ОБ УРАВНЕНИИ ДЛЯ ФАЗОВОЙ ПЛОТНОСТИ В СИСТЕМЕ ГРАВИТИРУЮЩИХ ТОЧЕК

Эволюция звездной системы в регулярном самосогласованном гравитационном поле описывается уравнениями Больцмана-Лиувилля и Пуассона

$$\frac{\partial f}{\partial t}+v\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial v}=0, \tag{1}$$

$$\nabla^2\psi=4\pi Gm\int f\,dv, \tag{2}$$

$$f(r, v, 0)=f_0(r, v), \tag{3}$$

где $f(r, v, t)$ — фазовая плотность, $\psi(r, t)$ — гравитационный потенциал, m — масса звезды и $f_0(r, v)$ — заданная функция.

То обстоятельство, что уравнения (1) и (2) являются уравнениями в частных производных, значительно затрудняет проведение как аналитического, так и численного анализа. Поэтому было бы желательным получение интегрального кинетического уравнения. В настоящей заметке выводится интегральное уравнение для трансформанты Фурье фазовой плотности.

Введем обозначение

$$F(s, u, t)=\int\int e^{isr+iuv}f(r, v, t)\,dr\,dv \tag{4}$$

и применим преобразование Фурье к уравнению (1). Учитывая, что

$$\int e^{isr}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}dr\int e^{iuv}f(r, v, t)\,dv=$$

$$=\int e^{isr}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}dr\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{-i\sigma r}F(\sigma, u, t)\,d\sigma= \tag{5}$$

$$=-\frac{i}{(2\pi)^3}\int F(\sigma, u, t)(s_k-\sigma_k)\,\Psi(s-\sigma, t)\,d\sigma, \quad (k=1, 2, 3),$$

где

$$\Psi(s, t)=\int e^{isr}\psi(r, t)\,dr, \tag{6}$$

находим

$$\frac{\partial F}{\partial t}-s\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{1}{(2\pi)^3}\int F(s-\sigma, u, t)\,\Psi(\sigma, t)\,u\cdot\sigma\,d\sigma=0. \tag{7}$$

Преобразование Фурье потенциала можно выразить при помощи уравнения Пуассона через функцию F. Из (2) получаем (см., например, [1], стр. 163)

$$\Psi(s, t) = -\frac{4\pi Gm}{s^2} F(s, 0, t). \tag{8}$$

Подставляя это выражение в (7), приходим к уравнению, которое содержит только $F(s, u, t)$:

$$\frac{\partial F(s, u, t)}{\partial t} - s\frac{\partial F(s, u, t)}{\partial u} = \frac{Gm}{2\pi^2}\int F(s-\sigma, u, t) \times$$
$$\times F(\sigma, 0, t) u \cdot \sigma \frac{d\sigma}{\sigma^2}, \tag{9}$$

причем

$$F(s, u, 0) = \int\int e^{isr+iuv} f_0(r, v)\, dr\, dv \equiv F_0(s, u) \tag{10}$$

является заданной функцией.

Интегро-дифференциальное уравнение (9) соответствует уравнениям (1) и (2) для фазовой плотности. Формальное интегрирование (9) с учетом начального условия (10) приводит к искомому интегральному уравнению

$$F(s, u, t) = F_0(s, u + st) +$$
$$+ \frac{Gm}{2\pi^2}\int_0^t d\tau \int F(s-\sigma, u + s(t-\tau), \tau) \times \tag{11}$$
$$\times F(\sigma, 0, \tau)\,[u + s(t-\tau)]\,\sigma \frac{d\sigma}{\sigma^2}.$$

Если функция $F(s, u, t)$ известна, то фазовая плотность находится путем обращения преобразования Фурье

$$f(r, v, t) = \frac{1}{(2\pi)^6}\int\int e^{-isr-iuv} F(s, u, t)\, ds\, du. \tag{12}$$

Следует, однако, иметь в виду, что ряд интегральных характеристик звездной системы можно найти при помощи F, не пользуясь формулой обращения. Приведем некоторые наиболее важные соотношения. Как нетрудно показать, число звезд N в системе, полная кинетическая энергия T, полная потенциальная энергия U, момент инерции J и импульс P определяются следующими формулами:

$$N = F(0,\ 0,\ t), \quad T = -\frac{m}{2} \nabla^2 F(0,\ u,\ t)\Big|_{u=0},$$

$$P = -im\frac{\partial F(0,\ u,\ t)}{\partial u}\Big|_{u=0}, \quad U = -\frac{Gm^2}{4\pi^2}\int \Big| F(s,\ 0,\ t)\Big|^2 \frac{ds}{s^2}, \quad (13)$$

$$J = -m\nabla^2 F(s,\ 0,\ t)|_{s=0}.$$

Компоненты полного момента импульса L равны

$$L_i = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial s_k \partial u_j} - \frac{\partial^2 F}{\partial s_j \partial u_k}\right]_{s=u=0}, \quad (14)$$

где $(i,\ j,\ k)$ — циклическая перестановка чисел 1, 2, 3.

Дифференцируя надлежащим образом уравнение (9), можно показать, что в системе выполняются законы сохранения числа звезд, полной энергии, импульса и момента импульса. Кроме того, из (9) следует соотношение

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 J}{dt^2} = 2T + U, \quad (15)$$

обычно называемое уравнением вириала.

