АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 6 НОЯБРЬ, 1970 ВЫПУСК 4

МОДЕЛИ „ВСЕЛЕННОЙ" ФРИДМАНА В ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

К. П. СТАНЮКОВИЧ, О. Ш. ШАРШЕКЕЕВ

Поступила 2 марта 1970

Исследуются модели „Вселенной" Фридмана в центральной (не сопутствующей) системе отсчета (замкнутая, квазиэвклидова и открытая модели). В каждой модели исследуются оба предельных случая, когда $p=0$ и $p=\varepsilon/3$.

Модели „Вселенной" (Метагалактики), предложенные Фридманом, обычно рассматриваются в синхронно-сопутствующей системе. Интервал для этих моделей в этой системе имеет вид

$$-ds^2 = -c^2d\tau^2 + a^2(d\chi^2 + A^2d\Omega^2), \tag{1}$$

где $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$, $A = \sin\chi;\ \chi;\ \mathrm{sh}\,\chi$ соответственно для замкнутой пульсирующей „эллиптической" модели, для квазиэвклидовой („параболической") и „гиперболической" открытых моделей. При этом обычная координата

$$r = aA, \quad a = a(\tau), \tag{2}$$

причем вид этой функции зависит как от уравнения состояния среды, заполняющей Метагалактику, так и от типа модели, χ является как бы лагранжевой координатой (для $p = 0$ χ действительно лагранжева координата).

Следует отметить, что для нахождения $a = a(\tau)$ обычно вводят параметр, зависящий от времени $\eta = \eta(\tau)$ с помощью соотношения $cd\tau = ad\eta$, тогда метрика (1) принимает вид

$$-ds^2 = a^2(-d\eta^2 + d\chi^2 + A^2d\Omega^2). \tag{3}$$

Решения для всех моделей удобно представить в виде $\tau = \tau(\eta)$, $a = a(\eta) = r/A(\chi)$, откуда, исключая η, можно найти зависимость вида

$$c\tau = F(r;\ \chi) \tag{4}$$

или вида

$$r = r(\tau;\ \chi). \tag{4a}$$

Исследования уравнений в центрально-симметричной системе отсчета показывают [1], что эти уравнения становятся наиболее удобными для анализа именно в переменных $(r;\ \chi)$. Поэтому имеет смысл метрику в этой системе отсчета из метрики (1) также искать в виде

$$ct = \Phi(r;\ \chi). \tag{5}$$

Для удобства дальнейших вычислений напишем (1) в виде

$$-ds^2 = -c^2d\tau^2 + e^{\mu}d\chi^2 + r^2d\Omega^2, \tag{6}$$

где $e^{\mu} = a^2$. Поскольку $\tau = \tau(r;\ \chi)$, $t = t(r;\ \chi)$, то

$$d\chi = \frac{dt - t_r\, dr}{t_\chi}, \qquad d\tau = \frac{1}{t_\chi}\left[\tau_\chi dt + (t_\chi \tau_r - t_r \tau_\chi)\, dr\right]. \tag{7}$$

Исключая из (6), с помощью (7), $d\tau$ и $d\chi$, придем к метрике

$$\begin{aligned} -ds^2 = &-\frac{1}{t_\chi^2}\left(\tau_\chi^2 - \frac{e^{\mu}}{c^2}\right)c^2dt^2 + \left[e^{\mu}t_r^2 - c^2(t_\chi\tau_r - t_r\tau_\chi)^2\right]\frac{dr^2}{t_\chi^2} - \\ &-\left[\frac{e^{\mu}t_r}{c} + c\tau_\chi(t_\chi\tau_r - \tau_\chi t_r)\right]\frac{2cdtdr}{t_\chi^2} + r^2d\Omega^2. \end{aligned} \tag{8}$$

Потребуем, чтобы член при $cdtdr$ обратился в нуль, тогда

$$t_r(e^{\mu} - c^2\tau_\chi^2) + c\tau_\chi c\tau_r t_\chi = 0. \tag{9}$$

Поскольку $c\tau_\chi$ и $c\tau_r$ известны, то из (9) мы можем определить $t = t(r;\ \chi)$. Обозначим

$$e^{\nu} = \frac{\tau_\chi^2}{t_\chi^2} - \frac{e^{\mu}}{c^2 t_\chi^2}; \qquad e^{\lambda} = \frac{e^{\mu}t_r^2}{t_\chi^2} - c^2\left(\tau_r - t_r\frac{\tau_\chi}{t_\chi}\right)^2,$$

