АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 6 АВГУСТ, 1970 ВЫПУСК 3

О МОДЕЛЯХ СКОПЛЕНИЙ ТОЧЕЧНЫХ МАСС С КВАДРАТИЧНЫМ ГРАВИТАЦИОННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Г. С. БИСНОВАТЫЙ-КОГАН, Я. Б. ЗЕЛЬДОВИЧ

Поступила 3 ноября 1969

Рассмотрено движение частиц в их общем гравитационном поле в случае сплюснутых, дискообразных и других не сферически-симметричных конфигураций.

Найдены решения кинетического уравнения в самосогласованном поле с квадратичным потенциалом. Получены точные решения для кругового диска с анизотропным распределением по скоростям, диска эллиптического сечения, эллипсоида вращения с произвольным моментом количества движения, в том числе и нулевым, и для цилиндра эллиптического сечения.

1. *Введение.* Интерес к решению бесстолкновительного кинетического уравнения с самосогласованным полем тяжести связан с тем, что в галактиках, звездных скоплениях столкновения очень редки и каждая звезда движется в усредненном поле тяжести остальных звезд.

В работах [1, 2] были получены точные решения кинетического уравнения в самосогласованном гравитационном поле для звездных скоплений методом построения функций от интегралов движения частиц*. При этом функция распределения должна быть непрерывна в области, ограниченной характеристиками, и может терпеть разрыв только на характеристике. Рассмотрение сферически симметричных конфигураций со степенной зависимостью гравитационного потенциала от радиуса [1] позволило найти серию автомодельных решений, обладающих, однако, бесконечными массой M, радиусом R и центральной плотностью ρ_c. В работе [2] рассмотрены конфигурации с более сложной зависимостью потенциала от радиуса и построены замкнутые

* Траектории, удовлетворяющие этим уравнениям, являются характеристиками кинетического уравнения, которое является уравнением в частных производных.

модели газовых сфер с конечными R, M, ρ_c. Некоторые из этих моделей аналогичны эмденовским газовым сферам, т. е. имеют те же распределения потенциала и плотности. Там же [2] приведены некоторые точные решения для цилиндра и решение для диска с изотропным распределением скоростей и потенциалом

$$\Phi = a(x^2 + y^2) + d.$$

Решения, полученные в [1, 2], характеризуются высокой степенью пространственной симметрии, хотя распределение в пространстве скоростей допускалось анизотропное. Решения с шаровой симметрией пригодны для описания шаровых скоплений или шаровых галактик. В то же время большинство галактик имеет форму более или менее сплющенного эллипсоида вращения, поэтому построение модели эллипсоида, являющейся точным решением кинетического уравнения, весьма важно.

В настоящей работе рассмотрен ряд точных решений кинетического уравнения, характеризующихся меньшей степенью симметрии, чем решения [1, 2]. Получены решения для эллипсоида вращения, для цилиндра эллиптического сечения, для эллиптического диска. Найдено решение для кругового диска с произвольной степенью анизотропии в пространстве скоростей. Все найденные здесь решения имеют гравитационный потенциал, квадратично зависящий от координат, аналогично вырожденным решениям в [2]. Это приводит к существованию большего числа простых интегралов движения (интегралом движения оказывается не только полная энергия частицы, но и ее составные части) и возможности построения решений с меньшей степенью симметрии

Полученные решения можно использовать для моделирования эллиптических и плоских галактик, а также для исследования вопроса о гравитационной неустойчивости кинетического типа, которое всегда лучше проводить, используя точные решения.

Спиральные галактики рассматриваются как результат распада диска [3]. Поэтому особенно интересны точные решения для диска, которые могли бы послужить исходными для анализа неустойчивостей, ведущих к образованию спиральных рукавов.

Приближенные рассмотрения гравитационной кинетической неустойчивости, сделанные квазиклассическим методом, имеются в [4—8]. Отметим, что в общем случае не разработаны методы исследования кинетической гравитационной неустойчивости. Общие критерии устойчивости имеются только для конфигураций, сферически симметричных в физическом пространстве и пространстве скоростей [9].

Особенностью полученных ниже решений является отсутствие зависимости между сплюснутостью системы и ее моментом количества движения. В частности, получены решения для однородного шара с произвольным моментом количества движения P в интервале $0 < P < \frac{2}{5} MR^2 \sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho}$ и безмоментные решения для эллипсоида любой сплюснутости и бесконечно тонкого диска. Не исключено, что безмоментные дисковые конфигурации могли получиться в результате дальнейшей эволюции и образования звезд в плоских сгущениях, рассматриваемых в работе [10]. Вероятность бинарных столкновений пропорциональна объемной плотности. Они ведут к утолщению диска и в пределе приближают его к сфере.

