

РАДИАЛЬНЫЕ ПУЛЬСАЦИИ ВРАЩАЮЩИХСЯ
БЕЛЫХ КАРЛИКОВ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ ОТО И
НЕЙТРОНИЗАЦИИ

Ю. А. ВАРТАНЯН, А. В. ОВСЕПЯН

Поступила 21 ноября 1969

Энергетическим методом рассмотрены пульсации вращающихся белых карликов, находящихся вблизи точки потери устойчивости. Учтены поправки как ОТО, так и эффекта нейтронизации—зависимости числа протонов в атомных ядрах от плотности. Показано, что эффект нейтронизации приводит к уменьшению критической центральной плотности вращающихся конфигураций на два порядка, а минимальный период радиальных пульсаций увеличивается в три раза. Результаты расчетов приведены на рис. 1—4 и в табл. 1.

1. *Введение.* Строгое рассмотрение пульсаций и вопросов устойчивости сверхплотных конфигураций в рамках общей теории относительности связано с весьма сложными расчетами [1—4]. Задача еще более усложняется для вращающихся конфигураций. Отметим, что данная проблема имеет особый интерес для сверхплотных вырожденных конфигураций (белых карликов и барионных звезд), находящихся в состояниях, близких к состоянию потери устойчивости, т. е. вблизи экстремумов кривой зависимости массы от центральной плотности $M(\rho_c)$, [5]. На кривой $M(\rho_c)$ имеются три такие точки [6, 7]: максимум в области белых карликов—точка Чандрасекара ($\rho_c = 4 \cdot 10^9$ г/см³), минимум в области нейтронных звезд малой массы ($\rho_c = 0.5 \div 1 \cdot 10^{14}$ г/см³) и максимум в области барионных звезд ($\rho_c = 4 \cdot 10^{15}$ г/см³). За этим последним максимумом имеется также целый ряд экстремальных точек [6, 8, 9], но все они лежат в области неустойчивых конфигураций и поэтому не представляют особого интереса. В настоящей работе мы сконцентрируем наше внимание на конфигурациях, расположенных около точки Чандрасекара.

Белые карлики, находящиеся в состояниях, близких к состоянию потери устойчивости (критическое состояние), имеют ряд характерных особенностей, которые могут математически сильно упростить рассмотрение вопросов их устойчивости. Во-первых, для таких конфигураций эффекты общей теории относительности весьма малы: $\varphi/c^2 \sim 10^{-3}$ (φ — гравитационный потенциал). Поэтому релятивистские эффекты могут быть учтены как поправочные члены к ньютоновскому приближению. Несмотря на относительную малость поправок ОТО, они весьма важны при рассмотрении вопросов устойчивости. Так, как это было показано впервые в [10], учет поправок ОТО в уравнениях равновесия приводит к тому, что такие конфигурации теряют устойчивость не при $\rho_c \rightarrow \infty$, как в ньютоновском приближении [11], а при конечном значении ρ_c .

Второе обстоятельство, учет которого сильно упрощает расчеты, заключается в следующем. В большей части рассматриваемых конфигураций, где сконцентрирована доминирующая часть массы звезды, вырожденный электронный газ ультрарелятивистский. Поэтому при весьма хорошей точности можно приближенно принять, что газ ультрарелятивистский во всей звезде и, следовательно, для распределения плотности принять политропное распределение с показателем $n = 3$. В этом случае задача сведется к энергетическому методу, подробное изложение которого можно найти в [7]. Данный метод при вычислениях позволяет избежать больших численных расчетов, связанных с интегрированием дифференциальных уравнений, сведя задачу к рассмотрению сравнительно простых двух алгебраических уравнений.

Энергетический метод весьма удобен при рассмотрении пульсаций вращающихся белых карликов. В этом случае учет вращения сводится к добавлению энергии вращения в выражении общей энергии [7]. В [12] этим методом с учетом эффектов ОТО были рассмотрены пульсации вращающихся холодных белых карликов, находящихся вблизи критического состояния. Однако при этом не был учтен эффект нейтронизации, т. е. зависимость числа протонов в атомных ядрах от плотности [13]. В [14] было показано, что для устойчивости белых карликов этот эффект более важен, нежели поправки ОТО. Так, из сравнения кривых 2 и 3 на рис. 1 видно, что учет нейтронизации уже в случае невращающихся конфигураций приводит к потере устойчивости при плотностях, на целый порядок более низких, чем при учете только эффектов ОТО. В случае же вращающихся конфигураций, как будет показано ниже, эта разница еще более увеличивается.

