\tau', u)\,d\tau' \tag{25}$$

с начальным условием

$$S(\tau, 0) = e^{-\tau}/2\,f(\tau)\,\beta(\tau). \tag{26}$$

В пределе при a_1 и $a_2 \to 0$ (25) переходит в уравнение нестационарной диффузии излучения в среде, оптические свойства которой не меняются с течением времени:

$$f(\tau)\,\frac{\partial S(\tau, u)}{\partial u} + S(\tau, u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-|\tau-\tau'|}\,S(\tau', u)\,d\tau'. \tag{27}$$

Решение этого уравнения определяет характер диффузии дополнительного излучения от нестационарного источника, если последнее рассматривать как примесь в фотонном газе „собственного“ поля излучения среды.

В общем случае, когда $a_1 \neq 0$ и $a_2 \neq 0$, распространение температурного возмущения определяется уравнением (25), и в этом процессе наряду с дополнительным излучением участвуют также (за счет изменения оптических свойств среды) фотоны „собственного“ поля излучения.

Основное отличие этих двух уравнений состоит в появлении второго члена в правой части (25). Можно, однако, показать, что это отличие имеет место лишь в случае температурно-неоднородной среды. В тех же случаях, когда рассеивающая среда изотермична, учет возмущения ее оптических свойств по существу эквивалентен выбору нового масштаба времени $t_1 \to t_r$.

В дальнейшем для удобства записи мы выполним указанную замену и за единицу времени примем значение $t_r(0)$ ($u = t/t_r(0)$). Тогда в уравнении (25) функцию $f(\tau)\beta(\tau)$ следует заменить на $h(\tau) = t_r(\tau)/t_r(0)$; и окончательно оно примет вид

$$h(\tau)\frac{\partial S(\tau, u)}{\partial u} + S(\tau, u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-|\tau-\tau'|} S(\tau', u)\, d\tau' - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^\infty \frac{e^{-|\tau-\tau'|}}{1+\tau'} a_1(\tau') S(\tau', u)\, d\tau', \tag{28}$$

$$S(\tau, 0) = e^{-\tau}/2\, h(\tau). \tag{29}$$

Очевидно, что функция $S(\tau, u)$ должна быть нормирована так, чтобы

$$\int_0^\infty S(\tau, u)\, du = S(\tau), \tag{30}$$

где $S(\tau)$ — стационарное решение проблемы Милна с точечным источником на границе, т. е. решение уравнения

$$S(\tau) = \frac{1}{2} e^{-\tau} + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-|\tau-\tau'|} S(\tau')\, d\tau' - \\ - \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \int_0^\infty \frac{e^{-|\tau-\tau'|}}{1+\tau'} a_1(\tau') S(\tau')\, d\tau'. \tag{31}$$

Нетрудно показать, что это есть

$$S(\tau) = \exp\left(\int_0^\tau \frac{a_1(\tau)}{1+\tau}\, d\tau\right). \tag{32}$$

3. *Интенсивность отраженного излучения*. Если решение уравнения (28) известно, то интенсивность выходящего излучения (совпадающая в одномерном приближении с потоком) может быть легко найдена по формуле

$$\widetilde{I}(u) = I_0 + I(u). \tag{33}$$

Здесь I_0 — интенсивность излучения невозмущенной атмосферы ($I_0 = E_0$), I — нестационарная составляющая излучения.

В случае произвольного возмущения $E(u)$, допускающего линеаризацию уравнения (17),

$$I(u) = \int_0^u I_\delta(u - u') E(u')\, du', \tag{34}$$

где I_δ — интенсивность отраженного излучения, соответствующая мгновенному возмущению единичной мощности: $E(u) = \delta(u)$.

