АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 6 НОЯБРЬ, 1970 ВЫПУСК 4

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ВРАЩАЮЩИХСЯ НЕЙТРОННЫХ ЗВЕЗД

Д. М. СЕДРАКЯН

Поступила 17 апреля 1970

Исследованы электромагнитные свойства нейтронной звезды (пульсара). Получены уравнения макроскопического движения плазмы при наличии сильных гравитационных полей. Показано, что учет первых поправок общей теории относительности в уравнениях гидродинамического равновесия плазмы и в уравнениях Максвелла для электромагнитных полей приводит к генерации сильных тороидальных магнитных полей. Оценены порядок времен возрастания этих полей и их максимальные значения. Для модели с центральной плотностью $8 \cdot 10^{13}$ *г/см*^{3} рост магнитного поля продолжается до 10^8 лет, достигая значения 10^{12} *гаусс*. Для модели с центральной плотностью $5 \cdot 10^{14}$ *г/см*^{3} максимальное значение магнитного поля порядка 10^{14} *гаусс* достигается в течение времен порядка 10^5 лет.

1. *Введение.* Большинство теорий, объясняющих природу излучения пульсаров, предполагает существование магнитных полей порядка 10^{12} *гаусс* [1—3]. С другой стороны известно, что наивероятная модель пульсара—вращающаяся нейтронная звезда. Для обоснования этих теорий, следовательно, требуется более детальное исследование возможности образования больших магнитных полей во вращающихся нейтронных звездах. Цель этой работы — показать, что учет поправок общей теории относительности в ньютоновских уравнениях макроскопического движения плазмы и в уравнениях Максвелла для электромагнитных полей приводит к генерации сильных тороидальных магнитных полей. Максимальные значения этих полей зависят от центральной плотности конфигураций и начального значения угловой скорости. Для нейтронных звезд с центральной плотностью порядка $8 \cdot 10^{13}$ *г/см*^{3} тороидальное магнитное поле может расти в течение

10^9 лет, достигая значения порядка 10^{12} *гаусс*. Для центральных плотностей порядка $5\cdot 10^{14}$ *г/см*^{3} рост тороидального магнитного поля продолжается $2\cdot 10^5$ лет и его максимальное значение достигает 10^{14} *гаусс*.

Мы предположим, что звезда состоит только из нейтронов, протонов и электронов и вся система находится в состоянии полного вырождения. В работе [4] была рассмотрена такая модель нейтронной звезды и было показано, что стационарные магнитные поля не могут быть больше одного гаусса. Для рассмотрения нестационарных магнитных полей выведем сначала основные уравнения. Далее покажем возможность образования возрастающего со временем тороидального магнитного поля, а также оценим максимальные значения этих полей.

2. *Основные уравнения*. В работах [5, 6] было показано, что вращение приводит к незначительным отклонениям от сферической симметрии, даже когда скорость частиц на экваторе приближается к скорости света. Поэтому мы не будем учитывать влияние вращения на распределение материи и на форму поверхности конфигураций и предположим, что рассматриваемые объекты сферически симметричны.

В дальнейшем при описании гравитационного поля мы ограничимся пост-ньютоновским приближением, т. е. будем считать, что φ/c^2 (φ — потенциал гравитационного поля) мало по сравнению с единицей и включим в рассмотрение только линейные по φ/c^2 члены.

Выведем основные уравнения для случая сильных гравитационных полей, пока не ставя никаких ограничений.

Метрика пространства и времени имеет вид [8]

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k. \tag{1}$$

Здесь g_{ik} — пространственно-временные компоненты метрического тензора. Введем напряженности электрического $\vec{E}$, $\vec{D}$ и магнитного $\vec{H}$, $\vec{B}$ полей ($\vec{H}$ и $\vec{B}$ дуальны антисимметрическим тензорам $H_{\alpha\beta}$ и $B_{\alpha\beta}$) следующим образом:

$$E_\alpha = F_{0\alpha}, \qquad D^\alpha = -\sqrt{g_{00}}\, F^{0\alpha}, \tag{2}$$

$$B_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}, \qquad H^{\alpha\beta} = \sqrt{g_{00}}\, F^{\alpha\beta}, \tag{3}$$

где α, $\beta = 1, 2, 3$ и $F_{\alpha\beta}$ — пространственные компоненты тензора электромагнитного поля.

