АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 6 НОЯБРЬ, 1970 ВЫПУСК 4

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СТРУКТУРА ВОЗМУЩЕНИЙ И ПРОИСХОЖДЕНИЕ ВРАЩЕНИЯ ГАЛАКТИК ВО ФЛУКТУАЦИОННОЙ ТЕОРИИ

А. Г. ДОРОШКЕВИЧ

Поступила 8 января 1970

Рассмотрены статистические свойства возмущений плотности и скорости в рамках теории малых возмущений в однородной космологической модели Фридмана. Анализируются свойства возмущений в окрестности точек максимума возмущений плотности и тензора деформации. Обсуждается вопрос о происхождении импульса галактик и скоплений галактик.

1. С точки зрения флуктуационной теории происхождения галактик начальные возмущения плотности и скорости являются случайными функциями координат. Это необходимо учитывать и при построении нелинейной теории развития возмущений, и при выяснении связи параметров наблюдаемых галактик с характеристиками малых возмущений плотности и скорости.

Вопрос о связи статистических свойств возмущений и галактик обсуждался в ряде работ [1—5]. Однако, как было показано Я. Б. Зельдовичем [6], развитие возмущений на нелинейной стадии протекает сложнее, чем это предполагали. По-видимому, появление больших возмущений плотности и скорости приводит к возникновению хаотических ударных волн, причем возникающие области сжатого газа могут не быть гравитационно связанными. Поэтому вначале необходимо более подробно выяснить пространственную структуру возникающих ударных волн и неоднородностей плотности.

Ниже рассмотрены некоторые свойства возмущений плотности $f(\vec{r}) = \frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}$ и скорости $\vec{V}(\vec{r})$ в простейших предположениях: 1) вещество распределено в пространстве в среднем однородно и расширяется изотропно; 2) начальные возмущения имеют нормальный закон распределения.

Эти предположения следуют из предположения о полной однородности и изотропии вещества на ранних стадиях расширения и из предположения о возникновении флуктуаций плотности и скорости в ходе расширения. Ниже рассмотрены некоторые свойства пространственной структуры возмущений в этих предположениях. Обсуждаются свойства корреляционной функции возмущений плотности (2), пространственная структура возмущений плотности (3)—(5) и возмущений тензора деформации $D_{ik} = \partial v_i / \partial x_k$ (7), (8). В заключение (9) полученные результаты использованы для оценки момента и импульса возникающих галактик и скоплений галактик.

2. При сделанных предположениях все свойства начальных возмущений плотности и скорости определяются корреляционными функциями возмущений в двух различных точках пространства. Если к тому же ограничиться рассмотрением лишь нарастающей моды возмущений, то корреляционные функции скорости и плотности оказываются связанными между собой, и достаточно задать лишь корреляционную функцию возмущений плотности. Проще, однако, задавать не саму корреляционную функцию плотности, а ее спектр $b^2(t, k)$:

$$g(t, \vec{q}) = \overline{f(\vec{q}_1) f(\vec{q}_1 + \vec{q})} = (2\pi)^{-3/2} \int b^2(k, t) e^{i \vec{k} \vec{q}} d^3k,$$

где q — лагранжева координата точки. Теория развития малых возмущений в модели Фридмана [7—8] позволяет связать спектр возмущений на поздние моменты времени (после рекомбинации) со спектром возмущений вблизи особой точки. Вид спектра вблизи особой точки должен определяться процессами, приводящими к возникновению возмущений. Надо учесть, что вблизи особой точки нас интересует лишь длинноволновая часть спектра (малые k). Естественно предположить, что в длинноволновой области $\lambda = 2\pi k/a \gg ct$ спектр не зависит от каких-либо размерных величин (кроме скорости света и времени). Это приводит к выводу, что в модели Фридмана в области $\lambda > ct$, $b^2(k, t) \sim k^n$, где $n > -3$ из условия сходимости интеграла в (1). Различные механизмы возникновения флуктуаций приводят к различным значениям n. Так, в эвклидовом пространстве квантовые флуктуации плотности Бозе-газа дают $n = 0$, а квантовые флуктуации плотности Ферми-газа $n = 1$ [9]. Термодинамические флуктуации и в эвклидовом пространстве, и в модели Фридмана соответствуют значению $n = 4$. В модели Сахарова $n = 2$ [10]. По-видимому, в модели Фридмана наиболее вероятно значение $n \simeq 1$ [11]. В том случае, если возмущения плотности не определяются процессами, протекающими вблизи особой точки в модели Фридмана, а, например, определяются предшествующей расширению стадией сжатия, или же, если ранние стадии расширения не описываются моделью Фридмана, приведенные выше соображения не применимы и спектр возмущений не описывается степенной функцией. Ниже постулируется зависимость k^n $(n > -3)$ в области $\lambda > ct$ при $t \gtrsim 10^4 \div 10^5$ *сек.* В этом случае можно показать, что после рекомбинации спектр возмущений плотности имеет вид

$$b^2(k, t) \simeq b_0 k^{n-2} \sin^2(kR_g)\, e^{-k^2 R_s^2/4}, \tag{2}$$

где произвольные параметры b_0 и $n > -3$; R_g соответствует длине волны Джинса на момент рекомбинации и R_s характеризует область влияния диссипативных процессов. Численно R_g и R_s удобно характеризовать с помощью массы барионов, заключенной в шар радиусом R_g и R_s соответственно.

При $1 > \Omega \geqslant 0.035$, $M_g \simeq 0.5 \cdot 10^{16} \Omega^{-2} M_\odot$, $M_s \simeq 1.8 \cdot 10^{11} \Omega^{5/4} M_\odot$;

при $\Omega \leqslant 0.035$, $M_g \simeq 2 \cdot 10^{20} \Omega^{1/4} M_\odot$; $M_s \simeq 5 \cdot 10^{10} \Omega^{-13/8} M_\odot$,

где $\Omega = \overline{\rho}/\rho_c$, $\rho_c = 3H^2/8\pi G \simeq 2 \cdot 10^{-29}$ *г/см*^{3} — критическая плотность,

$H = 100$ *км/сек·Мпс* — постоянная Хаббла, G — постоянная тяготения.

Корреляционная функция возмущений плотности со спектром (2) равна

$$g_n(q) = b_0^* \int_0^\infty x^n \sin^2(\alpha x) \frac{\sin(xy)}{xy} e^{-x^2/4} dx, \tag{3}$$

где $\alpha = R_g/R_s$, $y = q/R_s$. В области $n > -1$, $y \ll \alpha$ $(q \ll R_g)$ можно заменить $\sin^2(\alpha x)$ на $1/2$ и в этом случае

$$g_n(q) = \sigma_0^2 e^{-y^2} \Phi(1 - n/2;\ 3/2;\ y^2) = \sigma_0^2 \Phi\left(\frac{1+n}{2};\ 3/2;\ -y^2\right), \tag{4}$$

где $\Phi(\alpha, \beta, y)$ — вырожденная гипергеометрическая функция, $\sigma_0^2 = g_n(0)$ дисперсия возмущений плотности f.