Рассуждая так же, как и при выводе уравнения (28), можно показать, что

$$I_\delta(u) = \int_0^\infty e^{-\tau} S(\tau, u) \left(1 - \frac{a_1(\tau)}{1+\tau}\right) d\tau, \tag{35}$$

или с учетом (28)

$$\frac{1}{2} I_\delta(u) = -\frac{\partial S(0, u)}{\partial u} + S(0, u). \tag{36}$$

Наряду с формулами (35) и (36) существует еще одно простое соотношение, связывающее функции $I_\delta(u)$ и $S(\tau, u)$. Для нахождения его воспользуемся следующими рассуждениями: так как по условию задачи мы пренебрегаем временем, в течение которого излучение находится в пути между рассеяниями ($t_1 \gg t_2$), то величина $Q(u) = \int\limits_0^\infty T\rho_0 c_p dr$ представляет собой всю дополнительную энергию, находящуюся в данный момент времени в среде. Соответственно величина $1 - Q(u)$ равна энергии, отраженной атмосферой к моменту времени u. То есть

$$\int\limits_0^u I_\delta(u)\, du = 1 - \int\limits_0^\infty T\rho_0 c_p dr. \tag{37}$$

Если в этом соотношении перейти от величин r и T к $S(\tau, u)$ и τ, то в результате получим

$$I_\delta(u) = -2\frac{d}{du}\int\limits_0^\infty S(\tau, u)\, h(\tau)\, d\tau. \tag{38}$$

4. *Трехмерная среда.* Полученные выше уравнения для функции источника (28) и интенсивности излучения (35) легко обобщаются на случай трехмерной среды. Мы приведем здесь соответствующие уравнения для двух важных частных случаев, когда 1) среда освещается параллельными лучами интенсивности $\delta(u)$, падающими под углом $\arccos \eta$ к нормали; 2) возмущение атмосферы вызвано мгновенным точечным источником единичной мощности.

В первом случае функция источника определяется уравнением

$$\begin{gathered} h(\tau)\frac{\partial S(\tau, u)}{\partial u} + S(\tau, u) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty E_1(|\tau - \tau'|)\, S(\tau', u)\, d\tau' + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \Big[E_1(|\tau - \tau'|)\, a_1(\tau')\, S(\tau', u) - E_0(|\tau - \tau'|) \times \\ \times S_0(\tau') \int\limits_{|\tau-\tau'|} a_1(t)\frac{S(t, u)}{S_0(t)}\, dt\Big]\, d\tau' \end{gathered} \tag{39}$$

с начальным условием

$$S(\tau, 0) = e^{-\tau/\eta}/4\pi h(\tau), \tag{40}$$

а интенсивность излучения, отраженного под углом $\arccos\mu$ к нормали, соотношением

$$I_\delta(u, \eta, \mu) = \int_0^\infty e^{-\tau/\mu} \left[S(\tau, u)\,(1 + a_1(\tau)) - \frac{S_0(\tau)}{\mu} \int_0^\tau a_1(t) \frac{S(t, u)}{S_0(t)}\, dt \right] \frac{d\tau}{\mu}. \tag{41}$$

Здесь E_0 и E_1 — интегральные экспоненциальные функции нулевого и первого рода. $S_0(\tau)$ — функция источника в невозмущенной атмосфере:

$$S_0(\tau) = \frac{3}{4} F(\tau + q(\tau)), \tag{42}$$

где $q(\tau)$ — функция Хопфа.

Если источник точечный, то тогда функция S зависит не только от глубины, но и от расстояния r до оси симметрии, и это обстоятельство существенно усложняет решение задачи.

В некоторых случаях, однако, вместо интенсивности $I_\delta(u, r, \mu, \varphi)$ достаточно знать полную энергию, отраженную атмосферой в момент времени u, то есть величину

$$E_\delta(u, \mu) = \mu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty I_\delta(u, r, \mu, \varphi)\, r dr. \tag{43}$$

Можно показать, что E_δ связана с интегральной функцией источника

$$S(\tau, u) = 2\pi \int_0^\infty S(\tau, u, r)\, r dr \tag{44}$$

соотношением

$$E_\delta(u, \mu) = \int_0^\infty e^{-\tau/\mu} \left[S(\tau, u)\,(1 + a_1(\tau)) \frac{S_0(\tau)}{\mu} \int_0^\tau a_1(t) \frac{S(t, u)}{S_0(t)}\, dt \right] d\tau, \tag{45}$$