откуда после простых преобразований будем иметь

$$e^{\nu} = \frac{\tau_\chi \tau_r}{t_\chi t_r}, \qquad e^{\lambda} = c^2 \tau_r^2 \left(\frac{t_r \tau_\chi}{t_\chi \tau_r} - 1 \right). \tag{10}$$

Ранее нами была сделана попытка непосредственно преобразовать системы отсчета так, чтобы непосредственно определять $\nu = \nu(t;\ r)$, $\lambda = \lambda(t;\ r)$, однако явного выражения найти не удалось [2].

Анализ этой попытки и привел авторов к наиболее рациональному методу преобразования систем отсчета, так что $\nu = \nu(r;\ \chi)$, $\lambda = \lambda(r;\ \chi)$, где $t = t(r;\ \chi)$, причем здесь χ играет роль параметра, который явно не исключается.

Рассмотрим два простых примера.

а) Для „пылевой“ эллиптической модели Фридмана имеем

$$\frac{r}{\sin\chi} = a = a_0(1 - \cos\eta), \qquad c\tau = a_0(\eta - \sin\eta - \pi),$$

откуда

$$c\tau = a_0 \left[\arc\sin \sqrt{\frac{r}{a_0 \sin\chi}\left(2 - \frac{r}{a_0 \sin\chi}\right)} - \right.$$
$$\left. - \sqrt{\frac{r}{a_0 \sin\chi}\left(2 - \frac{r}{a_0\sin\chi}\right)} - \pi \right] \tag{11}$$

при

$$\tau = 0, \ \ \eta = \pi, \ \ a = 2a_0 = R_0, \ \ r = R = R_0 \sin\chi$$

и

$$\frac{v}{c} = \left(\frac{\partial a}{c\partial\tau}\right)_\chi = \sqrt{\frac{1+\cos\eta}{1-\cos\eta}} = \operatorname{ctg}\frac{\eta}{2} = 0.$$

Далее находим

$$c\tau_r = -\frac{1}{\sin\chi\sqrt{\frac{R_0}{r}\sin\chi - 1}}, \qquad c\tau_\chi = \frac{r \operatorname{ctg}\chi}{\text{siu}\,\chi\sqrt{\frac{R_0}{r}\sin\chi - 1}}. \tag{12}$$

Теперь уравнение (9) можно написать в виде

$$rt_r\left(1 - \frac{R_0}{r}\sin^3\chi\right) + \sin\chi\cos\chi\, t_\chi = 0, \tag{13}$$

уравнение характеристик которого имеет вид

$$\frac{dr}{r - R_0 \sin^3 \chi} = \frac{d\chi}{\sin \chi \cos \chi} = \frac{dt}{0}. \tag{14}$$

Интегрируя (14), найдем решение (13) в виде

$$r = R_0 \sin \chi - T(ct) \operatorname{tg} \chi, \tag{15}$$

где $T(ct)$—произвольная функция.

Таким образом

$$ct_r = -\frac{1}{\dot{T} \operatorname{tg} \chi}, \qquad ct_\chi = \frac{1}{\dot{T} \sin^2 \chi}(r - R_0 \sin^3 \chi). \tag{16}$$

$$\begin{gathered} e^\nu = \frac{\dot{T}^2}{\left(\frac{R_0}{r}\sin \chi - 1\right)\left(1 - \frac{R_0}{r}\sin^3 \chi\right)} = \frac{\dot{T}^2 (R_0 \cos \chi - T)^2}{T(R_0 \cos^3 \chi - T)}, \\ e^\lambda = \frac{1}{1 - \frac{R_0}{r}\sin^3 \chi} = \frac{R_0 \cos \chi - T}{R_0 \cos^3 \chi - T}. \end{gathered} \tag{17}$$

Итак, метрика в системе $(t;\ r)$ будет иметь вид

$$-ds^2 = -\frac{c^2 dt^2 \dot{T}^2 (R_0 \cos \chi - T)^2}{T(R_0 \cos^3 \chi - T)} + \frac{dr^2 (R_0 \cos \chi - T)}{(R_0 \cos^3 \chi - T)} + r^2 d\Omega^2, \tag{18}$$

где r, χ, t связаны соотношением (15).