Учитывая стационарный характер гравитационного поля, запишем уравнения Максвелла в виде [8]

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi n. \tag{4}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \tag{5}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \tag{6}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{s} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \tag{7}$$

$$\vec{D} = \vec{E}/\sqrt{g_{00}} + [\vec{H}\vec{g}]. \tag{8}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{H}}{\sqrt{h}} + [\vec{g}\vec{E}]. \tag{9}$$

Здесь $\vec{g}_\alpha = -g_{0\alpha}/g_{00}$, n — плотность электрических зарядов и $\vec{s}$ — вектор электрического тока с компонентами $s_\alpha = en(dx^\alpha/dt)$, причем операторы вихря и дивергенции имеют вид

$$(\operatorname{rot} \vec{a})^\alpha = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} e^{\alpha\beta\gamma} \left(\frac{\partial a_\gamma}{\partial x^\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial x^\gamma} \right)$$
$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{\gamma}\, a^\alpha) \tag{10}$$

$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + g_{00}\, g_\alpha\, g_\beta$ — трехмерная пространственная метрика, $\vec{g}$ — соответствующий детерминат, а $e^{\alpha\beta\gamma}$ единичный антисимметрический тензор с $e^{123} e_{123} = 1$.

Далее необходимо вывести уравнение макроскопического движения газа элементарных частиц в пространстве, описываемом метрикой (1). Уравнения гидродинамического равновесия записываются следующим образом:

$$T^k_{i;\,k} = 0, \tag{11}$$

где T^k_i — сумма тензоров энергии-импульса макроскопических тел и электромагнитного поля [8]

$$T^k_i = (P + \rho)\, u_i u^k - \delta^k_i P + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{4} \delta^k_i F_{lm} F^{lm} - F_{il} F^{lk} \right) \tag{12}$$

(F_{ik} — тензор электромагнитного поля, ρ и P — соответственно плотность энергии и давление элементарных частиц, u^i — четырехмерный вектор скорости). Подставляя (12) в (11) и учитывая, что система частиц совершает вращательное движение с постоянной скоростью $\Omega = d\varphi/dt$ и $u^3 = \Omega u^0$ [12], получим

$$\frac{1}{c} j^0 E_\alpha + \frac{1}{c} j^\beta B_{\beta\alpha} - \frac{\partial P}{\partial x^\alpha} + (P + \rho) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \ln u^0 = 0, \tag{13}$$

где

$$j^i = \frac{enc}{\sqrt{g_{00}}} \frac{dx^i}{dx^0}, \qquad u^0 = \left(g_{00} + \frac{2\Omega}{c} g_{03} + \frac{\Omega^2}{c^2} g_{33} \right)^{-1/2}.$$

Выражение u^0 следует из соотношения $u^i \cdot u_i = 1$.

Рассмотрим газовый шар, состоящий из нейтронов, протонов и электронов. Обозначив плотность энергии и давление нейтронов, протонов и электронов соответственно ρ_1, ρ_2, ρ_3 и P_1, P_2, P_3 и токи, создаваемые протонами и электронами j_2^i, j_3^i, распишем уравнение (13) для каждого сорта частиц

$$-\frac{\partial P_1}{\partial x^\alpha} + (P_1 + \rho_1) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \ln u^0 = 0. \tag{14}$$

$$\frac{1}{c} j_2^0 E_\alpha + \frac{1}{c} j_2^\beta B_{\beta\alpha} - \frac{\partial P_2}{\partial x^\alpha} + (P_2 + \rho_2) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \ln u^0 = P_\alpha^{ie}. \tag{15}$$

$$-\frac{1}{c} j_3^0 E_\alpha - \frac{1}{c} j_3^\beta B_{\beta\alpha} - \frac{\partial P_3}{\partial x^\alpha} + (P_3 + \rho_3) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \ln u^0 = -P_\alpha^{ie}. \tag{16}$$