а сама величина $S(\tau, u)$ определяется уравнением (39) с начальным условием

$$S(\tau, 0) = E_1(\tau)/2h(\tau). \tag{46}$$

Во всех рассмотренных выше случаях предполагалось, что температурное возмущение поверхностных слоев атмосферы связано с появлением дополнительного излучения от нестационарного источника. Однако ясно, что выбор конкретного механизма нагрева среды не является здесь решающим обстоятельством. Например, повышение температуры может быть вызвано газодинамическими эффектами (прохождением фронта ударной волны и т. д.). При этом уравнения (28) и (39) позволяют рассчитать изменение температуры в атмосфере как функцию оптической глубины τ и времени u. Для этого нужно лишь соответствующим образом изменить в них начальные условия.

В заключение этого раздела отметим, что интегральное уравнение для температурного возмущения T, аналогичное уравнению (39), было получено ранее Е. А. Шпигелем [3] и решено для случая бесконечной изотермической среды (в этом случае член, учитывающий возмущение коэффициента поглощения, обращается в нуль). Ниже на основе диффузионного приближения мы рассмотрим влияние этого фактора на перенос лучистой энергии в условиях звездных атмосфер. Забегая несколько вперед, укажем, что в ряде случаев это влияние оказывается существенным и может привести к заметному изменению закона нестационарного свечения среды.

5. *Диффузионное приближение.* От интегродифференциального уравнения (28) путем дифференцирования по τ можно перейти к уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left(h\frac{\partial S}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{a_1}{1+\tau}\right)S=h\frac{\partial S}{\partial u} \tag{47}$$

с соответствующими начальным и граничным условиями. Если, далее, здесь пренебречь членом $\partial^2/\partial\tau^2\,(h(\partial S/\partial u))$ (что допустимо в области $\tau\gg 1$, $u\gg 1$), то в результате мы получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{a_1}{\tau}\right)S=h\frac{\partial S}{\partial u} \tag{48}$$

с начальным и граничным условиями

$$S(\tau,\,0)=0 \quad \text{и} \quad S(\infty,\,u)=0.$$

Последнее уравнение является аналогом обычного уравнения диффузии [4, 5]:

$$\operatorname{div}\left[\tilde{T}\left(\frac{dK_0}{dT}\right)_p\nabla T_0+K_0\nabla T\right]=\rho_0c_p\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{49}$$

в котором учтено возмущение коэффициента лучистой теплопроводности K_0.

Следует отметить, что вместо уравнения (49), или эквивалентного ему уравнения (49) часто используется более простое уравнение:

$$\operatorname{div}(K_0 \nabla T) = \rho_0 c_p \frac{\partial T}{\partial t}. \tag{50}$$

Строго говоря, это можно делать только в изотермических средах, когда $\nabla T_0 = 0$. В тех же случаях, когда важен учет неоднородности среды, подобная замена становится необоснованной. Для пояснения сказанного сделаем некоторые оценки. Пусть R — характерный масштаб температурной неоднородности среды, r — характерный размер температурной флуктуации. Тогда в уравнении (49) $\nabla T_0 \simeq T_0/R$, $\nabla T \simeq T/r$ и отношение

$$T\left(\frac{dK_0}{dT}\right)_p \nabla T_0 / K_0 \nabla T \simeq \left(\frac{d \ln K_0}{d \ln T}\right)_p \frac{r}{R}.$$

Поскольку величина $(d \ln K_0 / d \ln T)_p \sim 1$, то отсюда следует, что оба члена в левой части уравнения (49) будут одного порядка когда $r \simeq R$, т. е. когда размер температурной флуктуации сравним, с характерным размером температурной неоднородности среды.

