АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 6 ФЕВРАЛЬ, 1970 ВЫПУСК 1

# РАССЕЯНИЕ СВЕТА В СРЕДЕ С ДВИЖУЩЕЙСЯ ГРАНИЦЕЙ

В. В. ЛЕОНОВ

Поступила 30 января 1969
Пересмотрена 19 июня 1969

Рассмотрена задача о рассеянии света в одномерной полубесконечной среде с движущейся границей. Получено дифференциальное уравнение для вероятности выхода кванта из среды при произвольных $t_1$ и $t_2$. Найдены точные выражения для вероятности выхода и вероятности отражения кванта от среды в случае $t_2 \gg t_1$.

В нашей предыдущей статье [1] была рассмотрена задача о свечении одномерной полубесконечной среды с движущейся границей. При этом считалось, что среднее время, затрачиваемое квантом непосредственно на элементарный акт рассеяния $t_1$, значительно превосходит среднюю величину промежутка времени, проводимого квантом в пути между двумя последовательными рассеяниями $t_2$.

В предлагаемой статье обсуждается случай, когда величины $t_1$ и $t_2$ сравнимы между собой и найдено точное решение указанной выше задачи для случая $t_2 \gg t_1$.

1. *Основные уравнения. Общий случай.* Обозначим через $p(\tau, u)\,du$ вероятность того, что квант света, поглощенный на оптической глубине $\tau$ в момент времени $u = 0$, выйдет из среды в промежутке времени от $u$ до $u + du$, где безразмерное время $u = \dfrac{t}{t_1 + t_2}$. При этом оптическая глубина отсчитывается от положения границы в момент поглощения кванта. В первом разделе статьи мы запишем и обсудим уравнение для $p(\tau, u)$ при произвольных $t_1$ и $t_2$. Затем получим решение для случая $t_2 \gg t_1$.

Введем безразмерную скорость движения границы

$$v = \frac{d\tau}{du} = \frac{(t_1 + t_2)\,\alpha\, dS}{dt} = \frac{t_1 + t_2}{t_2}\,\frac{V}{c}, \tag{1}$$

где $V=\frac{dS}{dt}$ — геометрическая скорость движения границы. При получении (1) учтено, что $t_2=\frac{1}{\alpha c}$, где $\alpha$ — объемный коэффициент поглощения, $c$ — скорость света. Из (1) видно, что $|v|\leqslant\frac{t_1+t_2}{t_2}$. Если граница движется внутрь среды, скорость считается положительной; в случае движения границы от среды скорость отрицательна.

Интегральное уравнение для $p(\tau, u)$ при произвольных $t_1$ и $t_2$ было получено в [2]. Если граница движется внутрь среды, уравнение имеет различный вид для $\tau<uv$ и $\tau>uv$. При $\tau\geqslant uv$ уравнение записывается так:

$$p(\tau, u)=\frac{\lambda}{2}e^{-(\tau-uv)-\frac{u-\beta_2(\tau-uv)}{\beta_1}}+$$
$$+\frac{\lambda}{2}\int\limits_{\frac{v\tau\beta_2}{1+v\beta_2}}^{\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\beta_2}+\tau+uv\right)}e^{-|\tau-\tau'|}d\tau'\int\limits_{\beta_2|\tau-\tau'|}^{u-\beta_2(\tau'-uv)}e^{-\frac{u'-\beta_2|\tau-\tau'|}{\beta_1}}p(\tau'-u'v,\ u-u')\frac{du'}{\beta_1}, \tag{2}$$

при $\tau\leqslant uv$ оно имеет вид

$$p(\tau, u)=\frac{\lambda}{2}e^{-\frac{u}{\beta_1}}+\frac{\lambda}{2}\int\limits_{\frac{v\tau\beta_2}{1+v\beta_2}}^{\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\beta_2}+\tau+uv\right)}e^{-|\tau-\tau'|}d\tau'\int\limits_{\beta_2|\tau-\tau'|}^{u-\beta_2(\tau'-uv)}e^{-\frac{u'-\beta_2|\tau-\tau'|}{\beta_1}}\times$$
$$\times p(\tau'-u'v,\ u-u')\frac{du'}{\beta_1}+\frac{\lambda}{2}\int\limits_{\tau}^{\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\beta_2}-\frac{\tau}{v\beta_2}+\tau+uv\right)}e^{-\tau'+\tau}d\tau'\int\limits_{\frac{\tau}{v}}^{u(1+v\beta_2)}e^{-\frac{u'}{\beta_1}}\times \tag{3}$$
$$\times p(\tau'-v(u'+\beta_2(\tau'-\tau)),\ u-u'-\beta_2(\tau'-\tau))\frac{du'}{\beta_1},$$