Записывая уравнение (13) для протонов и электронов, мы учли с помощью вектора P_α^{ie} передачу импульса при столкновениях этих частиц [9]. Для удобства, как и в работе [9], заменим (14), (15), (16) другими уравнениями. Составим сумму уравнений (14), (15) и (16), разность (15) и (16) и уравнение, которое получается из условия химического равновесия между нейтронами, протонами и электронами $\mu_1 = \mu_2 + \mu_3$ (μ_1, μ_2, μ_3 — соответственные химические потенциалы). Несложные математические выкладки приводят к следующему:

$$\frac{e[\vec{s}\vec{B}]}{c} - \sqrt{g_{00}} \vec{\nabla} P + \sqrt{g_{00}} (P + \rho) \vec{\Delta} \ln u^0 = 0. \tag{17}$$

$$\frac{\vec{s}}{\sigma} = \vec{E} + \frac{[\vec{s}_2\vec{B}]}{cn} + \frac{\sqrt{g_{00}}}{en} [\vec{\nabla} P_3 - \beta(n) \vec{\nabla} P_2] \frac{1}{1 + \beta(n)} - \frac{[\vec{s}\vec{B}]}{ecn(1 + \beta(n))}. \tag{18}$$

$$\mu_1 = \mu_2 + \mu_3, \tag{19}$$

где $e\vec{s}$ — электрический ток с компонентами $s^\alpha = n\,(\partial x_2^\alpha/\partial t - \partial x_3^\alpha/\partial t)$, $\beta(n) = (\rho_3 + P_3)/(\rho_2 + P_2)$, e — заряд электрона, n — плотность электронов или протонов (мы считаем их равными), причем векторное произведение имеет вид

$$s^\beta B_{\beta\alpha} = \sqrt{\gamma}\, e_{\alpha\beta\delta} s^\beta B^\delta = [\vec{s}\vec{B}]_\alpha.$$

По аналогии с нерелятивистской теорией считаем, что вектор $P_\alpha^{\,ie}$, описывающий столкновения между протонами и электронами, пропорционален току [9]

$$\vec{s} = \frac{\sigma\sqrt{g_{00}}}{en}\vec{P}^{ie}$$

(σ — электрическая проводимость нейтронной звезды).

Уравнения (17), (18), (19), уравнения Максвелла (4) — (9), уравнения, описывающие гравитационное поле, а также уравнение состояния свободного газа вырожденных частиц составляют самосогласованную систему дифференциальных уравнений для решения поставленной задачи.

3. *Эффект генерации.* Для дальнейшего исследования необходимо выбрать модель нейтронной звезды. Ограничиваясь рассмотрением моделей с центральной плотностью не выше $5\cdot 10^{14}$ *г/см*^{3}, можем считать газ элементарных частиц почти нерелятивистским и в компонентах метрического тензора учитывать только поправки, линейные по φ/c^2 [8]

$$g_{00} = \sqrt{1 + 2\varphi/c^2}, \quad g_\beta^\alpha = (1 - 2\varphi/c^2)\,\delta_\beta^\alpha, \quad g_{03} = 0. \tag{20}$$

Здесь необходимо отметить следующее. g_{03} пропорционально $\varphi/c^2 \cdot \Omega r/c$, где r — расстояние от оси вращения. Для рассматриваемых моделей максимальное значение $\Omega r/c$ не превышает 0.1, поэтому можно считать, что g_{03} повсюду равно нулю. Тогда временную компоненту четырехмерной скорости u^i запишем в виде

$$u^0 = \left(g_{00} + \frac{2\Omega}{c}\,g_{03} + \frac{\Omega^2}{c^2}\,g_{33}\right)^{-1/2} \cong 1 - \frac{\varphi}{c^2} + \frac{\Omega^2 r^2}{2c^2}.$$