В области малых $y \ll 1$ при всех $n > -1$

$$g_n(y) \simeq \sigma_0^2 \left(1 - \frac{1+n}{3} y^2 + \frac{1+n}{3} \frac{3+n}{5} \frac{y^4}{2} - \cdots\right). \tag{5}$$

При $n = 2m + 2$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ $g_n(y)$ выражается через полиномы Эрмита $H(y)$

$$g_n(y) = \sigma_0^2 \frac{m!\,(-1)^m}{2(2m+1)!} \frac{1}{y} e^{-y^2} H_{2m+1}(y) = \sigma_0^2 \frac{m!\,(-1)^{m+1}}{2(2m+1)!} \frac{1}{y} \frac{d^{2m+1} e^{-y^2}}{dy^{2m+1}},$$

при $n = 0$, $n = 1$ и $n = 1/2$

$$g_0(y) = \sigma_0^2 / y \sqrt{\pi}/2\Phi(y) = \frac{\sigma_0^2}{y} \int\limits_0^y e^{-p^2} dp$$

$$g_1(y) = \sigma_0^2 / y e^{-y^2} \int\limits_0^y e^{p^2} dp$$

$$g_{1/2}(y) = \sigma_0^2 \Gamma(5/4) \sqrt{2}\, y^{-1/2} e^{-y^2/2} I_{1/4}(y^2/2)$$

где $I_\nu(x)$ — функция Бесселя мнимого аргумента.

В общем случае в области $y \gg 1$ можно показать, что

$$\begin{aligned} g_n(y) &\sim y^{-(1+n)} && \text{при } n \neq 2m+2; \\ g_n(y) &\sim y^{2m} e^{-y^2} && \text{при } n = 2m+2, \quad m = 0, 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{6}$$

Это показывает, что в области $y \gg 1$ вид функции $g_n(y)$ сильно зависит от показателя спектра n. Особенно интересным является быстрое убывание корреляционной функции $g_n(y)$ при $n = 2m + 2$. Следует также отметить, что при $y \gg 1$ и $-1 < n \leqslant 2$ $g_n(y) > 0$ при $2 < n \leqslant 4$ $g_n(y) < 0$, при $4 < n \leqslant 6$ $g_n(y) > 0$ и т. д.

3. Знание свойств корреляционной функции $g(y)$ позволяет выяснить некоторые особенности пространственной структуры возмущений. Естественно связывать параметры образующихся космических объектов с пространственной структурой возмущений плотности и скорости на догалактическом этапе эволюции Метагалактики. В работе [1—3] процесс образования гравитационно связанного объекта связывался с достижением возмущений плотности определенного уровня. С точки зрения нелинейной теории развития возмущений, предложенной Я. Б. Зельдовичем [6], более важным является исследование свойств тензора деформации $D_{ik} = \partial v_i / \partial y_k$, который определяет эволюцию возмущений плотности нелинейной стадии. Однако эта задача гораздо сложнее. Кроме того, исследование характера распределения

плотности имеет и самостоятельный интерес. Поэтому прежде всего остановимся на выяснении структуры возмущений плотности в рамках линейной теории.

Некоторые свойства пространственной структуры возмущений плотности могут быть получены при анализе свойств поверхностей постоянной плотности.

Важной характеристикой свойств поверхности $f(\vec{y}) = f_0 = \mathrm{const}$ является среднее значение s — характеристики Эйлера [12—14], определяемой как среднее значение суммы числа максимумов и минимумов, минус число седловых точек поверхности $z = z(x, y)$, определяемой неявно уравнением $f(\vec{y}) = f_0$. Значение s характеристики Эйлера, очевидно, не зависит от ориентации осей координат. Для односвязной поверхности, топологически эквивалентной сфере $s = 2$, для двусвязной поверхности $s = 0$, для трехсвязной $s = -2$ и т. д. Если предположить, что все поверхности $f(\vec{y}) = f_0$ являются односвязными, что, по-видимому, справедливо для высоких уровней ($f_0 > \sigma_0$), то среднее значение s— характеристики Эйлера, отнесенное к единице объема, равно удвоенной плотности числа пересечений заданного уровня f_0 случайной функцией $f(\vec{y})$.

Вводя декартову систему координат, получим

$$s^* = \overline{|f_3|(f_{11}f_{22} - f_{12}^2)},$$

где $f_i = \partial f/\partial y_i$, $f_{ik} = \partial^2 f/\partial y_i \partial y_k$ и т. д. При сделанных выше предположениях о нормальном законе распределения $f(\vec{y})$ и однородности и изотропности невозмущенного пространства, получим

$$s^* = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{2\pi\sigma_0^2}\left(\frac{f_0^2}{\sigma_0^2} - 1\right) e^{-f_0^2/2\sigma_0^2}, \tag{7}$$

где σ_0^2, σ_1^2 и σ_2^2 — дисперсии функций $f(\vec{y})$, $f_i(\vec{y})$ и $f_{ii}(\vec{y})$. Для принятого выше спектра (2)

$$s^* = \frac{n+1}{\pi^3}\sqrt{\frac{2(n+3)}{15}}\, R_*^{-3}\left(\frac{f_0^2}{\sigma_0^2} - 1\right) e^{-f_0^2/2\sigma_0^2}, \tag{8}$$

$s^*(f_0)$ достигает максимума при $f_0^2 = 3\sigma_0^2$ и отрицательна при $f_0^2 < \sigma_0^2$. Такое поведение $s^*(f_0)$ показывает, что в области $f_0^2 \geqslant 3\sigma_0^2$ поверхности $f(\vec{y}) = f_0$ являются преимущественно односвязными. В области $f_0^2 < \sigma_0^2$, наоборот, преобладают многосвязные поверхности. Можно показать, что вблизи максимумов функции $f(\vec{y})$ случайный характер возмущений плотности почти не проявляется, и значение функции $f(\vec{y})$ при $y \ll 1$ определяется значением $f(0)$ и $f_{ik}(0)$. Поэтому вблизи точки максимума ($\vec{y} = 0$) поверхность $f(\vec{y}) = f_0$, очевидно, является односвязной. Однако по мере удаления от точки максимума ($\vec{y} = 0$) флуктуации возрастают и поверхность $f(\vec{y}) = f_0$ становится многосвязной. Из формулы (8) следует, что если при $f_i^2 > 3\sigma_0^2$ преобладают еще односвязные поверхности и рост $s^*(f_0)$ с уменьшением f_0 связан, главным образом, с появлением новых, более низких максимумов $f(\vec{y})$, то при $f_0^2 < 3\sigma_0^2$ структура поверхностей $f(\vec{y}) = f_0$ становится чрезвычайно сложной, многосвязной.