Введем новую лагранжеву координату $R = R_0 \sin \chi$, тогда метрика будет иметь вид

$$\begin{gathered} -ds^2 = -\frac{c^2 dt^2 \dot{T}^2 \left(\sqrt{R_0^2 - R^2} - T\right)^2}{T\left[\sqrt{R_0^2 - R^2}\,\frac{(R_0^2 - R^2)}{R_0^2} - T\right]} + \\ + \frac{dr^2 \left(\sqrt{R_0^2 - R_0^2} - T\right)}{\left[\sqrt{R_0^2 - R^2}\,\frac{(R_0^2 - R^2)}{R_0^2} - T\right]} + r^2 d\Omega^2, \end{gathered} \tag{19}$$

при этом

$$r = R\left[1 - \frac{T(ct)}{\sqrt{R_0^2 - R^2}}\right]. \tag{20}$$

Поскольку при $\chi=0$, $R=0$, $r=0$, $t=\tau$, $e^{\nu}=1$, $e^{\lambda}=1$, то $\frac{\dot{T}^2(R_0-T)}{T}=1$, откуда $\dot{T}=-\sqrt{\frac{T}{R_0-T}}$. Обозначим $\frac{T}{a_0}-1=$ $=\cos\eta$, тогда

$$T=a_0(1+\cos\eta), \tag{21}$$

$\dot{T}=-a_0\dot{\eta}\sin\eta=-\sqrt{\frac{1+\cos\eta}{1-\cos\eta}}$, отсюда $a_0\dot{\eta}=\frac{1}{1-\cos\eta}=a_0\frac{d\eta}{cdt}$ интегрируя которого при условии $t=0$, $\eta=\pi$, получим

$$ct=a_0(\eta-\sin\eta-\pi). \tag{22}$$

Исключая из (21) и (22) η, найдем, что

$$ct=a_0\left[\arcsin\sqrt{\frac{T}{a_0}\left(2-\frac{T}{a_0}\right)}-\sqrt{\frac{T}{a_0}\left(2-\frac{T}{a_0}\right)}-\pi\right]. \tag{23}$$

Поскольку $T=(R_0-a)\cos\chi$, то при $\chi=0$, $T=R_0-a$ или

$$a=2a_0-T=2a_0-a_0(1+\cos\eta)=a_0(1-\cos\eta)$$

$ct=a_0\left[\arcsin\sqrt{\frac{a}{a_0}\left(2-\frac{a}{a_0}\right)}-\sqrt{\frac{a}{a_0}\left(2-\frac{a}{a_0}\right)}-\pi\right]=c\tau$, т. е. действительно при $r\equiv 0$, $t\equiv\tau$.

Теперь определим скорость [1]

$$\frac{u}{c}=e^{\frac{\lambda-\nu}{2}}\left(\frac{\partial r}{c\partial t}\right)_{\chi}=$$

$$=-\frac{\operatorname{tg}\chi}{\sqrt{\frac{R_0}{T}\cos\chi-1}}=-\sqrt{\frac{T}{r}\operatorname{tg}^3\chi}=-\frac{1}{\cos\chi}\sqrt{\frac{R_0}{r}\sin^3\chi-\sin^2\chi}.$$

Поскольку $\frac{2GM}{rc^2}=1-e^{-\lambda}=\frac{R_0}{r}\sin^3\chi$, то $R_0\sin^3\chi=\frac{2GM}{c^2}$ и

$$\frac{u^2}{c^2}=\frac{1}{\cos^2\chi}\left(\frac{2GM}{rc^2}-\sin^2\chi\right). \tag{24}$$

Отсюда следует, что поскольку $T>0$, $\cos\chi>0$ и $0\leqslant\chi\leqslant\pi/2$. Теперь можно интервал окончательно написать в виде

$$-ds^2=\left(-c^2dt^2\frac{\sqrt{R_0^2-R^2}-T}{R_0-T}+dr^2\right)\frac{(\sqrt{R_0^2-R^2}-T)}{\sqrt{R_0^2-R^2}\,\frac{R_0^2-R^2}{R_0^2}-T}+r^2d\Omega^2. \tag{25}$$

При этом $\varkappa\varepsilon=\frac{3}{R_0^2}\left(\frac{R}{r}\right)^3$.