В настоящей работе мы рассматриваем радиальные пульсации вращающихся холодных белых карликов с учетом как эффектов ОТО, так и нейтронизации. Расчет проведен энергетическим методом для

нескольких серий конфигураций, вращающихся с угловой скоростью, составляющей доли предельно допустимой, при которой начинается истечение вещества с экватора. В разделе 2 приведены основные уравнения, а в разделе 3 — результаты расчетов. Показано, что учет нейтронизации приблизительно на два порядка уменьшает критическую центральную плотность вращающихся холодных белых карликов по сравнению со случаем, когда не учтена нейтронизация. Минимальный период пульсаций при этом увеличивается почти в четыре раза.

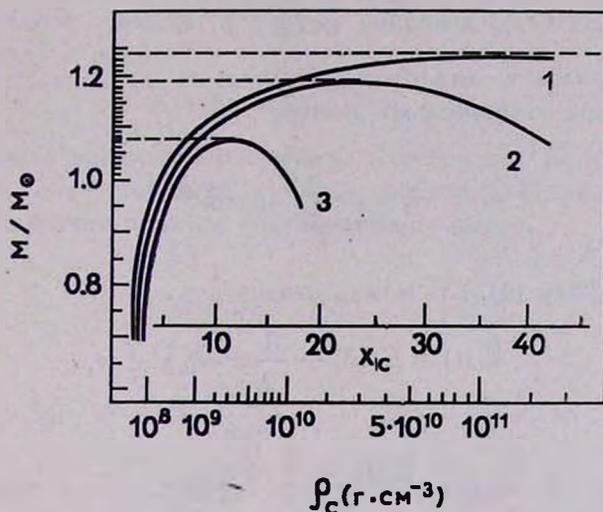


Рис. 1. Зависимость массы от центральной плотности для холодных невращающихся белых карликов. Кривая 1 — без учета нейтронизации и ОТО, кривая 2 — с учетом ОТО, кривая 3 — с учетом ОТО и нейтронизации.

Результаты расчетов приведены на рис. 1—4 и в табл. 1. Результаты аналогичного исследования для горячих белых карликов будут приведены в отдельной работе.

2. *Основные уравнения.* Вывод основных уравнений начнем с рассмотрения выражения для частоты радиальных пульсаций. При этом мы будем следовать весьма наглядному методу, предложенному в [15]. Отсылая за деталями к указанной работе, здесь мы весьма кратко приведем аналогичный вывод для холодных белых карликов.

Пусть звезда совершает радиальные колебания по подобному закону: $r(t) = a(t)r(0)$, где r — координатный радиус произвольной частицы. В случае радиальных сферически-симметричных малых колебаний можно выбрать

$$a(t) = 1 + a \sin \omega t, \quad a \ll 1. \quad (1)$$

Из закона сохранения массы с точностью до α^2 для $\rho^{1/2} \equiv y$ (ρ — плотность вещества), имеем

$$y(t) = y(0) + \delta y(t),$$

где

$$\delta y(t)/y(0) = -\alpha \sin \omega t. \quad (2)$$

Кинетическая энергия пульсаций будет равна

$$E_n(t) = \frac{1}{2} \dot{x}^2(t) I_0, \quad (3)$$

где точка означает дифференцирование по времени, а I_0 — момент инерции звезды относительно центра

$$I_0 = 4\pi \int_0^R \rho(0) r^4 dr. \quad (4)$$

Имея в виду (1), (3) можно написать

$$E_n(t) = E_n(0) - \frac{1}{2} \alpha^2 \omega^2 I_0 \sin^2 \omega t, \quad (5)$$

где

$$E_n(0) = \frac{1}{2} \alpha^2 \omega^2 I_0.$$

Как будет показано ниже, в случае белых карликов, имеющих показатель политропы $n=3$, полная энергия есть функция только от центральной плотности, т. е. y_c . Поэтому, разложив $E(y_c)$ в ряд по степеням δy , т. е. малой величины α , получим

$$E(y_c(t)) = E(y_c(0)) + \left(\frac{\partial E}{\partial y_c} \right)_0 \delta y_c + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_c^2} \right)_0 \delta y_c^2 + \dots \quad (6)$$

Укажем, что производные берутся при постоянных энтропии S , массе M и моменте количества движения K .