Обратимся к рассмотрению стационарного состояния звездной системы. Обозначим фазовую плотность в стационарном состоянии через $f(r,\ v)$, а ее преобразование Фурье — через $F(s,\ u)$.

Как видно из (9), функция $F(s,\ u)$ удовлетворяет уравнению

$$s\frac{\partial F(s,\ u)}{\partial u} = -\frac{Gm}{2\pi^2}\int F(s-\sigma,\ u)F(\sigma,\ 0)\,u\cdot\sigma\frac{d\sigma}{\sigma^2}. \quad (16)$$

Соответствующее интегральное уравнение проще всего получить следующим образом. Возьмем в качестве начального состояния звездной системы стационарное состояние

$$F_0(s,\ u) = F(s,\ u). \quad (17)$$

Тогда, в соответствии с определением стационарного состояния, должно быть

$$F(s,\ u,\ t) = F(s,\ u) \quad (18)$$

для всех t. Подставляя (17) и (18) в уравнение (11), находим

$$F(s, u) = F(s, u + st) + \frac{Gm}{2\pi^2}\int_0^t d\tau \int F(s - \sigma, u + s\tau) \times$$
$$\times F(\sigma, 0)(u + s\tau)\,\sigma\frac{d\sigma}{\sigma^2}. \tag{19}$$

Таким образом, функция $F(s, u)$ должна определяться из уравнений (16) или (19).

Рассмотрим теперь интегральное уравнение (11). Это уравнение связывает значения функции F в некоторый момент времени с ее значениями в предыдущие моменты времени. Поэтому значения F можно последовательно найти для всех t, то есть изучить эволюцию звездной системы с течением времени.

Практически это можно сделать при помощи следующего известного способа. Выберем дискретный набор значений $t: t_0 = 0, t_1, \cdots, t_n \cdots$ и заменим интеграл по τ в правой части (11) квадратурной суммой по формуле

$$\int_0^{t_n} \varphi(\tau)\, d\tau = \sum_{j=0}^{n-1} A_j^{(n)} \varphi(t_j), \tag{20}$$

где $A_j^{(n)}$ — соответствующие весовые коэффициенты. Полагая в уравнении (11) $t = t_n$, получаем систему рекуррентных соотношений

$$F(s, u, t_n) = F_0(s, u + st_n) +$$
$$+ \frac{Gm}{2\pi^2}\sum_{j=0}^{n-1} A_j^{(n)} \int F(s - \sigma, u + s(t_n - t_j), t_j) \times \tag{21}$$
$$\times F(\sigma, 0, t_j)\,[u + s(t_n - t_j)]\,\sigma\frac{d\sigma}{\sigma^2}, \qquad (n = 0, 1, \cdots),$$

из которой последовательно находятся $F(s, u, t_1)$, $F(s, u, t_2)$ и т. д. Если нас интересуют значения F лишь для одного какого-либо момента времени, то уравнение (11) можно решить способом итераций.

Обычно применяемые в настоящее время численные методы расчета эволюции звездных систем связаны с интегрированием уравнений движения в системе N гравитирующих тел; необходимое при этом для расчетов время быстро возрастает с ростом N. Предложенный выше метод связан с вычислением определенных интегралов, причем число звезд в системе не играет роли. Необходимо отметить также, что в том случае, когда система обладает определенной симметрией, уравнение (11) значительно упрощается.

On equation for the phase density in a system of gravitating particles. The differential and integral equations for the Fourier-transform of the phase density is found. The numerical method of the solution of the basic integral equation is discussed.

13 января 1970
Бюраканская астрофизическая обсерватория

В. Ю. ТЕРЕБИЖ

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. С. Владимиров*, Уравнения математической физики, Наука, М., 1967.

ОЦЕНКИ БЛЕСКА ИЗБРАННЫХ ГАЛАКТИК МАРКАРЯНА

В 1967—69 годах Б. Е. Маркарян опубликовал два списка открытых им галактик с ультрафиолетовым континуумом в спектре [1, 2]. В настоящей работе приводятся фотоэлектрические оценки блеска и цвета для двадцати объектов из второго списка Б. Е. Маркаряна [2], большинство из которых обнаруживают эмиссии в видимой части спектра [3]. Фотоэлектрические измерения галактик Маркаряна делались ранее Д. В. Видманом и Э. Е. Хачикяном [4, 5].

Наблюдения проводились в ноябре 1969 года с помощью 125-*см* рефлектора Крымской станции ГАИШ. В качестве приемника излучения использовался электрофотометр В. М. Лютого [6] с английским фотоумножителем EMI, работающий в схеме счета импульсов. Измерения велись дифференциальным способом относительно звезд с известными внеатмосферными величинами; коэффициенты прозрачности определялись каждую ночь. Все наблюдения проведены с круглыми концентрическими диафрагмами диаметром 10 и 25 *секунд дуги*. Для окончательной обработки отобраны результаты четырех ночей (5/6, 11/12, 13/14 и 15/16 ноября) с хорошими атмосферными условиями, с турбулентным диском не более 1—1.5 *сек*.

Результаты измерений приведены в нижеследующей таблице, которая содержит номера галактик согласно Б. Е. Маркаряну [2], величину диафрагмы фотометра, блеск и цвет галактики, среднюю квадратичную ошибку и число проведенных оценок. Каждая оценка состоит из трех—десяти индивидуальных отсчетов. В таблице первая строка V,