Предполагая, что при $f_0^2 > 3\sigma_0^2$ поверхности $f(\vec{y}) = f_0$ являются односвязными, можно оценить среднюю массу, охватываемую этими поверхностями.

$$\overline{M} = \frac{2}{s^* \sqrt{2\pi}\,\sigma_0} \int\limits_{f_0}^{\infty} e^{-f^2/2\sigma_0^2} df \simeq$$

$$\simeq \frac{3}{2(n+1)} \sqrt{\frac{15\pi}{n+3}} \left(\frac{\sigma_0}{f_0}\right)^4 M_s \leqslant \frac{0.8 M_s}{(n+1)\sqrt{n+3}}. \tag{9}$$

Учитывая, что для двусвязных поверхностей $s = 0$, а для более сложных поверхностей $s < 0$, можно считать, что (9) несколько завышает оценку средней массы, охватываемой поверхностями $f(\vec{y}) = f_0 > \sqrt{3}\sigma_0$.

4. Для более детального анализа пространственной структуры возмущений плотности необходимо знать совместную функцию распределения величин $f(0)$, $f_i(0)$ и $f_{ik}(0)$.

При сделанных выше предположениях об однородности и изотропии невозмущенного пространства и о нормальном законе распределения функции $f(\vec{y})$, легко показать, что условная функция распределения $f_{ik}(0)$ при условии $f(0) = \nu\sigma_0$ имеет вид

$$w(f_{ik}|\nu) = \frac{27\, e^{-N}}{16\pi^3 \sqrt{5\Delta}\, \sigma_2^6}, \qquad (10)$$

$$N = -\frac{9}{10}\frac{\eta_1^2\nu^2}{\Delta} + \frac{3}{5}\frac{\eta_2 \nu s_1}{\Delta} - \frac{3}{5\Delta} s_1^2\left(1 - \frac{3}{2}\eta_2^2\right) + \frac{3}{2} s_2,$$

где $\sigma_2 s_1 = f_{11} + f_{22} + f_{33}$; $\sigma_2^2 s_2 = f_{11} f_{22} + f_{11} f_{33} + f_{22} f_{33} - f_{12}^2 - f_{13}^2 - f_{23}^2$; $\Delta = 1 - \frac{9}{5}\eta_2^2$; $\eta_2 = -\frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{\frac{n+1}{n+3}}$ — коэффициент корреляции $f(0)$ и $f_{11}(0)$. Для ряда приложений удобно использовать функцию распределения главных значений тензора f_{ik}. Для этого необходимо сделать преобразование

$$f_{ik} = \alpha_i^e \alpha_k^m \lambda_{em}; \quad \lambda_{em} = \begin{Vmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33} \end{Vmatrix} \quad \alpha_i^e = \begin{Vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{Vmatrix} \qquad (11)$$

где λ_{em} главные значения тензора f_{ik}, l_j, m_j, n_j — направляющие косинусы новой системы координат по отношению к старой [15]. Если принять $\lambda_{11} > \lambda_{22} > \lambda_{33}$, то функция распределения (10) приводится к виду (φ, ψ и ϑ — углы Эйлера):

$$w(f_{ik}|\nu)\, d\lambda_{11}\, d\lambda_{22}\, d\lambda_{33}\, d\varphi\, d\psi\, d\vartheta =$$

$$= \frac{27 e^{-N}}{16\pi^3\sigma_2^6\sqrt{5\Delta}} (\lambda_{11} - \lambda_{22})(\lambda_{11} - \lambda_{33})(\lambda_{22} - \lambda_{33}) \sin\vartheta\, d\lambda_{11}\, d\lambda_{22}\, d\lambda_{33}.$$

После интегрирования по углам получаем:

$$w(\lambda_{ik}|\nu) = \frac{27\, e^{-N}}{8\pi\sqrt{5\Delta}\, \sigma_2^6} (\lambda_{11} - \lambda_{22})(\lambda_{11} - \lambda_{33})(\lambda_{22} - \lambda_{33}). \qquad (12)$$

Интересно отметить, что вероятность совпадения или близости двух главных значений тензора f_{ik} специально мала. С помощью (12) можно показать, что

$$\overline{\lambda}_{11} = \sigma_2 \nu \eta_2 + \frac{3\sigma_2}{\sqrt{2\pi}}; \quad \overline{\lambda}_{22} = \sigma_2 \nu \eta_2; \quad \overline{\lambda}_{33} = \sigma_2 \nu \eta_2 - \frac{3\sigma_2}{\sqrt{2\pi}}; \quad \overline{s}_1 = 3\nu\eta_2,$$

$$\overline{\lambda_{11}^2} = \sigma_2^2 (\nu^2\eta_2^2 + 6\nu\eta_2/\sqrt{2\pi} + 13/6 - \eta_2^2),$$

$$\overline{\lambda_{33}^2} = \sigma_2^2 \left(\nu^2\eta_2^2 - 6\nu\eta_2/\sqrt{2\pi} + \frac{13}{6} - \eta_2^2 \right), \tag{13}$$

$$\overline{\lambda_{22}^2} = \sigma_2^2 \left(\nu^2\eta_2^2 + \frac{2}{3} - \eta^2 \right); \quad \overline{\lambda_{11}\lambda_{22}\lambda_{33}} = \sigma_2^3 \eta_2^3 \nu (\nu^2 - 3);$$

$$\overline{s_1^2} = 5 + 9\eta_2^2 (\nu^2 - 1).$$

5. Рассмотрим среднее значение и дисперсию возмущений плотности в точке, находящейся на расстоянии y от точки максимума, высотой $f(0) = \sigma_0 \nu$. Направление на рассматриваемую точку удобно выбрать в качестве одной из координатных осей (например, третьей). Это не ограничивает общности задачи, так как направления главных осей тензора f_{ik} не фиксированы. Обозначим $\xi_0 = \xi_0(y)$ — коэффициент корреляции возмущений плотности $f(0)$ и $f(\vec{y})$, $\xi_1 = \xi_1(y)$ — коэффициенты корреляции $f(y)$ и $f_l(0)$, $\xi_2(y)$ и $\xi_3(y)$ — коэффициенты корреляции $f(y)$ и $f_{11}(0)$, $f_{22}(0)$ и $f_{33}(0)$. Остальные обозначения те же, что и выше. Тогда

$$\overline{f}(y) = \sigma_0 \left[\xi_0 \nu + \frac{9}{5} \frac{\eta_2^2}{\Delta} (\nu - \overline{s}_1/3\eta_2^2) F_1 + (3\overline{f}_{33} - \sigma_2 \overline{s}_1) F_2/2\sigma_2 \right]. \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \Sigma^2 = \frac{1}{\sigma_0^2} \overline{(f(y) - \overline{f}(y))^2} = 1 - \xi_0^2 - \xi_1^2 - \frac{9}{5} \frac{\eta_2^2}{\Delta} F_1^2 - F_2^2 + \\ + \left(\frac{3}{5} \frac{\eta_2}{\Delta} F_1 + \frac{1}{2} F_2 \right)^2 (\overline{s_1^2} - \overline{s}_1^2) + \\ + \frac{9}{4} \frac{F_2^2}{\sigma_2^2} (\overline{f_{33}^2} - \overline{f}_{33}^2) - 3 \frac{F_2}{\sigma_2} \left(\frac{3}{5} \frac{\eta_2}{\Delta} F_1 + \frac{1}{2} F_2 \right) (\overline{f_{33} s_1} - \overline{f}_{33} \overline{s}_1), \end{aligned} \tag{15}$$

где $\overline{f}_{33} = n_1^2 \overline{\lambda}_{11} + n_2^2 \overline{\lambda}_{22} + n_3^2 \overline{\lambda}_{33}$. Усреднение проводится по области $0 > \lambda_{11} > \lambda_{22} > \lambda_{33} > -\infty$; $F_1 = \xi_0 - 1/3\eta_2 (\xi_3 + 2\xi_2)$; $F_2 = \xi_3 - \xi_2$. Явный вид зависимости соответствует спектру (2).