2. *Интегралы движения в случае квадратичного потенциала.* Рассмотрим систему частиц с собственным гравитационным потенциалом

$$\Phi = ax^2 + by^2 + cz^2 + d. \tag{1}$$

Кинетическое уравнение для такой системы частиц в стационарном случае имеет вид

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} - 2\,ax \frac{\partial f}{\partial v_x} - 2\,by \frac{\partial f}{\partial v_y} - 2cz \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0. \tag{2}$$

Уравнение для характеристик

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = -\frac{dv_x}{2ax} = -\frac{\partial v_y}{2by} = -\frac{dv_z}{2cz}. \tag{3}$$

В общем случае различных a, b, c система (3) имеет интегралы

$$\begin{aligned} E_x &= \left(\frac{v_x^2}{2} + ax^2\right) m, \\ E_y &= \left(\frac{v_y^2}{2} + by^2\right) m, \\ E_z &= \left(\frac{v_z^2}{2} + cz^2\right) m, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + v_y^2/2by^2}} - \frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + v_x^2/2ax^2}}, \\ L_2 &= \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + v_y^2/2by^2}} - \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + v_z^2/2cz^2}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Когда $a = b \neq c$, первый интеграл из (5) сводится к сохранению проекции момента количества движения на ось z:

$$L_z = (xv_y - yv_x)\, m. \tag{6}$$

Это отражает свойство изотропии цилиндрически симметричной системы относительно вращения по оси z. При $a = b = c$ система изотропна и сохраняются все три проекции момента количества движения.

Для случая плоской задачи: цилиндра, когда все величины не зависят от z и бесконечно тонкого диска, когда зависимость от z в виде δ-функции, в потенциале $\Phi = ax^2 + by^2 + d$ остается три интеграла уравнений характеристик

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{v_x^2}{2} + ax^2 \qquad & \bar{L} &= \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + v_y^2/2by^2}} - \\ E_y &= \frac{v_y^2}{2} + by^2 & & - \frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + v_x^2/2ax^2}} \end{aligned} \tag{7}$$

3. *Бесконечно тонкий диск.* Рассмотрим сначала случай кругового диска. Полученное в [2] решение можно обобщить на случай произвольной степени анизотропии в пространстве скоростей. Действительно, рассмотрим цилиндрическую систему координат (r, θ) с компонентами скоростей v_θ, v_r; интегралы уравнений характеристик

$$\begin{gathered} E = m\left(\frac{v^2}{2} + ar^2 + d\right), \qquad v^2 = v_\theta^2 + v_r^2; \qquad r^2 = x^3 + y^2, \\ L = mV_\theta r, \qquad \Phi = ar^2 + d. \end{gathered} \tag{8}$$

Поверхностная плотность диска, дающая потенциал (8), есть [11] (M — масса, r_0 — радиус диска)

$$\sigma = \frac{3M}{2\pi r_0^2}\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^{1/2}, \qquad a = \frac{3}{2}\pi\frac{GM}{r_0^3}, \qquad d = -\frac{3\pi}{2}\frac{GM}{r_0}. \tag{9}$$

Тогда функция распределения, непрерывная в области, ограниченной характеристиками кинетического уравнения и дающая распределение плотности (9), имеет вид

$$f = \begin{cases} B\left(A - \dfrac{E}{m} - \gamma\dfrac{L}{m}\right)^{-1/2}, & E + \gamma L < mA, \\ 0 & E + \gamma L > mA. \end{cases} \tag{10}$$

Из условия распределения плотности (9), после интегрирования по скоростям и условия нормировки $\int f dv = \sigma$, имеем

$$A = -\frac{\gamma^2 r_0^2}{2}, \qquad B = \frac{3M}{8\pi^2 r_0^2 \left(-d - \frac{\gamma^2 r_0^2}{2}\right)^{1/2}}. \tag{11}$$

Окончательно, при произвольных M, r_0, γ, имеем точное решение в виде

$$f = \frac{3M}{8\pi^2 r_0^2 \left(-d - \frac{\gamma^2 r_0^2}{2}\right)^{1/2}} \left[-d - ar^2 - \gamma v_\theta r - \frac{v^2}{2} - \frac{\gamma^2 r_0^2}{2}\right]^{-1/2}. \tag{12}$$