в) Рассмотрим теперь ультрарелятивистский случай для эллиптической модели, когда

$$a=R_0\sin\eta,\quad c\tau=-R_0\cos\eta=-\sqrt{R_0-a^2}, \tag{26}$$

отсюда

$$c^2\tau^2+a^2=R_0^2,$$

при

$$\eta=\frac{\pi}{2},\quad a=R_0=2a_0,\quad r=R_0\sin\chi,\quad \tau=0,\quad \dot a=-\operatorname{ctg}\eta=0.$$

Из (26) имеем

$$c\tau=\sqrt{R_0-\frac{r^2}{\sin^2\chi}},\quad c\tau_r=-\frac{1}{\sin\chi\sqrt{\frac{R_0^2}{r^2}\sin^2\chi-1}},$$

$$c\tau_\chi=\frac{r\operatorname{ctg}\chi}{\sin\chi\sqrt{\frac{R_0^2}{r^2}\sin^2\chi-1}}. \tag{27}$$

Уравнение (9) для этого случая принимает вид

$$rt_r\left(\frac{\operatorname{ctg}^2\chi}{\frac{R_0^2}{r^2}\sin^2\chi-1}-1\right)+\frac{\operatorname{ctg}\chi\, t_\chi}{\frac{R_0^2}{r^2}\sin^2\chi-1}=0 \tag{28}$$

или

$$rt_r\left(\frac{1}{\sin^2\chi}-\frac{R_0^2}{r^2}\sin^2\chi\right)+\operatorname{ctg}\chi\, t_\chi=0.$$

Отсюда имеем

$$\frac{dr^2}{d\chi}=\frac{2r^2}{\sin\chi\cos\chi}-\frac{2R_0^2\sin^2\chi}{\cos\chi}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$r = \operatorname{tg}\chi\,[T(ct) - R_0^2\sin^2\chi]^{1/2}. \tag{29}$$

Поскольку $\sin\chi = \frac{r}{a} = \frac{R}{R_0}$, то

$$r = R\sqrt{1 - \frac{R_0^2 - T(ct)}{R_0^2 - R^2}} = R\sqrt{\frac{T(ct) - R^2}{R_0^2 - R^2}}. \tag{30}$$

Отсюда находим, что

$$ct_r = \frac{2r\operatorname{ctg}^2\chi}{\dot T}, \quad ct_\chi = +\frac{2\cos\chi r^2}{\dot T\sin^3\chi}\left(\frac{R_0^2}{r^2}\sin^4\chi - 1\right)$$

при этом

$$e^\nu = \frac{\dot T^2\operatorname{tg}^2\chi}{4r^2\left(\frac{R_0^2}{r^2}\sin^2\chi - 1\right)\left(1 - \frac{R_0^2}{r^2}\sin^4\chi\right)} =$$

$$= \frac{\dot T^2(T - R_0^2\sin^2\chi)}{4(R_0^2 - T)[T - R_0^2\sin^2\chi(1 + \cos^2\chi)]}, \tag{31}$$

$$e^\lambda = \frac{1}{1 - \frac{R_0^2}{r^2}\sin^4\chi} = \frac{(T - R_0^2\sin^2\chi)}{[T - R_0^2\sin^2\chi(1 + \cos^2\chi)]},$$

$$\begin{aligned}-ds^2 = {}& -\frac{c^2dt^2\dot T^2(T - R_0^2\sin^2\chi)}{4(R_0^2 - T)[T - R_0^2\sin^2\chi(1 + \cos^2\chi)]} + \\ &+ \frac{dr^2(T - R_0^2\sin^2\chi)}{[T - R_0^2\sin^2\chi(1 + \cos^2\chi)]} + r^2d\Omega^2.\end{aligned} \tag{32}$$