В области малых y ($y \ll 1$).

$$\begin{aligned} \overline{f}(y) = \sigma_0 \left(\nu - \frac{3}{5} (n+3) \eta_2 y^2 \overline{f}_{33}/\sigma_2 \right) + \cdots \\ \Sigma^2(y) = \frac{(n+1)(n+3)}{5\sigma_2^2} y^4 (\overline{f_{33}^2} - \overline{f}_{33}^2) + \cdots \end{aligned} \tag{16}$$

В случае $\nu \ll 1$ (невысокий максимум) можно показать, что $\overline{\lambda_{ik}} \sim \sigma_2$. Поэтому уже на расстоянии $y \sim \nu^{1/2} \ll 1$ функция $\overline{f}(y)$ становится отрицательной. Поверхность $\overline{f}(y) = f_0 > 0$ является трехосным эллипсоидом, так как зависит от ориентации главных осей тензора $f_{ik}(0)$. Средняя масса, охваченная поверхностью $f(y) = 0$, примерно равна $\nu^{3/2} M \ll M_s$. В случае $\nu \gg 1$ (высокий максимум) $\overline{\lambda_{11}} = \overline{\lambda_{22}} \simeq \overline{\lambda_{33}} \simeq \simeq \frac{\sigma_2}{3} s_1 \simeq \sigma_2 \nu \eta_2$; $\overline{f}(y) \simeq \sigma_0 \nu \left(1 - \frac{n+1}{3} y^2\right)$ и в области $y \ll 1$ $\overline{f}^2(y) \gg \gg \sigma_0^2 \Sigma^2$, т. е. флуктуации функции $f(y)$ вокруг среднего значения $f(y)$ малы. Значение $\overline{f}(y)$ не зависит от ориентации главных осей тензора $f_{ik}(0)$.

При $y \gg 1$ $\Sigma^2 \simeq 1$ и область влияния центрального максимума ограничена условием $\overline{f}(y) \gtrsim \sigma_0$, при $\nu \gg 1$ и $y \gg 1$ в соответствии с (6)

$$\overline{f}(y) \simeq \sigma_0 \nu \Phi\left(\frac{n+1}{2};\ 3/2;\ -y^2\right) \simeq \begin{cases} \sigma_0 \nu y^{-(1+n)} & \text{при } -1 < n < 2;\ 4 < n < 6 \\ \sigma_0 \nu y^{n-2} e^{-y^2} & \text{при } n \simeq 2,\ 6,\ 10\ldots \end{cases} \qquad (17)$$

Появляется интересная зависимость массы, охваченной поверхностью $\overline{f(y)} = f_0 > 0$, от амплитуды центрального максимума и спектрального индекса n:

$$\begin{aligned} &M \simeq M_s \nu^{3/1+n} \quad -1 < n < 2, \quad 4 < n < 6\ldots \\ &M \simeq M_s (\ln \nu)^{3/2} \quad n = 2,\ 6,\ 10\ldots \end{aligned} \qquad (18)$$

При $2 < n \leqslant 4$; $6 < n \leqslant 8$ и т. д. $\overline{f}(y) < 0$ при $y \gg 1$ и поэтому средняя масса, ограниченная поверхностью $\overline{f}(y) = f_0 > 0$, близка к M_s. Кроме того, интересно отметить, что в случае $\nu \gg 1$ $\overline{f}(y)$ очень слабо зависит от ориентации осей тензора f_{ik}. Зависящие от углов слагаемые в $\overline{f}(y)$ по отношению к главному члену имеют порядок $3y^2/(\nu\eta_2\sqrt{2\pi}) \ll 1$ при $y \ll 1$ и $3/(\nu\eta_2\sqrt{2\pi}y^2) \ll 1$ при $y \gg 1$, $n \neq 1, 6, 8\ldots$. Лишь при $n = 2, 4, 6\ldots$ и $y \gg 1$ эти члены по отношению к оставленному в (17) члену имеют порядок $3y^2/(\nu\eta_2\sqrt{2\pi})$ и могут оказаться существенными.

Таким образом анализ пространственной структуры случайных возмущений плотности в области, окружающей точки максимума возмущений плотности высотой $f(0) = \sigma_0 \nu$, приводит к следующим выводам:

При $\nu \gg 1$

1) в области, определяемой формулой (18), структура возмущений плотности полностью определяется высотой максимума ν (17);

2) поверхности $\overline{f}(\vec{y}) = f_0$ близки к сферам. Возмущения плотности слабо зависят от ориентации осей тензора $f_{ik}(0)$;

3) для показателя спектра $n = 2, 4, 6, 8$ область влияния максимума возмущения плотности заметно меньше, чем при $-1 < n < 2$;

4) при $2 < n < 4$, $6 < n < 8$ и т. д. и $y \gg 1$ $\bar{f}(y) < 0$. Поэтому области, ограниченные поверхностями $\bar{f}(\vec{y}) = f_0(y)$, охватывают массу $\sim M_s$;

5) за пределами области, определяемой формулой (18), флуктуации функции $f(\vec{y})$ становятся большими и поверхности $f(\vec{y}) = f_0 < \sigma_0$ становятся многосвязными в соответствии с результатами пункта (3).

При $\nu \lesssim 1$

6) область влияния максимума возмущений плотности мала, $M \sim \nu^{3/2} M_s$ на больших расстояниях поверхности $f(\vec{y}) = f_0$ становятся многосвязными;

7) поверхности $\bar{f}(\vec{y}) = f_0$ сильно отличаются от сферы и близки к трехосному эллипсоиду;

8) в заключение приведем формулу, дающую среднюю плотность максимумов в интервале $\nu \div \nu + d\nu$ при условии $\nu \gg 1$ [12, 14]:

$$M(\nu)\, d\nu \simeq \frac{\eta_2^3}{(2\pi)^2} \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^3 (\nu^3 - 3\nu\eta_2)^{-\nu^2/2}\, d\nu. \tag{19}$$

Плотность максимумов с $\nu > \nu_0 \gg 1$

$$N(\nu_0) \simeq \frac{\nu_0^2}{3\sqrt{6}\,\pi^2} \frac{(n+1)^{3/2}}{R_s^3} e^{-\nu_0^2/2}. \tag{20}$$

С помощью формулы (18) каждое значение ν можно связать с массой, ограниченной поверхностью $\bar{f}(\vec{y}) = f_0$. Таким образом, формулы (19), (20) определяют среднюю плотность поверхностей $\bar{f}(\vec{y}) = f_0$ в зависимости от массы, охваченной этой поверхностью.