Воспользуемся теперь законом сохранения энергии

$$E(0) + E_n(0) = E(t) + E_n(t). \quad (7)$$

Подставляя в (7) разложение (6) и имея в виду (5), из требования стационарности пульсаций получим

$$\left(\frac{\partial E}{\partial y_c} \right)_{S, M, K} = 0 \quad (8)$$

$$(y_c^2(0)/I_0) \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_c^2} \right)_{S, M, K} = \omega^2. \quad (9)$$

Условие (8) есть условие экстремума энергии (условие равновесия звезды), а (9) — условие минимума (условие устойчивости). Значению y_c , при котором $\omega^2 = 0$, будет соответствовать критическое состояние, т. е. состояние потери устойчивости.

Таким образом, для нахождения равновесных состояний и частоты пульсаций необходимо вычислить соответственно первую и вторую производные по y_c от полной энергии звезды. В случае вращающегося холодного белого карлика с учетом поправок ОТО полную энергию можно записать в виде

$$E = E_S + E_G + E_{\text{ОТО}} + E_{\text{вр.}}, \quad (10)$$

где E_S — полная энергия вырожденных электронов, E_G — гравитационная энергия, $E_{\text{ОТО}}$ — поправки к этой энергии [ОТО] и $E_{\text{вр.}}$ — энергия вращения. Для этих величин соответственно имеем:

$$E_S = M \int_0^1 \epsilon dv, \quad E_G = -1.5 \frac{GM^2}{R},$$

$$E_{\text{ОТО}} = -5.1 \frac{G^2 M^3}{c^2 R^2}, \quad E_{\text{вр.}} = \frac{3K^2}{4I_0}. \quad (11)$$

Здесь M — масса, R — радиус звезды, а K — момент количества движения, ϵ — энергия вырожденных электронов на единицу массы. В случае $\mu = 3$ имеем

$$I_0 = 0.113 MR^2, \quad (12)$$

а также

$$\left(\frac{4\pi}{3} \right) R^3 \rho_c = 54.2 M. \quad (13)$$

Выражая R через ρ_c и M , из (10) с учетом (11) и (12) имеем

$$\left(\frac{\partial E}{\partial y_c} \right)_{S, M, K} = 3y_c^{-4} M \int_0^1 P \frac{dv}{\varphi(v)} - 0.639 GM^{5/3} -$$

$$- 1.86 \frac{G^2 M^{7/3}}{c^2} y_c + 2.40 \cdot K^2 M^{-5/3} y_c. \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_c^2}\right)_{S, M, K} = 9y_c^{-5} M \int_0^1 (\gamma - 4/3) P \frac{dy}{\varphi(y)} - 1.86 \frac{G^2 M^{7/3}}{c^2} + 2.40 \cdot K^2 \cdot M^{-5/3}. \quad (15)$$

Здесь P — давление, $\gamma = (\partial \ln P / \partial \ln \rho)_S$ — показатель адиабаты, $\varphi(y)$ — функция Эмдена для $n = 3$.

Если приравнять K нулю, то мы придем к соответствующим уравнениям [16].

Для давления и плотности вырожденного электронного газа при наличии ядер (для белых карликов) имеем

$$P = -\frac{m_e c^3}{24 \pi^2 \lambda_e^3} f(x), \quad \rho = \frac{m_p}{3 \pi^2 \lambda_e^3} \frac{x^3}{z}, \quad (16)$$

где

$$f(x) = x(2x^2 - 3)\sqrt{x^2 + 1} + 3 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\lambda_e = \frac{\hbar}{m_e c}, \quad z = Q/A, \quad x = \frac{p_e}{m_e c},$$

p_e — импульс Ферми вырожденных электронов, m_e и m_p — соответственно масса электрона и протона, Q — заряд, A — массовое число ядер. В дальнейшем примем, что вещество состоит из ядер группы железа, т. е. $A = 56$.