где $\lambda$ — вероятность выживания кванта при элементарном акте рассеяния, $\beta_1=\frac{t_1}{t_1+t_2}$, $\beta_2=\frac{t_2}{t_1+t_2}$. В том случае, когда граница движется от среды $(v\leqslant 0)$, $p(\tau, u)$ определяется уравнением (2). Заметим, что из-за конечности скорости света функция $p(\tau, u) = 0$ при $u < \frac{\tau\beta_2}{1+v\beta_2}$.

Из (2), (3) следует, что для любых $\tau$ и $u$ функция $p(\tau, u)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\left(1+\beta_1 \frac{\partial}{\partial u} + v\beta_1 \frac{\partial}{\partial \tau}\right)\left[\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \left(1+\beta_2 \frac{\partial}{\partial u} + v\beta_2 \frac{\partial}{\partial \tau}\right)^2\right] p(\tau, u) +$$
$$+ \lambda\left(1+\beta_2 \frac{\partial}{\partial u} + v\beta_2 \frac{\partial}{\partial \tau}\right) p(\tau, u) = 0. \tag{4}$$

Граничные и начальные условия для случаев $\tau > uv$ и $\tau < uv$ могут быть получены из (2) или (3) соответственно. Разумеется, при $v = 0$ (2) и (4) переходят в соответствующие уравнения для случая полубесконечной стационарной среды, найденные В. В. Соболевым [3].

Применив к (2)—(3) преобразование Лапласа, получим интегральное уравнение для $\bar{p}(\tau, s)$

$$\bar{p}(\tau, s) = \frac{\lambda}{2} \frac{e^{-\frac{1+s\beta_2}{1+v\beta_2}\tau}}{1+s\beta_1 - v\beta_1 + v\beta_2} - \frac{\lambda v}{2} \frac{(\beta_1-\beta_2)\, e^{-\frac{1+v\beta_1}{v\beta_1}\tau}}{(1+s\beta_1)(1+s\beta_1 - v\beta_1 + v\beta_2)} +$$
$$+ \frac{\lambda}{2(1+s\beta_1+v\beta_1+v\beta_2)} \int_0^{\tau} e^{-\frac{1+s\beta_2}{1+v\beta_2}(\tau-\tau')} \bar{p}(\tau', s)\, d\tau' +$$
$$+ \frac{\lambda}{2(1+s\beta_1-v\beta_1-v\beta_2)} \int_{\tau}^{\infty} e^{-\frac{1+s\beta_2}{1-v\beta_2}(\tau'-\tau)} \bar{p}(\tau', s)\, d\tau' - \tag{5}$$
$$- \frac{\lambda v(\beta_1-\beta_2)}{(1+s\beta_1)^2 - v^2(\beta_1-\beta_2)^2} \int_0^{\tau} e^{-\frac{1+s\beta_1}{v\beta_1}(\tau-\tau')} \bar{p}(\tau', s)\, d\tau' +$$
$$+ \frac{\lambda v(\beta_1-\beta_2)}{(1+s\beta_1)(1+s\beta_1+v\beta_1-v\beta_2)} e^{-\frac{1+s\beta_1}{v\beta_1}\tau} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1+s\beta_2}{1-v\beta_2}\tau'} \bar{p}(\tau', s)\, d\tau',$$

где

$$\bar{p}(\tau, s) = \int_0^{\infty} e^{-su} p(\tau, u)\, du. \tag{6}$$

Обозначим через

$$P(\tau) = \int\limits_{\frac{\tau\beta_2}{1+v\beta_2}}^{\infty} p(\tau, u)\, du \tag{7}$$

полную вероятность выхода кванта, поглощенного на глубине $\tau$. Тогда на основании известного свойства преобразования Лапласа, согласно которому

$$\bar{p}(\tau, 0) = P(\tau), \tag{8}$$

из (5) получим интегральное уравнение для $P(\tau)$. Решение его известно. Явный вид функции $P(\tau)$ ранее был найден в [2].