Отсюда, при $\gamma = 0$, получаем изотропное по скоростям решение, приведенное в [2]. При $\gamma \to \infty$ получаем диск с круговыми орбитами [11]. При любых γ решение (13) имеет особенность: f обращается в бесконечность при $E + \gamma L = mA$. Кроме того, $\partial f/\partial E$ у этих решений положительно, поэтому они, вероятно, неустойчивы. Рассматривая решение, состоящее из суммы функций (12) с различными γ, можно получить решение без особенностей с $\partial F/\partial E = 0$, которое может быть устойчивым. Это решение имеет вид

$$\begin{aligned} f = \frac{1}{2\pi^3 G r_0} \quad &\text{при} \quad E - \frac{L^2}{2r_0^2 m} < 0 \\ 0 \quad &\text{при} \quad E - \frac{L_0^2}{2r_0^2 m} > 0. \end{aligned} \tag{13}$$

$$\int f\, dv_r\, dv_\theta = \sigma. \tag{14}$$

Рассмотрим теперь диск эллиптического сечения с распределением плотности

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}\right)^{1/2}. \tag{15}$$

Тогда гравитационный потенциал внутри такого диска есть

$$\Phi = \frac{x^2}{\alpha_1^2} + \frac{y^2}{\beta_1^2} + \xi; \qquad \alpha_1,\ \beta_1,\ \xi \text{ зависят от } \alpha,\ \beta,\ \sigma_0. \tag{16}$$

Функция распределения, являющаяся точным решением кинетического уравнения для такого диска, имеет вид

$$f = D\left(K - \frac{\alpha_1^2}{\alpha^2}\frac{E_x}{m} - \frac{\beta_1^2}{\beta^2}\frac{E_y}{m}\right)^{-1/2}. \qquad (17)$$

При этом (17) определено только для неотрицательных подкоренных выражений и обращается в нуль для других значений аргументов. Из условия $\int f d\vec{v} = \sigma$ получаем выражения для D и K. Окончательно имеем

$$f = \frac{\sigma_0\alpha_1\beta_1}{4\pi\alpha\beta}\left(1 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha^2}\frac{v_x^2}{2} - \frac{\beta_1^2}{\beta^2}\frac{v_y^2}{2} - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}\right)^{-1/2}. \qquad (18)$$

Зависимость α_1, β_1, ξ от α, β, σ_0 достаточно сложна и не получена в явном виде.

4. *Эллипсоид вращения и цилиндр эллиптического сечения.* Рассмотрим эллипсоид вращения однородной плотности ρ, уравнение поверхности которого есть

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\eta^2} = 1. \qquad (19)$$

Здесь ρ, α, η — произвольны.

Гравитационный потенциал внутри такого эллипсоида есть [12]

$$\Phi = a(x^2 + y^2) + cz^2 + \alpha,$$

$$a = \pi G\rho\left(1 - \frac{\alpha^2\eta}{2}J_3\right), \qquad \rho = nm,$$

$$c = \pi G\rho\alpha^2\eta J_3; \qquad J_3 = \int_0^\infty \frac{ds}{(\alpha^2 + s)(\eta^2 + s)^{3/2}}, \qquad (20)$$

$$d = -\pi G\rho\alpha^2\eta J_1; \qquad J_1 = \int_0^\infty ds/(\alpha^2 + s)(\eta^2 + s)^{1/2}.$$

В этом случае используем интегралы движения (4) и (6). Построим такое решение для эллипсоида вращения, в котором движение частиц вокруг оси симметрии происходит по окружности. При этом из уравнений движения каждой частицы следует, что

$$v_x^2 + v_y^2 = 2a(x^2 + y^2). \qquad (21)$$

Уравнение (21) удовлетворяется при следующих значениях v_x; v_y, соответствующих круговому вращению:

$$\begin{aligned} &1)\quad v_x = \sqrt{2ay} \qquad &2)\quad v_x = -\sqrt{2ay} \\ &\quad\;\; v_y = -\sqrt{2ax} \qquad &\quad\;\; v_y = \sqrt{2ax} \end{aligned} \tag{22}$$

Два случая (22) соответствуют вращению частиц в противоположных направлениях. Следовательно, в этом случае функция распределения состоит из двух членов, соответствующих вращению в разные стороны. Эти члены пропорциональны δ-функциям:

$$\begin{aligned} &1)\quad \varphi_1 = \delta(v_x - \sqrt{2ay})\,\delta(v_y + \sqrt{2ax}) \\ &2)\quad \varphi_2 = \delta(v_x + \sqrt{2ay})\,\delta(v_y - \sqrt{2ax}). \end{aligned} \tag{23}$$