Как известно, в условиях, имеющихся в недрах белых карликов, становится возможным соединение электронов с атомными ядрами — процесс обратного β -распада (см., например, [7, 13]). В результате величина z зависит от граничного импульса электронов. Для определения этой зависимости воспользуемся условием минимума энергии — массы [17],

$$(\partial M(A, z) / \partial z)_A = 0, \quad (17)$$

где $M(A, z)$ — масса, приходящаяся на один нуклон, которая определяется из полуэмпирической формулы Вейцекера для массы ядра. При наличии вырожденного газа к этой величине нужно добавить также энергию вырожденных электронов, приходящуюся на один нуклон. Тогда из условия (17) получим [18],

$$z = z_0 (1 - \alpha \sqrt{x^2 + 1}); \quad z_0 = 26/56; \quad \alpha = 5.317 \cdot 10^{-3}. \quad (18)$$

Как было отмечено выше, в рассматриваемых конфигурациях электронный газ ультрарелятивистский, т. е. $x \gg 1$. Поэтому, подставляя (18) в (16) и имея в виду, что при $x \gg 1$

$$f(x) = 2x^4 - 2x^2 + \dots,$$

для P , ρ и $(\gamma - 4/3)P$ соответственно получим

$$P = \frac{m_e c^2}{12 \pi^2 \lambda_e^3} x^4 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right), \quad (19)$$

$$\rho = \frac{m_p}{3 \pi^2 \lambda_e^3 z_0} x^3 (1 + \alpha x), \quad (20)$$

$$\left(\gamma - \frac{4}{3}\right)P = \frac{m_e c^2}{9 \pi^2 \lambda_e^3} x^4 \left(\frac{1}{2x^2} - \frac{\alpha x}{3}\right). \quad (21)$$

Кроме этих величин в уравнения (14) и (15) входит также величина K — момент количества движения, которую можно выразить через y_c . Действительно

$$K = \frac{2}{3} I_0 \Omega, \quad (22)$$

где Ω — угловая скорость твердотельного вращения, а I_0 определяется соотношением (12). Выберем

$$\Omega = n \Omega_{\max}, \quad (23)$$

$$n = 0; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1,$$

где Ω_{\max} — предельно допустимая угловая скорость, при которой начинается истечение вещества с экватора

$$\Omega_{\max} = \left(\frac{GM}{R^3}\right)^{1/2}. \quad (24)$$

Тогда, имея в виду (12), (13) и (24), для K^2 получим

$$K^2 = 0.0133 G y_c^{-1} M^{15/3} n^2. \quad (25)$$

Наконец, воспользовавшись распределением $\rho = \rho_c \varphi(v)$, ($\varphi(v)$ — функция Эмдена для $n = 3$), можно определить также распределение $x = x_c \psi(v)$. Из (20) легко получить

$$\psi = \tau^{1/3} \left[1 - \frac{\alpha x_c}{3} (\tau^{1/3} - 1)\right]. \quad (26)$$

Подставляя (19), (20), (21) и (25) в (14) и (15) и имея в виду (26), после вычисления всех численных коэффициентов окончательно получим

$$\begin{aligned} & \underline{0.002236 x_c^3 m^{4/3}} + \underline{(0.003608 x_c^3 + 0.5089 x_c^2 -} \\ & \underline{- 0.02545 x_c^2 n^2)} m^{2/3} - \underline{(0.001488 x_c^3 + 0.58 x_c^2 - 2.14)} = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \omega^2 = & (1.227 x_c - \underline{0.0007518 x_c^4} - \underline{0.00006381 x_c^4 m^{4/3}} + \\ & \underline{+ 0.007279 x_c^3 n^2 m^{2/3}}) / m^{2/3}. \end{aligned} \quad (28)$$

Уравнение (27) соответствует (2) и есть условие равновесия, а (28) соответствует (3); $m = (M/M_\odot)$, M_\odot — масса Солнца. Члены, подчеркнутые волнистой линией, есть вклад поправок ОТО, пунктирной линией — вклад эффекта нейтронизации и сплошной линией — вращения.

