

ПЕРИОДЫ ПУЛЬСАЦИЙ ВРАЩАЮЩИХСЯ БЕЛЫХ
КАРЛИКОВ ВБЛИЗИ ЧАНДРАСЕКАРОВСКОГО ПРЕДЕЛА

В. С. ИМШЕННИК, Э. Ф. СЕИДОВ

Поступила 16 сентября 1969

Пересмотрена 3 января 1970

При помощи простого энергетического метода рассчитаны периоды радиальных пульсаций холодных, однородно вращающихся белых карликов вблизи чандрасекаровского предела. В частности, определены минимальные периоды пульсаций. Показано, что твердотельное вращение, близкое к предельно возможному, приводит к снижению минимального периода пульсаций больше, чем в три раза (от ~ 1.8 сек до ~ 0.5 сек). В расчетах принято уравнение состояния Чандрасекара и учтены поправки ОТО.

Открытие пульсаров [1] повысило интерес к пульсационным свойствам очень плотных звезд. Хотя пульсары, как сейчас представляется [2, 3], связаны скорее с нейтронными звездами, все же интересен вопрос о минимальном периоде пульсаций белых карликов и, в частности, о влиянии вращения на его величину.

Расчет периодов пульсаций белых карликов при учете вращения в строгой постановке является весьма сложной задачей. В случае твердотельного вращения путем трудоемких вычислений построен ряд моделей вблизи чандрасекаровского предела [4—9]. В данной заметке мы с помощью энергетического метода [10] найдем зависимость массы белого карлика от его центральной плотности с учетом твердотельного вращения вблизи предела гидродинамической устойчивости. Затем установим периоды пульсаций этих конфигураций, опять-таки используя энергетический метод [11, 12] и варьируя угловую скорость вращения вплоть до предельно большой. В заключение проведем краткое сравнение с результатами других авторов.

В уравнении состояния вещества белого карлика учтем первую поправку к ультрарелятивистскому выражению, а в гравитационной

энергии — первую и вторую поправки на ОТО [10]. Для распределения плотности по звезде примем политропу $n = 3$, что асимптотически точно на пределе гидродинамической устойчивости.

При таких предположениях полная энергия конфигурации имеет вид

$$E = 0.584 a M \rho_c^{1/3} + 2.14 b M \rho_c^{-1/3} - 0.639 G M^{5/3} \rho_c^{1/3} - 0.93 G^2 c^{-2} M^{7/3} \rho_c^{2/3} + 1.20 K^2 M^{-5/3} \rho_c^{2/3} - G^3 c^{-4} M^3 \rho_c, \quad (1)$$

где

$$a = 3.74 \cdot 10^{15} \mu^{-4/3}, \quad b = 3.67 \cdot 10^{19} \mu^{-2/3}. \quad (2)$$

Здесь M — масса звезды, ρ_c — центральная плотность, K — полный момент вращения, G — гравитационная постоянная, c — скорость света, μ — молекулярный вес на один электрон (в дальнейшем принимаем $\mu = 2$). Все величины даны в единицах CGS. Равновесная конфигурация массы M определяется экстремумом $E(\rho_c)$: $\left(\frac{\partial E}{\partial \rho_c}\right)_{M, K} = 0$, то есть

$$0.584 a M - 2.14 b M \rho_c^{-2/3} - 0.639 G M^{5/3} - 1.86 G^2 c^{-2} M^{7/3} \rho_c^{1/3} + 2.40 K^2 M^{-5/3} \rho_c^{1/3} - 3 G^3 c^{-4} M^3 \rho_c^{2/3} = 0. \quad (3)$$

Момент вращения с угловой скоростью Ω равен

$$K = 2\pi\Omega \int_0^R \rho r^4 dr \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{2}{3} \Omega 4\pi \int_0^R \rho r^4 dr = \frac{2}{3} \Omega I, \quad (4)$$

где θ — полярный угол, R — радиус звезды, I — центральный момент инерции

$$I = 0.622 M^{5/3} \rho_c^{-2/3}. \quad (5)$$

Предельно быстрое вращение определяется из условия

$$\frac{GM}{R^2} = \frac{v_{\text{эк}}^2}{R} = \Omega_{\text{max}}^2 R, \quad (6)$$

где $v_{\text{эк}}$ — линейная скорость вращения на экваторе. Отсюда, используя выражение для средней плотности $\bar{\rho} = \frac{\rho_c}{54.2}$, выразим Ω_{max} через ρ_c и с помощью (4), (5) получим для максимального при данной конфигурации момента вращения:

$$K_{\max}^2 = 1.34 \cdot 10^{-2} GM^{10/3} \rho_c^{-1/3}. \quad (7)$$

Если угловая скорость составляет долю s от предельно большой для данной конфигурации

$$\Omega = s \Omega_{\max}, \quad s \leq 1, \quad (8)$$

то, согласно (4),

$$K = s K_{\max}. \quad (9)$$

Величину s примем в последующем расчете в качестве безразмерного параметра, характеризующего степень вращения модели.