Последний член уравнения (17) при этом равен

$$\vec{\nabla} \ln u^0 = -\frac{1}{c^2}\,(\vec{\nabla}\varphi - \Omega^2 \vec{r}). \tag{21}$$

В качестве уравнения состояния выберем уравнение состояния нерелятивистского вырожденного газа [4].

$$P_i = a\frac{n_i^{5/3}}{m_i}, \qquad a = \frac{1}{5}(3\pi^2)^{2/3}\hbar^2, \quad i = 1, 2, 3. \tag{22}$$

Тогда, согласно (22), получим

$$\beta(n) = \frac{\rho_3 + P_3}{\rho_2 + P_2} \cong \frac{m_3 c^2 n}{mc^2 n} = \frac{m_3}{m} = \alpha \ll 1,$$

где α — отношение масс электрона и протона. Массы протона и нейтрона приняты равными друг другу и обозначены m. Считая $\alpha \ll 1$, заменим $1 + \beta(n) \cong 1$ и, согласно (22), будем иметь

$$\vec{\nabla} P_3 - \beta(n)\vec{\nabla} P_2 = (1 - \alpha^2)\vec{\nabla} P_3 \cong \vec{\nabla} P_3.$$

Указанные замены в уравнениях (17), (18) и (19) приводят к следующим уравнениям:

$$\frac{[\vec{s}\vec{B}]}{cn} - \sqrt{g_{00}}\vec{\nabla} P + mn_1(\vec{\nabla}\varphi - \Omega^2\vec{r})\sqrt{g_{00}} = 0. \tag{23}$$

$$\frac{\vec{s}}{\sigma} = \vec{E} + \frac{1}{cn}[\vec{s}_2\vec{B}] + \frac{\sqrt{g_{00}}}{en}\vec{\nabla} P_3 - \frac{[\vec{s}\vec{B}]}{enc}. \tag{24}$$

$$n = \alpha^{3/2} n_1 \tag{25}$$

(n_1 — плотность нейтронов). Исключая P_3 в уравнении (24), с помощью (23) и (25) окончательно будем иметь

$$\frac{\vec{s}}{\sigma} = \vec{E} + \frac{[\vec{s}_2\vec{B}]}{cn} + \frac{m}{e}\sqrt{g_{00}}(\vec{\nabla}\varphi - \Omega^2\vec{r}) - \frac{[\vec{s}\vec{B}]}{enc}. \tag{26}$$

Подействуем оператором вихря на (26)

$$(\operatorname{rot}\vec{E})^\alpha = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}e^{\alpha\beta\delta}\left(\frac{\partial E_\beta}{\partial x^\delta} - \frac{\partial E_\delta}{\partial x^\beta}\right) = \frac{m}{e}\left[(\vec{\nabla}\varphi - \Omega^2\vec{r})\,\vec{\nabla}\sqrt{g_{00}}\right]^\alpha. \tag{27}$$

Раскрыв векторное произведение в правой части (27), а левую часть заменив уравнением Максвелла (6), получим

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{m}{e}c\Omega^2 R\frac{\partial\sqrt{g_{00}}}{\partial R}\sin\theta\cos\theta\,\vec{\tau}, \tag{28}$$

где R, θ, Φ — сферические координаты, а $\vec{\tau}$ — единичный вектор в направлении вращения звезды. Уравнения (28) получено для начального момента времени, когда электрические токи $\vec{s} = 0$ и нет магнитного поля $\vec{B} = 0$. Если подставить в (28) выражение g_{00} из (20) и заменить $d\varphi/dR = Gu/R^2$ ($u(R)$ — накопленная масса в сфере радиуса R), то окончательно получается следующее:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{mc}{e} \Omega^2 \frac{Gu}{c^2 R} \sin\theta \cos\theta \vec{\tau}. \tag{29}$$

(c — скорость света, G — гравитационная постоянная).