Покажем, что сочетания δ-функций (23) можно получить из интегралов движения (4) и (6). Действительно, рассмотрим величины

$$\begin{aligned} F_1 &= \delta\left[\frac{1}{m}\left(E_x + E_y + 2\sqrt{\frac{a}{2}}\,L_z\right)\right] = \\ &= \delta\left[\frac{1}{2}(v_x - \sqrt{2ay})^2 + \frac{1}{2}(v_y + \sqrt{2ax})^2\right], \\ F_2 &= \delta\left[\frac{1}{m}\left(E_x + E_y - 2\sqrt{\frac{a}{2}}\,L_z\right)\right] = \\ &= \delta\left[\frac{1}{2}(v_x - \sqrt{2ay})^2 + \frac{1}{2}(v_y - \sqrt{2a}\,x)^2\right]. \end{aligned} \tag{24}$$

Функции $2\pi\varphi_1$ и F_1; $2\pi\varphi_2$ и F_2 тождественны в том смысле, что

$$\begin{aligned} 2\pi\int f(v_x, v_y)\,\varphi_1 dv_x dv_y &= \int f(v_x, v_y)\,F_1 dv_x dv_y. \\ 2\pi\int f(v_x, v_y)\,\varphi_2 dv_x dv_y &= \int f(v_x, v_y)\,F_2 dv_x dv_y. \end{aligned} \tag{25}$$

Поэтому φ_1 и φ_2 можно рассматривать как функции интегралов движения. Рассмотрим функцию распределения

$$\begin{aligned} f &= \gamma\left(D - \frac{E_z}{m} + k\frac{L_z}{m}\right)^{-1/2}\varphi_1 = \\ &= \gamma\left[D - \frac{v_z^2}{2} - cz^2 + k(xv_y - yv_x)\right]^{-1/2}\delta(v_x - \sqrt{2a}\,y)\,\delta(v_y + \sqrt{2a}\,x). \end{aligned} \tag{26}$$

При отрицательном подкоренном выражении функция распределения есть нуль. Имеем из условий нормировки

$$f_z = \int f dv_x dv_y = \gamma \left[D - \frac{v_z^2}{2} - cz^2 - k\sqrt{2a}\,(x^2 + y^2) \right]^{-1/2},$$

$$k = \frac{c}{\sqrt{2a}} \frac{\eta^2}{\alpha^2}, \qquad n = \int f_z dv_z = \pi\sqrt{2}\,\gamma, \qquad D = c\eta^2, \qquad \gamma = n/\pi\sqrt{2}\,. \tag{27}$$

Функция распределения (26) с условиями (27) есть точное решение кинетического уравнения, описывающее однородный эллипсоид вращения с вращающимися в одну сторону частицами. Момент количества движения P такого эллипсоида есть

$$P = P_0 = \frac{2}{5} M\alpha^2\sqrt{2a}.$$

Здесь угловая скорость вращения $\omega = \sqrt{2a}$, момент инерции $J = 2/5\, M\alpha^2$. Легко выписать решение для эллипсоида вращения с произвольным моментом количества движения $P < P_0$. Для этого нужно воспользоваться комбинацией двух функций (23) $(0 \leqslant \mu \leqslant 1)$

$$\begin{aligned} f = \frac{n}{\pi\sqrt{2}} \Bigg\{ \mu \Bigg[c(\eta^2 - z^2) - \frac{v_z^2}{2} + \\ + \frac{c}{\sqrt{2a}} \frac{\eta^2}{\alpha^2}(xv_y - yv_x) \Bigg]^{-1/2} \delta(v_x - \sqrt{2a}\,y)\,\delta(v_y + \sqrt{2a}\,x) \\ + (1-\mu) \Bigg[c(\eta^2 - z^2) - \frac{v_z^2}{2} - \\ - \frac{c}{\sqrt{2a}} \frac{\eta^2}{\alpha^2}(xv_y - yv_x) \Bigg]^{-1/2} \delta(v_x + \sqrt{2a}y)\,\delta(v_y - \sqrt{2a}x) \Bigg\}. \end{aligned} \tag{28}$$

При отрицательных подкоренных выражениях в (28) функция f есть нуль. Момент количества движения эллипсоида, даваемого (28), есть

$$P = 2\left(\mu - \frac{1}{2}\right) P_0.$$

При $\mu = 1/2$ имеем эллипсоид вращения произвольной степени сплющенности с нулевым моментом количества движения.

Вдоль каждой из осей движение частиц является периодическим. Но в силу несоизмеримости в общем случае периодов по всем трем осям траектории частиц незамкнуты и проекции траекторий на плоскости (xz) и (yz) представляют из себя незамкнутые фигуры Лиссажу. Проекцией траектории на плоскость (xy) является окружность.