Квадрат частоты основного тона радиальных пульсаций ω , согласно энергетическому методу [11, 12], определяется выражением:

$$\omega^2 = \frac{2.14 b M \rho_c^{-1/3} - 0.93 G^3 c^2 M^{7/3} \rho_c^{2/3} + 1.20 K^3 M^{-5/3} \rho_c^{2/3} - 3G^3 c^{-4} M^3 \rho_c}{0.31 M^{5/3} \rho_c^{-2/3}}. \quad (10)$$

Легко проверить, что обращение в нуль числителя правой части соотношения (10) соответствует известному условию чандрасекаровского

предела — обращению в нуль величины $\left(\frac{\partial^3 E}{\partial \rho_c^2}\right)_{M,K}$ [10].

Результаты расчетов по формулам (3), (7), (9), (10) для различных значений параметра s показаны на рис. 1, 2 и в табл. 1, 2. Наибольшее значение центральной плотности ρ_c при фиксированном значении s соответствует чандрасекаровскому пределу. С увеличением s для критического состояния растут как масса, так и центральная плотность, причем особенно сильно растет критическая плотность. Обратим внимание, что на кривой $M(\rho_c)_{\text{const}}$ (рис. 1) предельная масса конфигураций не является максимальной, в особенности для больших значений параметра s ($s = 0.6; 0.8$).

На рис. 2 показаны графики круговой частоты пульсаций ω для рассчитанных конфигураций. Минимальные периоды пульсаций $T_{\min} = 2\pi/\omega_{\max}$ даны в табл. 2. За счет твердотельного вращения минимальный период пульсаций может понизиться более чем в три раза. Заметим, что во всех соотношениях принималась во внимание вторая поправка ОТО, пропорциональная G^3 . Это делалось с целью контроля за сходимостью использованного разложения по G . В ходе расчета показано, что вторая поправка ОТО составляла от первой поправки самое большее 1%. Учет второй поправки повышает центральную плотность чандрасекаровского предела всего на 1—3%. Изменение (уменьшение) массы совсем ничтожно.

Заметим, что решение уравнения (3) путем разложения по малому изменению массы конфигурации от чандрасекаровского предела с учетом только лишь первого члена разложения (линейное приближение) дает практически те же численные результаты, что и непосредственное решение этого алгебраического уравнения, изображенное на рис. 1.

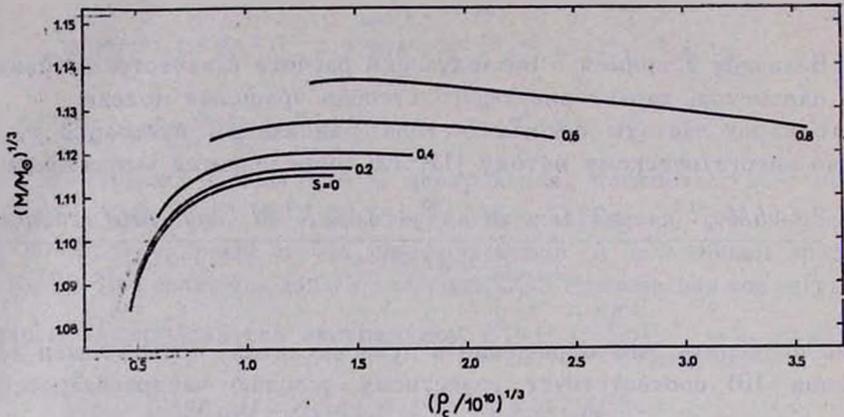


Рис. 1. Зависимости величины $(M/M_{\odot})^{1/3}$ от величины $(\rho_c/10^{10})^{1/3}$ для различных степеней вращения холодных белых карликов. (M — масса модели в г , ρ_c — центральная плотность в $\text{г}/\text{см}^3$). Крайние правые точки всех графиков соответствуют критическим параметрам модели.