При $\chi = 0$, $r = 0$, $\tau = t$, $e^\nu = 1$, $e^\lambda = 1$, поэтому $\frac{\dot T^2}{4(R_0^2 - T)} = 1$, откуда $\frac{dT}{2\sqrt{R_0^2 - T}} = d\sqrt{R_0^2 - T} = c\,dt$ и

$$T = R_0^2 - c^2t^2 = a^2. \tag{33}$$

Поскольку $a^2 = R_0^2 - \frac{c^2t^2}{\cos^2\chi}$, то при $\chi = 0$, $a^2 = R_0^2 - c^2t^2 = R_0^2 - c^2\tau^2$, т. е. действительно при $r=0$ $t=\tau$. Таким образом метрика (32) принимает вид:

$$-ds^2=-c^2dt^2\frac{(R_0^2\cos^2\chi-c^2t^2)}{(R_0^2\cos^4\chi-c^2t^2)}+dr^2\frac{(R_0^2\cos^2\chi-c^2t^2)}{(R_0^2\cos^4\chi-c^2t^2)}+r^2d\Omega^2, \quad (34)$$

$$r=\operatorname{tg}\chi(R_0^2\cos^2\chi-c^2t^2)^{1/2}=(R_0^2\sin^2\chi-c^2t^2\operatorname{tg}^2\chi)^{1/2}=R\sqrt{1-\frac{c^2t^2}{R_0^2-R^2}} \quad (35)$$

Интересно отметить, что в этом случае $e^\lambda=e^\nu$.

При $\chi=\pi/2$ $t=0$, при $t=0$ $T=R_0^2$, $r=R$. Напишем теперь интервал в виде

$$-ds^2=(-c^2dt^2+dr^2)\frac{(R_0^2-R^2-c^2t^2)R_0^2}{(R_0^2-R^2)^2-R_0^2c^2t^2}+r^2d\Omega^2, \quad (36)$$

Определим

$$\frac{u}{c}=e^{\frac{\lambda-\nu}{2}}\left(\frac{\partial r}{c\partial t}\right)_\chi=-\frac{Rct}{\sqrt{(R_0^2-R^2)(R_0^2-R^2-c^2t^2)}}.$$

Из (35) находим, что

$$R_0^2-R^2=\frac{1}{2}[R_0^2-r^2+c^2t^2-\sqrt{(R_0^2-r^2)^2-2c^2t^2(r^2+R_0^2)+c^4t^4}],$$

исключая $R_0^2-R^2$ из (36), окончательно напишем интервал в явном виде через $(t;\ r)$

$$-ds^2=(-c^2dt^2+dr^2)\frac{P}{Q}+r^2d\Omega^2; \quad (37)$$

$$P=[R_0^2-r^2-c^2t^2-\sqrt{(R_0^2-r^2)^2-2c^2t^2(r^2+R_0^2)+c^4t^4}]R_0^2$$

$$Q=[(R_0^2-r^2)^2+c^4t^4-2c^2t^2r^2-(R_0^2-r^2+c^2t^2)\times$$
$$\times\sqrt{(R_0^2-r^2)^2-2c^2t^2(r^2+R_0^2)+c^4t^4}]$$

При этом

$$\varkappa\varepsilon=\frac{3}{R_0^2}\left(\frac{R}{r}\right)^4.$$

В результате проделанных вычислений мы получаем возможность в простом параметрическом виде найти метрику пространств Фридмана в центральной системе отсчета. Точно так же можно исследовать метрику для $A=\chi$ и $A=\operatorname{sh}\chi$.

c) Для случая $A=\chi$ имеем следующие результаты:

при $p=0$, $a=a_0\left(\frac{c\tau}{c\tau_0}\right)^{2/3}$

$$-ds^2=-c^2dt^2\frac{\gamma^4r^2}{\chi(r\gamma^2-\chi^3)}\left(\frac{2}{3ct\gamma^2}\right)^{2/3}+dr^2\frac{\gamma^2r}{(\gamma^2r-\chi^3)}+r^2d\Omega^2, \tag{38}$$

$$r=\chi\left(\frac{3ct}{2\gamma}\right)^{2/3}-\frac{\chi^3}{2\gamma^2},\quad \text{где}\quad \gamma=\frac{3c\tau_0}{2a_0^{3/2}};\quad \varkappa\varepsilon=\frac{3}{\gamma^2}\left(\frac{\chi}{r}\right)^3, \tag{39}$$