Если учесть, что в области потери устойчивости уже в случае невращающихся конфигураций $x_c \approx 10$, а $m \approx 1$, то из (28) видно, что вклад нейтронизации приблизительно на порядок превосходит вклад ОТО.

3. *Результаты численных расчетов.* Как видно, уравнение равновесия свелось к квадратному уравнению относительно $m^{2/3}$. Придавая x_c различные значения, легко вычислить соответствующие значения m , а также из (28) значения ω^2 . Вычисления были проведены на ЭВМ.

Если в (27) опустить все подчеркнутые члены, т. е. не учитывать эффекты вращения, ОТО и нейтронизации, то мы приходим к результату Чандрасекара [11] — кривая 1 на рис. 1. Для m будем иметь $m = 1.23(1 + 3.7/x_c^2)^{3/2}$. При этом, как следует из (3) и (28), $\partial^2 E / \partial y_c^2 = 0$ при $x_c \rightarrow \infty$, т. е. устойчивость теряется при бесконечно большой плотности в центре. Оставляя в (27) только эффект ОТО, получим кривую 2 рис. 1. Кривая 3 соответствует решению (27), когда учтен также эффект нейтронизации (без вращения). Максимумы кривых 2 и 3 соответствуют потере устойчивости. Как уже было отмечено, легко заметить, что нейтронизация уже в случае невращающихся конфигураций приводит к потере устойчивости при плотностях, на целый порядок более низких, чем при учете только ОТО.

На рис. 2 показана зависимость массы от центральной плотности для различных угловых скоростей вращения, составляющих доли предельно допустимой. Линия aa' соответствует точкам максимума

массы, а линия bb' — точкам потери устойчивости (точки, в которых ω^2 обращается в нуль). Конфигурации, расположенные за линией bb' , неустойчивы. Из рисунка видно, что даже предельное вращение, при котором наступает истечение вещества с экватора, не может увеличить массу конфигураций более чем на несколько процентов. Это происходит по той причине, что энергия вращения даже в предельном случае весьма мала по сравнению с гравитационной энергией. Однако для вопросов устойчивости вращение играет более значительную роль. Так, как видно из рис. 2, если для невращающихся или весьма