Таблица 1

КРИТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ОДНОРОДНО ВРАЩАЮЩИХСЯ ХОЛОДНЫХ БЕЛЫХ КАРЛИКОВ С УЧЕТОМ ОТО

s	0	0.2	0.4	0.6	0.8
$\frac{M_{\text{пр}}}{M_{\odot}}$	1.386	1.394	1.404	1.420	1.428
$\frac{\rho_c}{10^{10} \text{ г}/\text{см}^3}$	2.81	3.31	5.36	13.5	44.7

Наконец, легко показать, что отношение вращательной энергии к ньютоновской гравитационной энергии не зависит от M и ρ_c , а определяется только параметром s :

$$\frac{E_{\text{вращ.}}}{E_{\text{грав}}} = \frac{1.20 K^2 M^{-5/3} \rho_c^{2/3}}{0.639 G M^{5/3} \rho_c^{1/3}} = 2.52 \cdot 10^{-2} s^2. \quad (12)$$

Даже в случае предельно быстрого вращения ($s = 1$) это отношение не превышает нескольких процентов. Тем не менее параметры

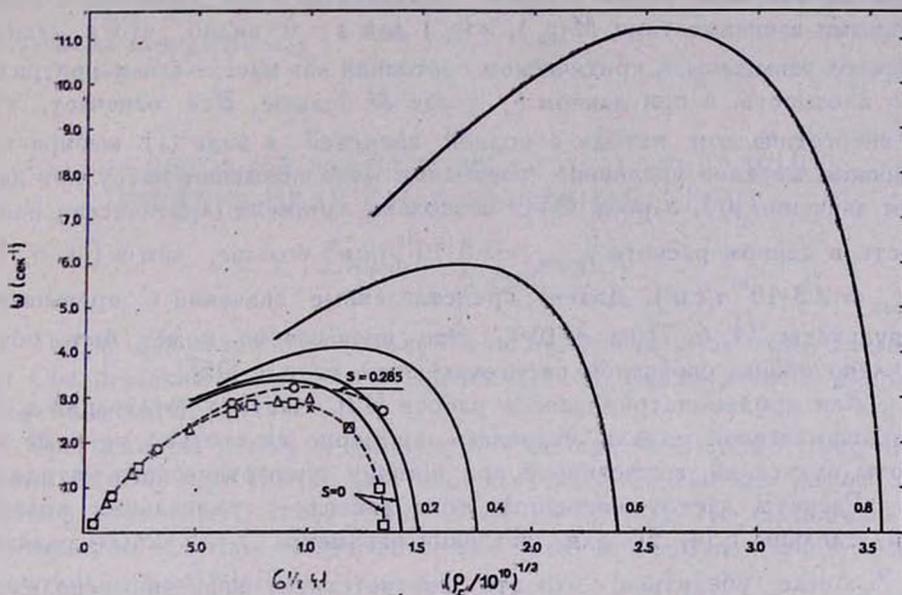


Рис. 2. Круговые частоты радиальных пульсаций (основной тон) холодных белых карликов ω (в сек^{-1} в зависимости от величины $(\rho_c / 10^{10})^{1/2}$ для различных степеней вращения (сплошные кривые). Пунктирные кривые описывают результаты других авторов. Рассчитанные модели изображены значками:

○ — [4], $s = 0.285$; × — [7], $s = 0$; □ — [4], Δ — [6], $s = 0$; $s = 0$.

Таблица 2
МИНИМАЛЬНЫЕ ПЕРИОДЫ РАДИАЛЬНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ ХОЛОДНЫХ БЕЛЫХ КАРЛИКОВ С РАЗЛИЧНОЙ СТЕПЕНЬЮ ВРАЩЕНИЯ

s	0	0.2	0.4	0.6	0.8
$T_{\min} = \frac{2\pi}{\omega_{\max}}$	1.83	1.76	1.51	1.05	0.552

чандрасекаровского предела (особенно центральная плотность ρ_c) и периоды пульсаций изменяются заметным образом.