7. С точки зрения нелинейной теории развития возмущений, предложенной Я. Б. Зельдовичем [6], малые возмущения плотности и скорости приводят к возникновению ударных волн и к сжатию вещества в сильно сплюснутые эллипсоиды. Параметры областей, охваченных ударной волной, определяются свойствами тензора деформаций $D_{ik} = \partial v_i / \partial y_k = \partial v_k / \partial y_i$. Тензор деформаций предполагается симметричным в соответствии с тем, что в растущей моде возмущений скорости потенциальны. Все свойства тензора деформации определяются, как и выше, заданием спектра возмущений плотности.

Предполагая, что функция распределения шести компонент тензора D_{ik} гауссова, получим, после приведения к главным осям (поворот осуществляется так же, как и в (10)—(11))

$$w(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)\,d\lambda_1\,d\lambda_2\,d\lambda_3\,d\varphi\,d\psi\,d\vartheta = \frac{27\,e^{-3/5s_1^2+3/2s_2}}{16\sqrt{5}\,\pi^3\sigma_3^6}\,(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)\times$$
$$\times\sin\vartheta\,d\lambda_1\,d\lambda_2\,d\lambda_3\,d\varphi\,d\psi\,d\vartheta \qquad (21)$$

$$0\leqslant\vartheta\leqslant\pi;\quad 0\leqslant\psi\leqslant\pi;\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi;\quad -\infty<\lambda_3\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_1<\infty$$
$$\sigma_3 s=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3;\quad \sigma_3^2 s_2=\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3.$$

σ_3^2 — дисперсия диагональных компонент тензора D_{ik}. Величина σ_3^2 связана с дисперсией возмущений плотности соотношением

$$\sigma_3^2=\frac{1}{5}\overline{\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta\rho}{\rho}\right)^2}.$$

В согласии с (13) можно получить

$$\begin{gathered}\overline{\lambda_1}=3\sigma_3/\sqrt{2\pi};\quad \overline{\lambda_2}=0;\quad \overline{\lambda_3}=-3\sigma_3/\sqrt{2\pi};\quad \overline{\lambda_1\lambda_2}=\overline{\lambda_2\lambda_3}=\sigma_3^2/2;\\ \overline{\lambda_1\lambda_3}=-\sigma_3^2;\quad \overline{\lambda_1^2}=\overline{\lambda_3^2}=13\,\sigma_3^2/6;\quad \overline{\lambda_2^2}=2\sigma_0^2/3;\quad \overline{s_1^2}=5.\end{gathered}\qquad (22)$$

Для определения доли вещества, подвергшегося сжатию, согласно нелинейной теории, необходимо получить вероятность того, что $\lambda_1\geqslant\sigma_3\mu$. Функция распределения величины λ_1 имеет вид:

$$w(\lambda_1)\,d\lambda_1=\frac{8}{8\pi\sqrt{3}\,\sigma_3}e^{-\frac{9}{10}\frac{\lambda_1^2}{\sigma_3^2}}\left\{2\sqrt{\frac{16}{15}}\frac{\lambda_1}{\sigma_3}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{\frac{8}{3}}\left[\frac{8}{5}\frac{\lambda_1^2}{\sigma_3^2}-\frac{2}{5}\right]F\left(\frac{\lambda_1}{\sigma_3}\sqrt{\frac{2}{5}}\right)+\frac{12}{5}F\left(\frac{\lambda_1}{\sigma_3}\sqrt{\frac{3}{20}}\right]\right\}d\lambda_1, \qquad (23)$$

где $F(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{x^2}(1+\Phi(x))=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{x^2}\left(1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-\varphi^2}d\varphi\right)$ получим, интегрируя (23) в пределах $\sigma_0\mu\leqslant\lambda_1<\infty$,

$$\Phi(\mu)=\frac{4\mu}{3\sqrt{2\pi}}e^{\mu^2/2}+\frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mu\right)\right]-\frac{5}{6}\left[1-\Phi(\mu/\sqrt{2})\right]+\cdots$$
$$(\mu\gg 1) \qquad (24)$$

$$\Phi(\mu) \simeq \frac{1}{2\pi}\left(\pi + \frac{2\sqrt{5}}{3} + \operatorname{arctg}\sqrt{5}\right) -$$

$$- \frac{3-\sqrt{2/3}}{4\sqrt{3\pi}}\mu - \frac{25\mu^2}{24\pi\sqrt{5}} - \frac{3\mu^3}{83\pi}\left(\frac{86}{27}\sqrt{\frac{2}{3}}-1\right) - \frac{\mu^4}{12\pi\sqrt{5}} - \dots$$
$$(\mu < 1)$$

8. Выяснение пространственной структуры областей, охваченных сжатием, представляет более сложную задачу, чем в случае возмущений плотности, поскольку функция распределения (23) не гауссова. Однако некоторые параметры охваченных сжатием областей могут быть получены методами, аналогичными использованным выше. Так, рассматривая зависимость s — характеристики Эйлера поверхностей $\lambda_1 = \sigma_3 \nu = \mathrm{const}$, удается показать, что $s(\nu)$ достигнет максимума при $\nu^2 \sim 5$ и меняет знак при $\nu \sim 1$. Поэтому односвязные поверхности преобладают в области $\nu^2 > 5$. Средняя масса, охваченная такой поверхностью, несколько больше, чем в случае возмущений плотности

$$\overline{M} \simeq \frac{20\, M_*}{(n+1)\sqrt{n+3}}\,\nu^{-3}. \tag{25}$$

Наконец, рассмотрим более подробно свойства тензора деформации $D_{ik}(\vec{y})$ в точке L, находящейся на расстоянии y от точки L_0, в которой наибольшее главное значение тензора $D_{ik}(0)$ достигает максимума высоты $\lambda_1 = \sigma_3\nu$. В области $y \ll 1$ корреляция велика, и свойства тензора $D_{ik}(\vec{y})$ полностью определяются свойствами тензора $D_{ik}(0)$. Наиболее интересно рассмотреть вид тензора $D_{ik}(\vec{y})$ при $y \gg 1$. В этой области условная дисперсия компонент $D_{ik}(\vec{y})$, очевидно, стремится к безусловной. Если $\nu \gg 1$, то среднее значение $D_{ik}(\vec{y})$ даже при $y \ll 1$ может в некоторой области превосходить безусловную дисперсию компонент $D_{ik}(\vec{y})$, и в этом случае влияние тензора $D_{ik}(0)$ сказывается и при $y \gg 1$. При $y \gg 1$ влияние вторых производных λ_1 в точке L_0 мало (по крайней мере при $n \neq 6, 8, 10\ldots$), и достаточно рассмотреть лишь поведение среднего значения $\overline{\underline{D_{ik}(\vec{y})}}$ при заданной величине $\lambda_1(0) = \sigma_3\nu$. Среднее значение тензора $D_{ik}(\vec{y})$ в точке L, смещенной на расстояние y от точки максимума L_0 по третьей оси заданных значений тензора $D_{ik}(0)$ имеет вид