Решение для цилиндра эллиптического сечения, с постоянной плотностью ρ, можно найти аналогично решению для эллиптического диска и для эллипсоида вращения. Если в сечении цилиндра лежит эллипс $x^2/\alpha^2 + y^2/\beta^2 = 1$, то потенциал внутри цилиндра (без нормировки на бесконечность) есть

$$\Phi = \frac{x^2}{\alpha_1^2} + \frac{y^2}{\beta_1^2},$$

$$\frac{1}{\alpha_1^2} = \pi G\rho\alpha\beta \int\limits_0^\infty \frac{ds}{(\alpha^2 - s)^{3/2}(\beta^2 + s)^{1/2}}, \tag{29}$$

$$\frac{1}{\beta_1^2} = \pi G\rho\alpha\beta \int\limits_0^\infty \frac{ds}{(\alpha^2 + s)^{1/2}(\beta^2 + s)^{3/2}}.$$

Тогда, используя интегралы движения (7) и условие нормировки, $\int f d\vec{v} = n$, можно записать решение в виде

$$f = G\delta\left(k - \frac{\alpha_1^2}{\alpha^2}E_x - \frac{\beta_1^2}{\beta^2}E_y\right)\Psi(v_z) = n\frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha\beta}\frac{1}{2\pi}\delta\left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - \right. \tag{30}$$
$$\left. - \frac{\alpha_1^2}{\alpha^2}\frac{v_x^2}{2} - \frac{\beta_1^2}{\beta^2}\frac{v_y^2}{2}\right)\Psi(v_z).$$

Здесь α, β, ρ — произвольны, а $\Psi(v_z)$ — произвольная функция, но такая, что $\int \Psi dv_z = 1$.

Отметим, что аналогичного точного решения для трехосного эллипсоида получить не удается ввиду расходимости интегралов, определяющих плотность.

Из (30) получаем точное решение для кругового цилиндра

$$f = \frac{1}{2\pi^2 Gmr_0^2}\delta\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} - \frac{v^2}{2\pi G\rho r_0^2}\right), \qquad \Phi = \pi G\rho(x^2 + y^2) + \xi,$$

где r_0 — радиус цилиндра, $r^2 = x^2 + y^2$, $v^2 = v_x^2 + v_y^2$.

5. *Выводы.* Получены решения бесстолкновительного кинетического уравнения с самосогласованным полем тяжести, обладающие малой степенью симметрии: эллиптический диск, цилиндр эллиптического сечения, эллипсоид вращения произвольной степени сплюснутости.

В найденных решениях отсутствует связь между степенью сплюснутости системы и ее моментом количества движения.

Решения могут быть использованы для построения моделей эллиптических и плоских галактик и для исследования неустойчивостей различных типов, в частности, неустойчивостей, ведущих к образованию спиральных рукавов у галактик.

Институт прикладной математики
АН СССР

THE MODELS OF CLUSTERS OF POINT MASSES WITH QUADRATIC POTENTIAL

G. S. BISNOVATY-KOGAN, Ya. B. ZELDOVICH

The motion of particles in their gravitational field is considered for the case of flattened, disk-like and other nonspherically symmetrical configurations.

The solutions of kinetic equation with a selfconsistent gravitational field are found for the quadratic gravitational potential. The exact solutions are found for the circular disk with anisotropic velocity distribution, the elliptical disk, the ellipsoid of rotation with arbitrary rotational momentum, including zero, and for the cylinder of the elliptical cross-section.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович*, Астрофизика, 5, 223, 1969.
2. *Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович*, Астрофизика, 5, 425, 1969.
3. *C. C. Lin, F. H. Shu*, Ap. J., 140, 646, 1964.
4. *P. A. Sweet*, M. N., 125, 285, 1963.
5. *D. Lynden-Bell*, M. N., 124, 279, 1962.
6. *C. S. Wu*, Phys. Fluids, 11, 545, 1968.
7. *Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович, Р. З. Сагдеев, А. М. Фридман*, Ж. прикл. матем. техн. физ., № 3, 1969.
8. *Л. С. Марочник, А. А. Сучков*, Астрон. ж., 46, 319, 1969.
9. *В. А. Антонов*, Вестн. ЛГУ, № 19, 96, 1962.
10. *Я. Б. Зельдович*, Препринт ИПМ, № 48, 1969; Astronomy and Ap. 5, 84, 1970.
11. *C. Hunter*, M. N., 123, 299, 1963.
12. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Теория поля, Наука, М., 1967.