Для сравнения на рис. 2 показаны также результаты расчетов других авторов. Нижняя штриховая линия проведена согласно работам [4, 6, 7], в которых путем решения с учетом ОТО уравнений малых колебаний вокруг положения равновесия [13, 14] вычислены частоты радиальных колебаний невращающихся белых карликов. Во всех трех работах получены очень близкие результаты. При сравнении с полученными зависимостями $M(\rho_c)$, $\omega(\rho_c)$ для $s=0$ видно, что в данном расчете завышены в критическом состоянии как масса, так и центральная плотность, и при данном ρ_c у нас M больше. Это означает, что в энергетическом методе с полной энергией в виде (1) выбирается слишком жесткое уравнение состояния (это повышает массу при данном значении ρ_c), а роль ОТО несколько занижена (критическая плотность в данном расчете $\rho_{c_{\max}} = 2.8 \cdot 10^{10} \text{ г/см}^3$ больше, чем в [4, 6, 7] $\rho_{c_{\max}} = 2.3 \cdot 10^{10} \text{ г/см}^3$). Далее, представленные значения ω превышают результаты [4, 6, 7] на $\sim 10\%$. Это превышение может быть обусловлено общим свойством энергетического метода [15].

Как продемонстрировано в работе [12], частота пульсаций в гидродинамической модели оказалась примерно на столько же ниже частоты пульсаций, вычисленной при помощи энергетического метода.

Расчеты частот основного тона (псевдо-) радиальных колебаний сделаны в [4, 5] для значения параметра $\beta = \Omega^2/2\pi G\rho_c$ равного 10^{-3} . Легко убедиться, что это соответствует значению используемого нами параметра $s = 0.285$.

Результаты показаны на рис. 2 (верхняя штриховая линия). Опять-таки разница составляет около 10% .

В заключение—несколько слов о дифференциальном вращении. Как показано в [9, 16], в этом случае возможны устойчивые состояния холодных белых карликов с массами, значительно превышающими чандрасекаровский предел в отсутствие вращения. Дифференциальное вращение приводит к значительному уменьшению периода радиальных пульсаций белых карликов по сравнению с твердотельным вращением.

Представленное нами рассмотрение, конечно, просто распространить на любой закон вращения модели, отличный от твердотельного. При этом изменится связь энергии вращения с моментом вращения, использованная в (1), и все другие соотношения, относящиеся к вращению (4), (8). Однако в общем случае линейная скорость вращения v_φ может быть функцией только расстояния от оси, так как в противном случае нарушается гидростатическое равновесие [12].

Авторы выражают глубокую благодарность академику Я. Б. Зельдовичу, Г. С. Бисноватому-Когану за полезные обсуждения, а также Н. Е. Васильевой и М. И. Кондрашовой за проведение расчетов на ЭВМ.

Институт прикладной математики
АН СССР
Шемахинская астрофизическая
обсерватория

THE PERIODS OF PULSATIONS OF ROTATING WHITE DWARFS NEAR CHANDRASEKHAR'S LIMIT

V. S. IMSHENNIK, Z. F. SEYIDOV

The periods of radial pulsations of cold uniform rotating white dwarfs near Chandrasekhar's limit are calculated with the help of a simple energetic method.

The minimum period of pulsations is defined. It is shown, that the uniform rotation near the possible limit decreases the minimum period of pulsations more than 3 times (from 1.8 sec to 0.5 sec). The Chandrasekhar equation of state is adopted and G-R corrections taken into account in the calculations.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. A. Hewish et al., Nature, 217, 709, 1968.
2. T. Gold, Nature, 217, 1227, 1968.
3. В. А. Гинзбург, В. В. Железняков, В. В. Зайцев, препринт ФИАН СССР, № 14, 1969.
4. I. W. Roxburgh, B. R. Durney, Z. Astrophys., 64, 504, 1966.
5. B. R. Durney et al., Nature, 218, 20, 1968.
6. J. Faulkner, J. R. Gribbin, Nature, 218, 734, 1968.
7. J. Skilling, Nature, 218, 923, 1968.
8. J. P. Ostriker, J. L. Tassoul, Nature, 219, 577, 1968.
9. J. P. Ostriker, J. L. Tassoul, Ap. J., 155, 987, 1969.
10. Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, Релятивистская астрофизика, Наука, М., 1967.
11. Я. Б. Зельдович, Астрон. ж., 45, 913, 1968.
12. В. Ф. Дьяченко и др., Астрофизика, 4, 159, 1968.
13. S. Chandrasekhar, Ap. J., 140, 417, 1964.
14. Дж. Уилер, Теория гравитации и гравитационный коллапс, Мир, М., 1967.
15. P. Ledoux, C. L. Pekeris, Ap. J., 94, 124, 1941.
16. J. P. Ostriker, P. Bodenheimer, Ap. J., 151, 1089, 1968.