$$\overline{D}_{11}(y) = D_{11}(0)\psi_1 + 0,1(\sigma_3 s_1(0) - 5D_{33}(0))(\psi_1 - 3\psi_2),$$

$$\overline{D}_{22}(y) = D_{22}(0)\psi_1 + 0,1(\sigma_3 s_1(0) - 5D_{33}(0))(\psi_1 - 3\psi_2),$$

$$\overline{D}_{33}(y) = 0,3[\psi_2(3\sigma_3 s(0) - 5D_{33}(0)) - \psi_3(\sigma_3 s_1(0)\,5D_{33}(0))], \qquad (26)$$

$$\overline{D}_{12}(y) = \psi_1 D_{12}(0), \qquad \overline{D}_{13}(y) = 3\psi_2 D_{13}(0); \qquad \overline{D}_{23}(y) = 3\psi_2 D_{33}(0),$$

где $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$, $\psi_3(y)$ — корреляционные функции тензора D_{ik}.

Эти функции для спектра (2) могут быть выражены через вырожденные гипергеометрические функции. При $y \to 0$; $\psi_1 \simeq \psi_3 \simeq 1$; $\psi_2 \simeq 1/3$ и (26) превращается в тождество. Вид функций ψ_1, ψ_2, ψ_3 при $y \gg 1$ зависит от показателя спектра n.

Из (26) сразу следует интересная особенность: если тензор $D_{ik}(0)$ ориентирован так, что $D_{12}(0) = D_{13}(0) = D_{23}(0)$, то и $\overline{D}_{12}(y) = \overline{D}_{13}(y) = \overline{D}_{23}(y)$. Это означает, что главные оси тензоров $D_{ik}(0)$ и $\overline{D}_{ik}(y)$ совпадают. До тех пор, пока $\overline{D}_{ik}(y) \gg \sigma_3$ можно считать, что совпадают (или близки) и главные оси тензоров $D_{ik}(0)$ и $D_{ik}(y)$.

В общем случае компоненты тензора $D_{ik}(0)$ могут быть выражены через главные значения $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ и углы, определяющие положение главных осей тензора $D_{ik}(0)$ относительно выбранной системы координат, по формулам (11).

Если фиксировано лишь λ_1, то необходимо усреднить (26) по λ_2 и λ_3. При $\nu^0 \gg 4$ можно показать, что

$$\overline{\lambda}_2 \simeq \sigma_3\left(\frac{\nu}{3} + \nu_0 - \frac{4}{3\nu} - \frac{3}{4}\frac{\nu_0}{\nu^2} + \cdots\right)$$

$$\overline{\lambda}_3 \simeq \sigma_3\left(\frac{\nu}{3} - \nu_0 - \frac{4}{3\nu} + \frac{3}{4}\frac{\nu_0}{\nu^2} - \cdots\right) \qquad (27)$$

$$\nu_0 = \sqrt{\pi/6}\,.$$

Используя эти значения $\overline{\lambda}_2$ и $\overline{\lambda}_3$, запишем в явном виде $\overline{D}_{ik}(y)$ при $y \gg 1$ в случаях, когда направление смещения точки L относительно точки максимума L_0 совпадает с одной из главных осей тензора D_{ik} (0). В области $y \gg 1$ функции $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ и $\psi_3(y)$ можно приближенно записать в виде $(-1 < n < 6)$:

$$\psi_1 = 3\psi_0(y); \quad \psi_2 = -n\psi_0(y); \quad \psi_3 = n(n-2)\psi_0(y)$$

$$\psi_0(y) = \frac{\Gamma(7/2)\,y^{-(1+n)}}{\Gamma\left(\frac{6-n}{2}\right)3}. \qquad (28)$$

Для точки L, расположенной в направлении максимального главного значения, $D_{33}(0)=\lambda_1$; $D_{22}(0)=\overline{\lambda}_2$; $D_{11}(0)=\overline{\lambda}_3$ $(n\neq 0;\ 2)$

$$\overline{D}_{33}(y)=\sigma_3 n(n-2)\,\nu\psi_0,$$

$$\overline{D}_{22}(y)=\sigma_3(3\nu_0-n\nu)\,\psi_0,$$

$$\overline{D}_{33}(y)=-\sigma_3(3\nu_0+n\nu)\,\psi_0.$$

Случаи $n=0$, $n=2$ необходимо рассматривать отдельно.

Для $n=0$

$$\overline{D}_{33}(y)=\sigma_3\nu_1\frac{6\psi_0}{y^4};\quad \overline{D}_{22}(y)=\sigma_3\left(3\nu_0+\frac{2\nu_1}{y^2}\right)\psi_0;$$
$$\overline{D}_{11}(y)=\sigma_3\left(-3\nu_0+\frac{3\nu_1}{y^2}\right)\psi_0. \tag{30}$$

Для $n=2$

$$\overline{D}_{33}(y)=-\sigma_3\nu_{12/y^4}\psi_0;\quad \overline{D}_{22}(y)=\sigma_3(3\nu_0-2\nu_1)\,\psi_0;$$
$$\overline{D}_{11}(y)=-\sigma_3(3\nu_0+2\nu_1)\,\psi_0. \tag{31}$$

Учитывая, что $\nu_1\gg\nu_0$, из (29)—(31) получим в зависимости от показателя n:

1) при $1<n<0$ все три главных значения тензора $\overline{D}_{ik}(y)$ положительны. Область влияния точки максимума высотой $\sigma_3\nu$, $y\sim\nu^{1/1+n}$;

2) при $0<n\leqslant 2$ все три главных значения $\overline{D}_{ik}(y)$ отрицательны при $y\gg 1$ и область влияния максимума высотой ν, $y\sim 1$;

3) при $n>2$ $\overline{D}_{33}(y)>0>\overline{D}_{22}(y)>\overline{D}_{11}(y)$. Область влияния максимума высотой ν, $y\sim\nu_1^{1/(1+n)}$.

Для точки L, расположенной в плоскости $\lambda_2\lambda_3$, ортогональной к направлению максимального главного значения тензора $D_{ik}(0)$, легко получить, что направление максимального главного значения тензора $\overline{D}_{ik}(y)$ совпадает с направлением λ_1 и

$$\overline{\lambda_1(y)}\simeq 3\sigma_3\left(\nu_1-\frac{n+1}{2}\nu_0\right)\psi_0. \tag{32}$$

Область влияния точки максимума высотой $\lambda_1=\sigma_0\nu$ $y\sim\nu^{1/(1+n)}$.