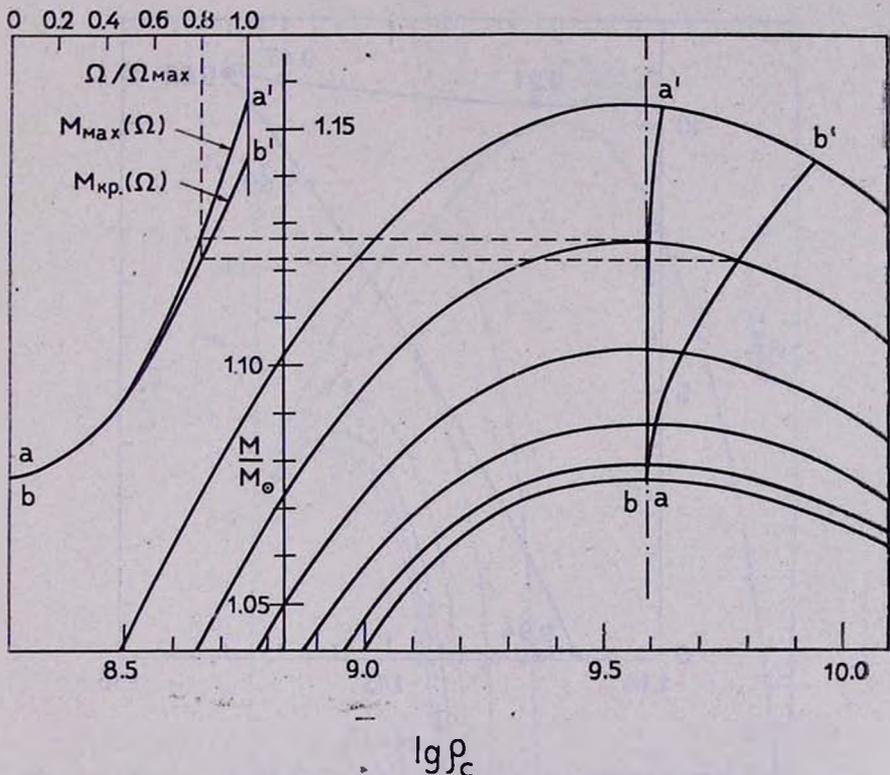


Рис. 2. Зависимость массы от центральной плотности для вращающихся белых карликов с различными значениями $n = \Omega/\Omega_{\max}$. Линия aa' соответствует максимумам массы, bb' — точкам потери устойчивости. В левом углу показано отклонение критической массы $M_{\text{кр.}}$ от максимальной M_{\max} для различных n .

медленно вращающихся конфигураций ($n \leq 0.2$) устойчивость теряется в максимуме $M(\rho_c)$, то при $n > 0.2$ точка потери устойчивости находится за максимумом. Это приводит к тому, что в случае вращающихся конфигураций в некоторой области звезды с массой, близкой

к критической, могут иметь по два устойчивых состояния с разными моментами, при которых начинается истечение с экватора. Это наиболее наглядно видно из рис. 3, на котором показана зависимость квадрата частоты радиальных пульсаций от массы звезды для предельного случая $n = 1$, когда начинается истечение вещества. Рядом с точками на кривой указаны значения логарифма центральной плотности соответствующей конфигурации, с помощью чего, используя (25), можно вычислить также значения момента. Точка возврата на этой кривой соответствует максимальной массе на кривой $M(\rho_c)$.

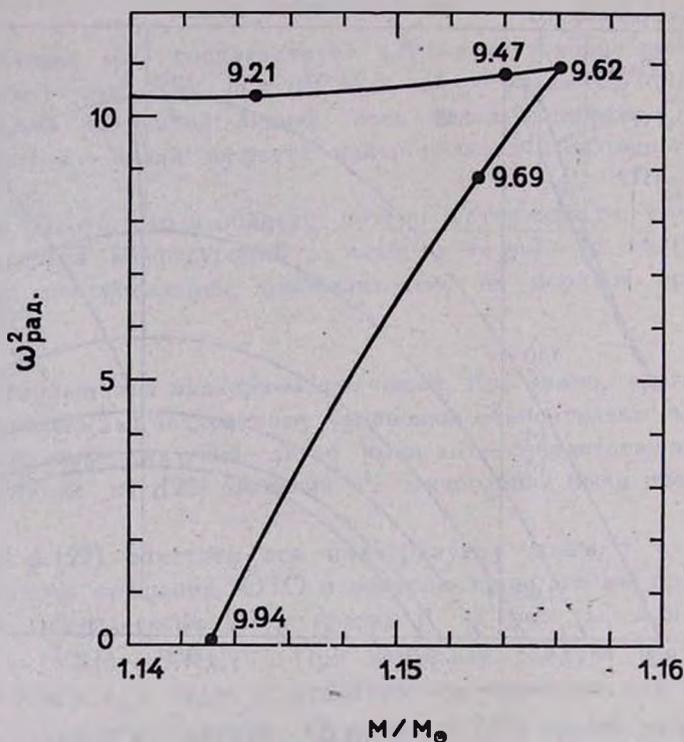


Рис. 3. Зависимость квадрата частоты радиальных пульсаций от массы для предельного случая вращения ($n=1$). Рядом с точками на кривой указаны значения логарифма центральной плотности для соответствующей конфигурации.

На рис. 4 приведена зависимость частоты радиальных пульсаций от x_c . Мы замечаем, что для не слишком больших x_c с ростом x_c , т. е. при возрастании центральной плотности, ω^2 растет. Причем этот рост тем сильнее, чем больше n . Здесь сказывается стабилизирующая роль вращения. Однако, начиная с некоторого значения x_c , когда роль эффекта нейтронизации становится большой (см. (28)), начинается умень-

шение ω^2 . Значение x_c , при котором ω^2 обращается в нуль, соответствует состоянию потери устойчивости. Для сравнения на рис. 4 приводится также кривая $\omega^2(x_c)$ для случая $l=0$, когда эффект нейтронизации не учтен — кривая aa' . Аналогичные кривые для вращающихся конфигураций лежат за пределами рисунка и поэтому не приведены. Из сравнения видно, что нейтронизация приводит не только к потере устойчивости при более низких плотностях, но и уменьшает ω_{\max}^2 , или, что то же самое, увеличивает минимальный период пульсаций.