Из уравнения (29) следует, что в звезде возникает тороидальное магнитное поле, растущее со временем. Наличие вращения с учетом поправок Эйнштейна приводит к тому, что скорость электронов относительно протонов становится переменной, зависящей от координаты z. Это и приводит к возникновению тороидального магнитного поля [11]. Легко видеть из (18), что в тех областях звезды, где состояние частиц описывается ультрарелятивистским уравнением состояния вырожденного газа, $\beta(n) = 1$, $P_1 = P_2$ и указанный батарейный эффект отсутствует. Так как образованное магнитное поле параллельно $\vec{s}_2$, то оно не меняет градиент магнитного поля со временем. Пока ток не очень велик, магнитное поле растет линейно со временем

$$\vec{B} = \left| \frac{mc}{e} \Omega^2 \frac{Gu}{c^2 R} \sin\theta \cos\theta \vec{\tau} \right| \cdot t. \tag{30}$$

На вопрос, как долго будет длиться линейный рост магнитного поля, можно ответить, если рассмотреть уравнение (24) для произвольного момента времени. Действуя оператором вихря на уравнение (24), получим

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{mc}{e} \Omega^2 \frac{Gu}{c^2 R} \sin\theta \cos\theta \vec{\tau} - c \operatorname{rot} \frac{\vec{s}}{\sigma} - c \operatorname{rot} \frac{[\vec{s}\vec{B}]}{enc}. \tag{31}$$

Первый член уравнения (31) является постоянной батареей (если, конечно, $\Omega = \text{const}$) для создания магнитного поля, тогда как второй и третий члены действуют в обратном направлении, стремясь уменьшить поле. Вначале $\vec{s} = 0$ и эти члены отсутствуют, но с ростом магнитного поля растет $\vec{s}$ и, следовательно, растут эти члены. С течением времени темп роста магнитного поля ослабевает и в конце, когда диссипативные члены компенсируют батарейный эффект, оно стремится к своему максимальному значению. Для оценки максимально возможного значения тороидального магнитного поля необходимо знать время, за которое второй или третий член уравнения (31) сравниваются с первым. Магнитное поле изменяется по закону (30), так что ток растет

$$J \sim \frac{cA}{D} \cdot t. \tag{32}$$

Для получения (32) мы использовали уравнение (7). A имеет смысл скорости возрастания магнитного поля, а D — порядок расстояния, на котором магнитное поле существенно изменяется. D в оценках мы примем порядка радиуса звезды. Время, за которое второй член уравнения (31) сравнится с первым,

$$t_1 \sim \frac{D^2 \sigma}{c^2} \text{ сек.} \tag{33}$$

В работе [10] подсчитана проводимость нейтронной звезды, которая по оценкам порядка 10^{29} *сек*$^{-1}$. Время, за которое третий член скомпенсирует батарейный эффект, можно оценить из формулы

$$t_2 \sim \left(\frac{D^2 en}{A \cdot c}\right)^{1/2}. \tag{34}$$

Для нейтронной звезды с центральной плотностью $\rho_c = 8 \cdot 10^{13}$ *г/см*^{2} масса равна $M = 0.12\, M_\odot$, а радиус $R = 10^7$ *см*, а $\Omega = 40$ *сек*$^{-1}$ [7]. Тогда, согласно (30), скорость возрастания магнитного поля $A = 10^{-4}$ *гаусс/сек*. Время, за которое омические потери скомпенсируют батарейный эффект, порядка $t_1 \sim 10^{15}$ лет, тогда как $t_2 \sim 10^9$ лет. Для оценки максимального магнитного поля можно считать, что в течение времени $\sim 10^9$ лет поле росло почти линейно и достигло значения $\sim 10^{12}$ *гаусс*. Для нейтронной звезды с центральной плотностью $\rho_c = 5 \cdot 10^{14}$ *г/см*^{3} масса, радиус и Ω_{max} равны соответственно $0.637\, M_\odot$, 10^6 *см* и $6 \cdot 10^3$ *сек*$^{-1}$. Скорость возрастания магнитного поля порядка $3 \cdot 10^2$ *гаусс/сек*, а времена t_1 и t_2 равны, соответственно, 10^{12} и $2 \cdot 10^5$ лет. За время порядка 10^5 лет линейный рост приводит к магнитному полю порядка 10^{14} *гаусс*.