Подобные условия, как легко видеть, имеют место в нашем случае, когда температурное возмущение возникает в поверхностных слоях атмосферы, и здесь, следовательно, важен учет возмущения оптических свойств среды. Чтобы выяснить влияние этого фактора на характер распространения температурного возмущения, обратимся к уравнению (48), сделав предварительно некоторые упрощающие предположения.

6. *Поле излучения вдали от границы.* Примем, что коэффициент поглощения на 1 г вещества определяется формулой

$$\varkappa(\rho, T) \sim \rho^l T^s, \tag{51}$$

где l и s — некоторые постоянные параметры. Тогда, согласно (8)

$$(a_1)_v = \frac{s}{4}; \quad (a_1)_p = \frac{s-l-1}{4}. \tag{52}$$

Далее, можно показать (см., например, [4]), что в этом случае плотность и температура связаны между собой соотношением

$$\rho_0 \sim T_0^{\frac{3-s}{1+l}} \tag{53}$$

и, если предположить, что удельная теплоемкость в атмосфере постоянна, то отсюда и из (22), (51) следует:

$$h(\tau) \simeq \tau^{\mu}, \tag{54}$$

где

$$\mu = -\frac{1}{4}\left(3 + s + (3 - s)\,\frac{l}{1 + l}\right).$$

С учетом этого перепишем уравнение (48) в виде:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial}{\partial\tau} - j\,\frac{a_1}{\tau}\right)S = \tau^{\mu}\,\frac{\partial S}{\partial u}, \tag{55}$$

выделив в нем с помощью индекса j ($j = 0$ или 1) член, учитывающий изменение оптических свойств среды. Последнее уравнение легко решается методами операционного исчисления. Применяя к нему преобразование Лапласа и принимая во внимание начальное условие $S(\tau, 0) = 0$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial}{\partial\tau} - j\,\frac{a_1}{\tau}\right)\overline{S} = \tau^{\mu} p\overline{S}, \tag{56}$$

где

$$\overline{S}(\tau, p) = \int\limits_0^{\infty} e^{-pu} S(\tau, u)\,du.$$

Ограниченное на бесконечности решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$\overline{S}(\tau,\ p) = C(p)\,\tau^{\frac{1+ja_1}{2}}\,K_{\nu}\left(\frac{2}{m}\sqrt{p}\ \tau^{\frac{m}{2}}\right). \tag{57}$$

Здесь K_{ν} — функция Бесселя чисто мнимого аргумента,

$$m = 2 + \mu; \qquad \nu = \frac{1 - ja_1}{m}; \tag{58}$$

Для нахождения неизвестной функции $C(p)$ воспользуемся нормировочным соотношением (32), которое в данном случае имеет вид:

$$S(\tau) = \begin{cases} \tau^{a_1} & \text{при } j = 1 \\ 1 & \text{при } j = 0, \end{cases} \tag{59}$$

и тем обстоятельством, что $S(\tau) = \int\limits_0^\infty S(\tau, u)\,du = \lim\limits_{p\to 0} \overline{S}(\tau, p)$. Учитывая это, из (57) получаем

$$C(p) = \frac{2}{m\,\Gamma(\nu)} p^{\frac{\nu}{2}}. \tag{60}$$

Подстановка (60) в (57) и обращение полученного выражения дают при $\tau \gg 1$, $u \gg 1$:

$$S(\tau, u) = \frac{m^{-2\nu}}{\Gamma(\nu)} \frac{\tau}{u^{1+\nu}} \exp\left(-\frac{\tau^m}{m^2 u}\right). \tag{61}$$

Из этого соотношения прежде всего следует, что рассматриваемое приближение годится только для тех значений параметров l и s в формуле (51), которые обеспечивают выполнение двух условий:

1. $m > 0$ — ограниченность решения на бесконечности.
2. $\nu > 0$ — условие существования стационарного решения.

Согласно (58) это означает, что характерное время температурной релаксации $t_r(\tau)$ должно убывать с ростом τ медленнее, чем τ^{-2}, а величина a_j должна быть меньше единицы. Предполагая эти условия выполненными, рассмотрим основные свойства полученного решения.