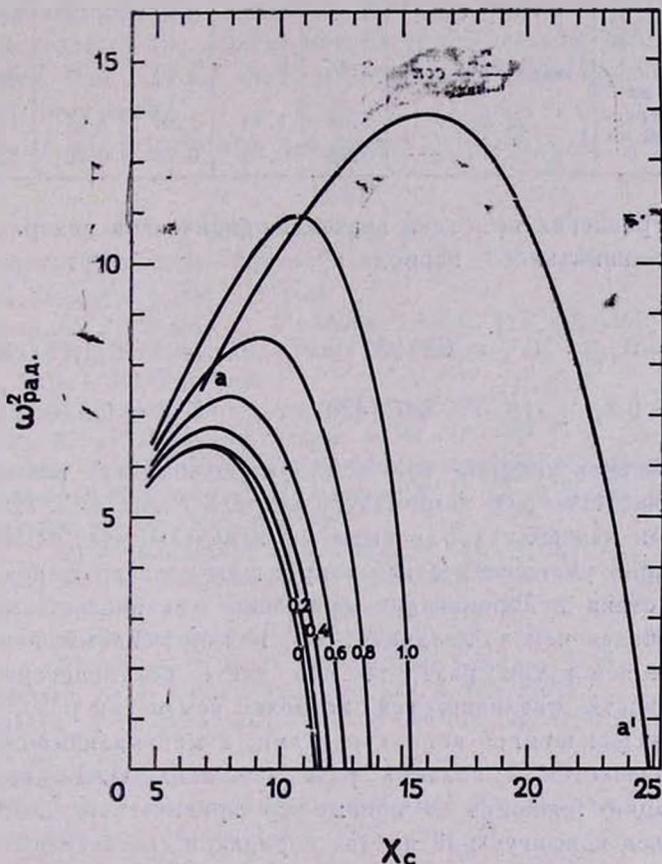


Рис. 4. Зависимость квадрата частоты радиальных пульсаций от параметра x_c для различных значений $l = \Omega/\Omega_{\max}$. Кривая aa' относится к случаю невращающихся конфигураций без учета нейтронизации.

В табл. 1 для различных $l = \Omega/\Omega_{\max}$ приведены значения массы, ω^2 и ρ_c , для критического состояния, состояния с максимальной массой и минимального периода пульсаций.

Таблица 1

ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВРАЩАЮЩИХСЯ БЕЛЫХ КАРЛИКОВ.
СОВЕРШАЮЩИХ РАДИАЛЬНЫЕ ПУЛЬСАЦИИ

	Ω/Ω_{\max}	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
Состояние потери устойчивости	$M_{\text{кр.}}/M_{\odot}$	1.076	1.079	1.088	1.103	1.121	1.143
	$\rho_c \cdot 10^{-9} \text{ г/см}^3$	3.350	3.468	3.838	4.591	6.033	8.799
Состояние с максимальной массой	M_{\max}/M_{\odot}	1.076	1.079	1.089	1.105	1.125	1.154
	$\omega^2 \text{ сек}^{-2}$	0	0	0.463	2.523	4.465	9.523
	$\rho_c \cdot 10^{-9} \text{ г/см}^3$	3.35	3.46	3.83	4.08	4.15	4.27
Состояние с минимальным периодом пульсаций	$T_{\min} = \frac{2\pi}{\omega_{\max}} \text{ сек}$	2.46	2.45	2.40	2.33	2.29	1.90
	M/M_{\odot}	1.03	1.03	1.04	1.05	1.11	1.15
	$\rho_c \cdot 10^{-9} \text{ г/см}^3$	0.75	0.75	0.76	0.78	1.62	2.96