Если пульсар в Крабовидной туманности отождествлять с моделью нейтронной звезды с $\rho_c = 5 \cdot 10^{14}$ *г/см*^{3} и считать, что за время его жизни (оно по оценкам порядка тысячи лет) его угловая скорость линейно уменьшалась от максимально возможного значения $\Omega_{\max} = 6 \cdot 10^3$ *сек*$^{-1}$ до наблюдаемого в данный момент значения $\Omega \sim 30$ *сек*$^{-1}$, то тороидальное магнитное поле, генерируемое батарейным эффектом, должно быть порядка 10^{12} *гаусс*.

Для решения вопроса распределения магнитной напряженности в нейтронной звезде после отклонения батарейного эффекта, нужно решить систему уравнений, состоящую из уравнения (23), уравнения для гравитационного потенциала φ в пост-ньютоновском приближении, уравнения состояния вещества и уравнения, выражающего условие отклонения батарейного эффекта в виде

$$\mathrm{rot}\left\{\frac{m\sqrt{g_{00}}\,\Omega^2\vec{r}}{e} + \frac{[\vec{s}\vec{B}]}{ecn}\right\} = 0. \tag{35}$$

Автор выражает благодарность профессору Роксбургу, дискуссия с которым привела его к рассмотрению батарейного эффекта в нейтронных звездах, за обсуждения результатов. Я благодарен профессору Саакяну Г. С. за обсуждения результатов, а также Чубаряну Э. В. и Папояну В. В. за обсуждения результатов и подготовку статьи к печати. Работа выполнена в Кембридже, в Институте теоретической астрономии.

Ереванский государственный
университет

THE MAGNETIC FIELD OF ROTATING NEUTRON STARS

D. M. SEDRAKIAN

The magnetic properties of the simple model of neutron stars (pulsars) and the macroscopic equations of motion for plasma particles are considered using the post-Newtonian theory. It is shown that, if we include in our investigation the first order corrections of General Relativity to the Newtonian theory, the velocity of the electrons relative to the protons depends on the coordinate z. Then the electrons are driven relative to the protons and the produced electric currents grow. They generate a toroidal magnetic field the maximum magnitude of which depends on the central density of matter of the model. For central densities in the range $8 \cdot 10^{13}$ *gm/cm*^{3} to $5 \cdot 10^{14}$ *gm/cm*^{3}, the maximum value of the magnetic field changes from 10^{12} *Gauss* to 10^{14} *Gauss*.

ЛИТЕРАТУРА

1. *H. Y. Chiu, V. Canuto, L. Fassio-Canuto*, Nature, 221, 529, 1969.
2. *T. Gold*, Nature, 221, 25, 1969.
3. *V. Canuto, H. Y. Chiu, C. Chiuderi, H. J. Lee*, Nature, 225, 47, 1970.
4. *D. M. Sedrakian*, M. N., (in press).
5. *J. J. Monaghan, J. W. Roxburgh*, M. N., 131, 13, 1965.
6. *В. В. Папоян, Д. М. Седракян, Э. В. Чубарян*, Сообщ. Бюр. обс., 40, 86, 1969; Астрофизика, 3, 41, 1967.
7. *Г. Г. Арутюнян, Д. М. Седракян, Э. В. Чубарян*, Астрофизика (в печати).
8. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Теория поля, Физматгиз, М., 1967, стр. 330.
9. *L. J. Spitzer*, Physics of Fully Ionized Gases, Interscience Publishers, New York, 1967, p. 23.
10. *G. Baym, Ch. Pethick, D. Pines*, Nature, 224, 674, 1970.
11. *J. W. Roxbourgh, P. A. Strittmatter*, M. N., 133, 1, 1966.
12. *J. B. Hartle, D. H. Sharp*, Ap. J., 147, 317, 1967.