и при $p=\frac{\varepsilon}{3}$, $a=a_0\left(\frac{c\tau}{c\tau_0}\right)^{1/2}$,

$$-ds^2=(-c^2dt^2+dr^2)\frac{4k^2r^2}{(4k^2r^2-\chi^4)}+r^2d\Omega^2, \tag{40}$$

$$r=\chi\left(\frac{ct}{k}-\frac{\chi^2}{4k^2}\right)^{1/2},\quad \text{где}\quad k=\frac{c\tau_0}{a_0^2};\quad \varkappa\varepsilon=\frac{3}{4k^2}\left(\frac{\chi}{r}\right)^4. \tag{41}$$

д) Для случая $A=\operatorname{sh}\chi$ аналогичным образом можно получить при $p=0$, $c\tau=a_0(\operatorname{sh}\eta-\eta)$, $a=a_0(\operatorname{ch}\eta-1)$

$$-ds^2=-c^2dt^2\frac{r^2T'^2}{(2a_0\operatorname{sh}\chi+r)(r-2a_0\sin^3\chi)}+dr^2\frac{r}{r-2a_0\operatorname{sh}^3\chi}+r^2d\Omega^2, \tag{42}$$

$$r=\operatorname{th}\chi T(ct)-2a_0\operatorname{sh}\chi,\quad ct=\left[\sqrt{T^2-2a_0T}-a_0\operatorname{Arch}\left(\frac{T}{a_0}-1\right)\right] \tag{43}$$

$$\varkappa\varepsilon=6a_0\left(\frac{\operatorname{sh}\chi}{r}\right)^3.$$

и при $p=\frac{\varepsilon}{3}$, $a=a_0\operatorname{sh}\eta$, $c\tau=a_0(\operatorname{ch}\eta-1)$

$$-ds^2=(-c^2dt^2+dr^2)\frac{r^2}{(r^2-a_0^2\operatorname{sh}^4\chi)}+r^2d\Omega^2, \tag{44}$$

$$r=\operatorname{th}\chi\sqrt{c^2t^2+2ct\,a_0-a_0^2\operatorname{sh}^2\chi},\quad T=c^2t^2+2\,cta_0, \tag{45}$$

$$\varkappa\varepsilon=3a_0^2\left(\frac{\operatorname{sh}\chi}{r}\right)^4.$$

В заключение отметим, что случай $A = \gamma$ при $p = 0$ ранее был рассмотрен Я. Б. Зельдовичем и И. Д. Новиковым [3]. Они получили следующие результаты:

$$e^{\nu} = \left(1 + \frac{2}{9} z_*^2\right)^{-1} \left(1 - \frac{4}{9} z_*^2\right)^{-1}, \quad e^{\lambda} = \left(1 - \frac{4}{9} z_*^2\right)^{-1}, \tag{46}$$

где $z_*^2 = R^2/c^2t^2$, здесь через R обозначен радиус окружности. В наших обозначениях $z_*^2 = \frac{9}{4} \frac{\chi^3}{\gamma^2 r}$, что совпадает с выражениями e^{ν} и e^{λ} в метрике (38).

Авторы весьма благодарны Я. Б. Зельдовичу за ценные замечания, сделанные им в процессе написания этой работы.

Киргизский государственный
университет

THE MODELS OF FRIEDMANS „UNIVERSE“ IN THE CENTRAL SYMETRICAL SYSTEM OF COUNTING OUT

K. P. STANYOUKOVICH, O. SH. SHARSHEKEEV

Friedman's models of the „Universe“ in the central system of counting out (exclusive, quasieuclidean and open models) are studied. In every model two extreme cases are analysed, when $p = 0$ and $p = \varepsilon/3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *К. П. Станюкович*, ДАН СССР, 182, 2, 1968.
2. *К. П. Станюкович, О. Ш. Шаршекеев*, Проблемы теории гравитации и элементарных частиц, Атомиздат, 1966, стр. 241.
3. *Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков*, Релятивистская астрофизика, Наука, М., 1967, стр. 425.