Для сравнения приведем значения критической центральной плотности и минимального периода пульсаций при отсутствии нейтронизации:

$$n = 0, \quad \rho_c \cdot 10^{-9} = 32 (28) \text{ г/см}^3, \quad T_{\min} = 1.75 (1.83) \text{ сек};$$

$$n = 0.8, \quad \rho_c \cdot 10^{-9} = 640 (450) \text{ г/см}^3, \quad T_{\min} = 0.5 (0.55) \text{ сек}.$$

Здесь в скобках указаны соответствующие значения работы [12], которые вычислены для химического состава с $A/Z = 2$. Из сравнения приведенных данных с табличными мы замечаем, что, во-первых, учет нейтронизации уменьшает стабилизирующую роль вращения. Так, если при отсутствии нейтронизации вращение увеличивает критическую плотность более чем в двадцать раз и минимальный период уменьшает более чем в три раза, то при учете нейтронизации критическая плотность увеличивается не более чем в три раза, по сравнению с невращающимися конфигурациями, а минимальный период пульсаций уменьшается в полтора раза (см. табл. 1). Кроме того, учет нейтронизации приводит к понижению критической плотности для вращающихся конфигураций на два порядка, а для невращающихся—на порядок.

Выражаем глубокую благодарность академику В. А. Амбарцумяну и профессору Г. С. Саакяну за полезные обсуждения.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория
Ереванский государственный
университет

RADIAL PULSATIONS OF THE ROTATING WHITE DWARFS
WITH CONSIDERATION OF THE EFFECTS OF GENERAL
RELATIVITY AND NEUTRONIZATION

Yu. L. VARTANIAN, A. V. HOVSEPIAN

Radial pulsations of rotating cold white dwarfs that are near the state of stability loss are studied by the energetic method. The effects of the general relativity and neutronization of atomic nucleus are taken into account. It is shown, that the effect of neutronization causes the decrease of the central density of the rotating configurations into two orders, but as for the mean period of radial pulsations they are increased three times.

The results of calculations are shown in the fig. 1—4 and in the Table 1.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *S. Chandrasekhar*, *Ap. J.*, 140, 417, 1964.
2. *J. M. Bardeen, K. S. Thorne, D. W. Meltzer*, *Ap. J.*, 145, 505, 1966.
3. *D. W. Meltzer, K. S. Thorne*, *Ap. J.*, 145, 514, 1966.
4. *J. Skillling*, *Nature*, 218, 923, 1968.
5. *Я. Б. Зельдович*, *Вопросы космогонии*, М., 9, 232, 1963.
6. *Г. С. Саакян, Ю. Л. Вартанян*, *Астрон. ж.*, 41, 193, 1964.
7. *Я. Б. Зельдович, Н. Д. Новиков*, *Релятивистская астрофизика*, Наука, М., 1967.
8. *Дж. А. Уиллер, Б. К. Гэриксон, М. Вакано, К. С. Торн*, *Теория гравитации и гравитационный коллапс*, Мир, М., 1967.
9. *S. Tsurguta, A. G. W. Cameron*, *Can. J. Phys.*, 44, 1895, 1966.
10. *С. А. Каплан*, *Уч. зап. Львовского ун-та*, 15, 4, 101, 1949.
11. *С. Чандрасекар*, *Введение в учение о строении звезд*, ИЛ, М., 1950.
12. *В. С. Имшенник, Э. Ф. Сеидсв*, *Астрофизика*, 6, 301, 1970.
13. *E. Schatzman*, *White Dwarfs*, North Holland Publ. Company, 1958.
14. *Ю. Л. Вартанян, А. В. Овсепян*, *Астрофизика*, 4, 643, 1968.
15. *В. Ф. Дьяченко, Я. Б. Зельдович, В. С. Имшенник, В. В. Палейчик*, *Астрофизика*, 4, 159, 1968.
16. *Г. С. Бисноватый-Коган*, *Астрон. ж.*, 43, 89, 1966.
17. *Г. Бете, Ф. Моррисон*, *Элементарная теория ядер*, ИЛ, М., 1958.
18. *Ю. Л. Вартанян*, *Астрофизика*, 4, 373, 1968.