Интересно отметить также, что из (27) следует, что при $y<1$ все три главных значения тензора $\overline{D}_{ik}(y)$ будут положительны. Это обеспечивает сжатие по всем трем осям в окрестности высокого максимума $\lambda_1=\sigma_3\nu$ — приводит к образованию областей повышенной плотности и, очевидно, приводит к тому, что сжатая область оказывается гравитационно связанной. Возможно, что область, имеющая массу $M \sim M_s$, может рассматриваться как ядро будущих гигантских галактик.

9. Пространственная структура возмущений плотности, скорости и т. д. тесно связана с проблемой происхождения момента импульса галактик и скоплений галактик. Проблема происхождения вращения галактик является одной из важнейших в теории возникновения галактик. В рассматриваемой флуктуационной теории происхождения галактик возникновение момента импульса галактик связано, во-первых, с наличием начального „затравочного" момента, связанного с возмущениями скорости, и, во-вторых, с приливным взаимодействием сформировавшихся галактик. Этот вопрос рассматривался, в частности, в работе Пибблса [4]. Ниже рассматривается вопрос о происхождении „затравочного" момента.

В однородной и изотропной модели Фридмана на линейной стадии развития возмущений нарастающая мода возмущений плотности связана с нарастающей модой возмущений потенциальной скорости. Вихревые возмущения скорости на линейной стадии не нарастают и остаются малыми. Таким образом, к тому времени, когда возмущения становятся не малыми и происходит образование галактик и скоплений галактик, вихревые компоненты скорости пренебрежимо малы. „Затравочный" момент галактик должен быть связан с возмущениями потенциальной скорости. Это, однако, не приводит к каким-либо принципиальным трудностям.

Удельный момент конденсирующейся галактики определяется формулой

$$\vec{\mu} = \frac{1}{\bar{\rho} v} \int\limits_V \rho \, [\vec{r} \vec{v}] \, d^3 r, \tag{33}$$

где $\vec{r}$ — расстояние от центра тяжести конденсирующейся галактики и $\vec{v}$ — скорость относительно центра тяжести. Интеграл должен быть взят по объему V, охваченному конденсацией, причем величина удельного момента $\vec{\mu}$ очень сильно зависит от формы объема V. Для определения объема V необходимо, прежде всего, выработать критерии, определяющие границу области конденсации. Кроме того, из-за случайного характера возмущений граница области конденсации также является случайной функцией координат. Это обстоятельство очень сильно усложняет вопрос определения интегральных характеристик возникающих галактик и в том числе удельного момента.

В настоящее время задача определения границ конденсирующегося облака газа еще не решена. Однако анализ пространственной структуры возмущений в окрестности точек максимума показывает, что поверхности $f(\vec{y}) = f_0 > 0$ и $\overline{\lambda_1(y)} = \mathrm{const}$ близки к эллипсоидам. Отношение полуосей этих эллипсоидов зависит от высоты максимума и от расстояния максимума. Случайный характер возмущений проявляется лишь на сравнительно больших расстояниях и приводит к тому, что поверхности $f(y) = f_0$ и $\overline{\lambda_1(y)} = \mathrm{const}$ становятся многосвязными. Поэтому можно ожидать, что по крайней мере в начальный период конденсации галактики, когда конденсируются области, близкие к центру, граница объема V близка к эллипсоиду. Впоследствии, когда конденсация распространится и на внешние области, граница объема V станет многосвязной. Тем не менее возможно, что и в этот период объем V будет близок к эллипсоиду, тогда как отклонения объема V от эллипсоида будут поверхностным эффектом и не очень сильно изменят оценки удельного момента, сделанные для эллипсоида объема V.

Для эллипсоида с полуосями $c_1 \leqslant c_2 \leqslant c_3 < R_*$ (в лагранжевых координатах) и для спектра (2) из (33) следует (здесь и ниже система координат ориентирована по главным осям эллипсоида V)

$$\overline{\mu_i} = 0; \qquad \overline{\mu_3^2} = \frac{\varphi^2(t)}{375}\,(c_1^2 - c_2^2)^2 \left[1 - 2\,\frac{n+1}{49\,R_*^2}\,(3c_1^2 + 3c_2^2 + c_3^2) + \cdots\right]. \qquad (34)$$

Дисперсии $\overline{\mu_1^2}$ и $\overline{\mu_2^2}$ получаются из (34) заменой индексов. Общим свойством момента, связанного с потенциальными случайными скоростями, является обращение в нуль $\overline{\mu_3^2}$ при $c_1 = c_2$. Поэтому в том случае, когда объем V является шаром, $\overline{\mu^2} = 0$ в линейном приближении. В работе Пибблса [4] рассматривается момент именно шарового объема и поэтому момент отличен от нуля лишь во втором порядке теории возмущений. Если же объем V отличается от шара, то момент конденсирующегося тела отличен от нуля и в первом порядке. Это свойство является следствием следующего более общего соотношения, указанного Я. Б. Зельдовичем: момент, рассчитанный по потенциальным скоростям в линейном приближении, тождественно равен нулю для объемов, ограниченных поверхностями постоянного потенциала скорости. Если объем V симметричен относительно центра, то формула (34) справедлива и для момента относительно центра тяжести конденсации, и в первом порядке теории возмущений в этом случае можно не учитывать возможное смещение центра тяжести конденсирующегося тела относительно центра объема.

Дисперсия момента, определяемая формулой (34), в линейном приближении растет вместе с ростом возмущений. Это вызвано, как было отмечено Пибблсом [4], действием приливных сил. Скорость роста дисперсии момента определяется функцией $\varphi^2(t) = a^4(t)\,h^2(t)$, где $a(t)$ — масштабный множитель невозмущенной модели Фридмана и $h^2(t)$ — дисперсия возмущений дивиргенции скорости. Для квазиэвклидовой модели Фридмана $a(t) \sim t^{2/3}$, $h(t) \sim t^{1/3}$ и $\varphi(t) \sim t$. Более быстрый закон нарастания момента ($\varphi \sim t^{5/3}$), полученный Пибблсом [4], соответствует тому, что момент вычисляется во втором порядке теории возмущений.

Интересно сравнить дисперсию момента, определяемого потенциальными скоростями (34), с дисперсией момента, полученного в предположении изотропной турбулентности. Ограничиваясь первым членом разложения в ряд по степеням c_i/R_s, в линейном приближении получим:

для потенциальных скоростей в соответствии с (34)

$$\overline{\mu^2} \sim [c_1^4 + c_2^4 + c_3^4 - c_1^2 c_2^2 - c_1^2 c_3^2 - c_2^2 c_3^2], \tag{35}$$

для случая изотропной турбулентности

$$\overline{\mu^2} \sim [4c_1^4 + 4c_2^4 + 4c_3^4 + c_1^2 c_2^2 + c_1^2 c_3^2 + c_2^2 c_3^2]. \tag{36}$$

В случае изотропной турбулентности максимальна дисперсия момента для шаровых объемов V. Видимо, это утверждение справедливо для произвольного объема конденсации. Этот пример хорошо иллюстрирует отсутствие каких-либо принципиальных трудностей в связи с проблемой вращения галактик во флуктуационной теории происхождения галактик.