Соотношение (61) описывает движение волны термического возмущения от источника в глубь атмосферы. Для каждого фиксированного $\tau \gg 1$ функция $S(\tau, u)$ достигает максимального значения $S_м$ при

$$u_м = \tau^m / m^2 (1 + \nu), \tag{62}$$

равного

$$S(\tau, u_м) \sim \tau^{ja_1 - m}. \tag{63}$$

При этом скорость движения волны $V = d\tau/du_м$ равна

$$V = m(1+\nu)\tau^{1-m}. \tag{64}$$

Таким образом, при $m < 1$ $(\mu < -1)$ волна распространяется в среде с ускорением и, наоборот, при $m > 1$ $(\mu > -1)$ скорость ее движения уменьшается с ростом τ.

Далее, так как параметр m не зависит от индекса j, то из соотношения (61) следует, что функции $S(\tau, u)$ при $j = 0$ и $j = 1$ в пространственном отношении подобны друг другу

$$S_{j=0}(\tau, u)/S_{j=1}(\tau, u) = \varphi(u). \tag{65}$$

Поэтому возмущение оптических свойств среды слабо влияет на величины $u_м$ и V, и они определяются в основном тем, насколько быстро меняется с глубиной характерное время температурной релаксации $t_r(\tau)$.

Иначе обстоит дело, когда рассматривается временная зависимость функции $S(\tau, u)$ при фиксированном значении τ. Здесь оба фактора сказываются в равной степени. Так, если с увеличением температуры происходит „просветление“ среды ($a_1 < 0$), то согласно (58) $\nu_{j=1} > \nu_{j=0}$. В этом случае возмущение оптических свойств среды приводит к более медленному (по сравнению со случаем $j = 0$) нарастанию возмущения и к более крутому спаду после достижения максимального значения. При этом согласно (63) отношение

$$(S_м)_{j=1}/(S_м)_{j=0} \sim \tau^{a_1} \ll 1. \tag{66}$$

При $a_1 > 0$ (в этом случае увеличение температуры среды приводит к увеличению ее непрозрачности) картина будет полностью противоположной.

Следует отметить, что хотя решение (61) соответствует внешнему возмущению $E(u) = \delta(u)$ $(S \equiv S_\delta)$, основные выводы о характере распространения температурного возмущения сохраняются и в случае произвольного возмущения $E(u)$. Например, если $E(u) = 1$ при $u > 0$ (функция Хевисайда), то функция источника S_χ в этом случае равна

$$S_\chi(\tau, u) = \int_0^u S_\delta(\tau, u)\, du = \tau^{ja_1}\, \Gamma(\nu)^{-1}\, \Gamma\left(\nu, \frac{\tau^m}{m^2 u}\right). \tag{67}$$

Здесь $\Gamma(\nu, x) = \Gamma(\nu) - \gamma(\nu, x)$, где $\gamma(\nu, x)$ — неполная гамма-функция.

Из этого соотношения следует, что характерное время установления лучистого равновесия на глубине τ того же порядка, что и время $u_м$, а отношение установившихся значений $S_\chi(\tau, \infty)$, равное $S(\tau)_{j=1}/S(\tau)_{j=0}$, определяется формулой (66).

7. *Свечение внешних слоев атмосферы.* На основании сказанного выше можно заключить, что возмущение оптических свойств среды должно также заметно влиять на характер свечения поверхностных слоев атмосферы, т. е. на поведение функции $I_\delta(u)$. Чтобы выяснить влияние этого фактора, воспользуемся асимптотическим решением (61) и формулой (38). В результате получим при $u \gg 1$:

$$I_\delta(u) = \frac{\nu m^{1-2\nu}}{\Gamma(\nu)} u^{-1-\nu}. \tag{68}$$

Так же, как и в предыдущем разделе рассмотрим два случая.

1. $a_1 < 0$. В этом случае $\nu_{j=1} > \nu_{j=0}$; поэтому $(I_\nu)_{j=1} \ll (I_\nu)_{j=0}$ при $u \gg 1$. Далее, так как болометрическое альбедо атмосферы $A = \int_0^\infty I_\nu(u)\,du$ при $j=0$ и $j=1$ равно единице, то отсюда следует, что в моменты времени непосредственно после вспышки $(u = 0+)$ должно выполняться обратное неравенство $I_\nu(0+)_{j=1} > I_\nu(0+)_{j=0}$.

Подобная реакция атмосферы на температурное возмущение вполне понятна: „просветление" среды, которое происходит с увеличением температуры, обнажает внутренние, более горячие слои атмосферы. В начальные моменты времени это приводит к дополнительному повышению яркости атмосферы (по сравнению со случаем $j=0$). Вместе с тем, „просветление" среды ускоряет выход энергии наружу и, тем самым, приводит к увеличению скорости ее высвечивания.

2. $a_1 > 0$. Наоборот, если нагрев среды сопровождается увеличением непрозрачности $(\nu_{j=1} < \nu_{j=0})$, то наблюдаемая картина будет представлять собой результат наложения двух противоположных эффектов. С одной стороны, повышение температуры среды приводит к увеличению ее яркости. Но с другой стороны, нагретая область экранирует внутренние, более горячие слои атмосферы, в результате в начальные моменты времени яркость возмущенной атмосферы будет меньше по сравнению со случаем $j=0$. Наряду с этим увеличение непрозрачности среды затрудняет выход энергии наружу, уменьшая тем самым скорость ее высвечивания.

8. *Заключение.* Таким образом, результаты двух последних разделов показывают, что изменение оптических свойств среды является важным фактором, определяющим реакцию атмосферы на температурное возмущение. Характер этого влияния зависит от того, происходит ли в результате нагрева „просветление" среды или, наоборот, непрозрачность ее при этом растет. Причем оба случая одинаково часто встречаются в условиях звездных атмосфер. Например, в атмосферах горячих звезд с повышением температуры среда становится прозрачнее, и, следовательно, величина $a_1 < 0$. В то время, как в атмосферах звезд с $T_{\text{эфф}} \lesssim 7000°$ имеет место обратная картина и здесь $a_1 > 0$. Так, в атмосфере Солнца на глубине $\tau = 1$, согласно данным о коэффициенте поглощения, приведенным в [6], величина $(a_1)_p \simeq 0.4$.

С переходом к более поздним спектральным классам величина a_1 возрастает, достигая значений $2 \div 3$ в атмосферах холодных карликов с $T_{эфф} \simeq 3000°$. Последний случай заслуживает более подробного рассмотрения, поскольку к этой группе звезд принадлежат вспыхивающие звезды, и задача о нестационарном отражении света представляет здесь большой практический интерес. К этой задаче мы вернемся в одной из следующих работ.

Автор выражает глубокую благодарность И. Н. Минину и Р. Е. Гершбергу за обсуждение основных результатов работы.

Крымская астрофизическая
обсерватория

THE MILNE PROBLEM WITH PERTURBATION ON THE BOUNDARY

V. P. GRININ

The problem on nonstationary radiation of stellar atmosphere is considered. It is assumed that temperature perturbation is due to radiation source of variable intensity appearing on the border. The basic equations of the source function $S(\tau, u)$ and of the reflected intensity $I_0(u)$ are given. These equations were deducted taking into account the perturbation of optical properties of the atmosphere. An approximate solution of the problem in one-dimensional case is obtained and the physical interpretation of the results is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. П. Гринин*, Изв. КрАО, 43, 1970.
2. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 37, 387, 1960.
3. *E. A. Spiegel*, Ap. J., 126, 202, 1957.
4. *K. H. Böhm, E. Richter*, Z. Astrophys., 48, 231, 1959.
5. *E. A. Spiegel*, Ap. J., 139, No. 3, 1964.
6. *E. Vitense*, Z. Astrophys., 28, 81, 1951.