Если центр эллипсоида объема V помещен в точку максимума плотности, причем главные оси эллипсоида совпадают с главными осями тензора $f_{ik}(0)$, то вместо (34) получим:

$$\overline{\mu}_i = 0, \qquad \overline{\mu_3^2} = \frac{\varphi^2(t)}{375}(c_1^2 - c_2^2)^2\left[\left(1 - \frac{n+1}{4(n+3)}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{3(n+1)}{98R_s^2}(3c_1^2 + 3c_2^2 + 3c_3^2) + \cdots\right]. \tag{37}$$

Если главные оси эллипсоида объема V не совпадают с главными осями тензора $f_{ik}(0)$, то среднее значение компонент момента $\overline{\mu}_i$ может быть выражено через эллиптические интегралы, зависящие от c_i. Если объем V является эллипсоидом вращения, то проекция момента на ось симметрии эллипсоида равна нулю. Для сферического объема все компоненты момента $\overline{\mu_l} = 0$. Компоненты $\overline{\mu_l}$ пропорциональны недиагональным компонентам тензора $f_{lk}(0)$.

Значительно сильнее корреляция между компонентами тензора деформации $D_{lk}(0)$ в центре объема интегрирования V и моментом μ_l. Выбирая объем V в виде эллипсоида, при заданных $D_{lk}(0)$ получим

$$\overline{\mu_l} = 0, \qquad \overline{\mu_3^2} = \frac{(n+1)(n+3)}{47250} \frac{\varphi^2(t)(c_1^2 - c_2^2)^2}{R_s^4} \times \\ \times \left[4(3c_1^4 + 3c_2^4 + c_3^4) - \left(\frac{18}{7}\frac{n+1}{n+3} - 2\right)(3c_1^2 + 3c_2^2 + c_3^2)^2 + \cdots \right] \tag{38}$$

в случае, если главные оси эллипсоида V совпадают с главными осями тензора $D_{lk}(0)$. Как и выше, $\overline{\mu_l} \neq 0$ в том случае, когда главные оси эллипсоида V и тензора $D_{lk}(0)$ не совпадают. В этом случае $\overline{\mu_l}/D_{lk}(0)$ также пропорционально недиагональным компонентам тензора $D_{lk}(0)$. Для эллипсоида вращения проекция момента на ось симметрии всегда равна нулю. Вообще говоря, необходимо учитывать, что в центре объема V должно иметь максимум наибольшее главное значение λ_1 тензора $D_{lk}(0)$. По-видимому, это еще уменьшит дисперсию удельного момента $\overline{\mu_l}$. Однако можно ожидать, что среднее значение $\overline{\mu_l}$ в этом случае будет отлично от нуля, так как, вообще говоря, главные оси тензора $D_{lk}(0)$ и тензора вторых производных от $\lambda_1(0)$ не совпадают.

Полученные результаты можно рассматривать исключительно как оценки среднего значения и дисперсии удельного момента, поскольку при усреднении не учитывался случайный характер границы объема интегрирования V.

Тем не менее, некоторые выводы, по-видимому, могут быть сделаны:

1) Можно ожидать, что удельный момент конденсаций большой массы, возникающих вокруг высоких возмущений плотности и тензора $D_{lk}(0)$, будет особо малым. Это связано с тем, что объем конденсации V в этих случаях близок к сфере (см. 6, 8).

2) Удельный момент конденсаций малой массы, возникающих вокруг малых возмущений плотности и тензора $D_{lk}(0)$, будет, напротив, сравнительно большим, так как в этом случае объем конденсации V близок к трехосному эллипсоиду.

3) По тем же причинам всегда особо мал удельный момент центральных областей конденсаций.

4) Отмеченные соотношения являются следствием потенциальности возмущений скорости и хорошо согласуются с наблюдаемой зависимостью удельного момента от массы для галактик и скоплений галактик. Следует также отметить, что, например, в случае изотропной турбулентности зависимость удельного момента от массы была бы обратная.

5) „Затравочный" удельный момент конденсаций отличен от нуля в первом порядке теории возмущений, если объем конденсации отличается от сферы. Удельный момент конденсаций растет со временем, что связано с приливным влиянием окружающих неоднородностей. Зависимость удельного момента от времени, полученная выше в первом порядке теории возмущений, согласуется с результатами Пиббласа [4].

В заключение пользуюсь случаем поблагодарить Я. Б. Зельдовича за постоянное внимание и интерес к работе, а также О. В. Локуцлевского за полезные обсуждения.

Институт прикладной математики
АН СССР

THE SPACE STRUCTURE OF PERTURBATION AND THE ORIGIN OF ROTATION OF GALAXIES IN THE THEORY OF FLUCTUATION

A. G. DOROSHKEVICH

The statistical properties of density and velocity perturbations within the range of Friedman cosmological model are studied. Perturbation properties in the vicinity of points of maximum density and deformation tensor perturbations are analysed. The question of galaxies and the angular momenta origin of the cluster of galaxies is discussed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *P. J. Peebles*, Ap. J., 147, 859, 1967.
2. *А. Г. Дорошкевич, Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков*, Астрон. ж., 44, 295, 1967.
3. *R. H. Dicke, P. J. Peebles*, Ap. J., 194, 838, 1968.
4. *P. J. Peebles*, Ap. J., 155. 393, 1969.
5. *Л, М. Озерной, А. Д. Чернин*, Астрон. ж., 45, 1137, 1968,
6. *Я. Б. Зельдович*, Препринт ИПМ № 48, 1969; Астрофизика, 6, 320, 1970.
7. *Е. М. Лифшиц*, ЖЭТФ, 16, 587, 1946.
8. *J. Silk*, Ap. J., 151, 459, 1968.
9. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Статистическая физика, Физмат, М., 1964.
10. *А. Д. Сахаров*, ЖЭТФ, 49, 345, 1965.

11. *А. Г. Дорошкевич, Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков*, Доклад на пятой конференции по ОТО, Тбилиси, 1968.
12. *Л. Э. Эльсгольдц*, УМН, 5, № 6, 52, 1950.
13. *Г. Зейферт, В. Трельфалль*, Вариационное исчисление в целом, ИЛ, М., 1947.
14. *А. А. Свешников*, Прикладные методы теории случайных функций, Наука, М., 1968.
15. *И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев*, Справочник по математике, ГИТТЛ, М., 1954.
16. *Ю. К. Беляев*, ДАН СССР, 176, № 3, 1967.