Выше для краткости мы не указывали, что полная вероятность выхода кванта из среды с движущейся границей зависит от $\tau$, $\lambda$, $v\beta_1$, $v\beta_2$. Сравнивая уравнение для $P(\tau, \lambda, v\beta_1, v\beta_2)$ с (5), можно заметить, что

$$\bar{p}(\tau, s) = P\left\{\tau(1 + s\beta_2),\ \frac{\lambda}{(1 + s\beta_1)(1 + s\beta_2)},\ v\beta_1\frac{1 + s\beta_2}{1 + s\beta_1},\ v\beta_2\right\}. \tag{9}$$

Таким образом, выполнив в решении уравнения для $P(\tau)$ замены (9), получим точное выражение для лапласовского изображения функции $\bar{p}(\tau, s)$. Это относится и к другим функциям, выражающимся через $P(\tau)$. При $v = 0$ (9) переходит в соотношение, найденное И. Н. Мининым для случая стационарной среды [4].

Отметим, что если $\bar{p}(\tau, s)$ известно, то для нахождения функции

$$Z(\tau) = \int\limits_{\frac{\tau\beta_2}{1+v\beta_2}}^{\infty} p(\tau, u)\, u\, du, \tag{10}$$

служащей для определения среднего времени пребывания в среде квантов, излученных на глубине $\tau$

$$\bar{u}(\tau) = \frac{Z(\tau)}{P(\tau)}, \tag{11}$$

нет необходимости в составлении и решении соответствующего уравнения, поскольку

$$Z(\tau) = -\left.\frac{\partial \bar{p}(\tau, s)}{\partial s}\right|_{s=0}. \tag{12}$$

2. *Случай* $t_1 = 0$. *Функция* $p(\tau, u)$. Этот случай описывается интегральным уравнением (2), где $\beta_1$ следует положить нулю, а $\beta_2$ — равным единице. Проинтегрировав это уравнение по $u$, получим интегральное уравнение для $P(\tau)$. Решение его известно [5] и имеет такой вид:

$$P(\tau) = [1 - k(1 + v)]\, e^{-k\tau}, \tag{13}$$

где

$$k = \frac{\sqrt{4(1-\lambda) + \lambda^2 v^2} - v(2-\lambda)}{2(1-v^2)}.$$

Для получения преобразования Лапласа от функции $p(\tau, u)$ воспользуемся установленным выше соотношением (9), которое в рассматриваемом случае выглядит так:

$$p(\tau, s) = P\left\{\tau(1+s),\ \frac{\lambda}{1+s},\ v\right\}. \tag{14}$$

Выполнив в (13) указанные замены, получим

$$\bar{p}(\tau, s) = \left[1 + s - \frac{\sqrt{4(1+s)(1+s-\lambda) + \lambda^2 v^2} - v(2+2s-\lambda)}{2(1-v)}\right] \times$$

$$\times\, e^{-\frac{\sqrt{4(1+s)(1+s-\lambda)+\lambda^2 v^2} - v(2+2s-\lambda)}{2(1-v^2)}\tau}. \tag{15}$$

Обращая (15) методом контурного интегрирования, находим точное выражение для $p(\tau, u)$:

$$p(\tau, u) = \frac{\lambda}{2} e^{-\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\frac{\tau}{1+v}}\, \delta\left(u - \frac{\tau}{1+v}\right) +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{2\pi(1-v)} \int\limits_{\frac{1-\sqrt{1-v^2}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{1-v^2}}{2}} e^{\frac{2x-1}{2(1-v^2)}\lambda v\tau} \left[(2x - v)\sin\frac{\sqrt{x(1-x) - \frac{v^2}{4}}}{1-v^2}\lambda\tau +\right.$$

$$\left. + \sqrt{4x(1-x) - v^2}\, \cos\frac{\sqrt{x(1-x) - \frac{v^2}{4}}}{1-v^2}\lambda\tau\right] e^{-(1-\lambda x)u}\, dx. \tag{16}$$

Отметим интересные особенности диффузии квантов света в среде с подвижной границей. Положив в (13) $\lambda = 1$, найдем полную вероятность выхода кванта из среды с движущейся наружу границей ($v < 0$). Имеем

$$P(\tau) = \frac{1}{1+|v|} e^{-\frac{|v|}{1-v^2}\tau}. \tag{17}$$

Из (17) следует, что полная вероятность выхода кванта из полубесконечной среды с движущейся наружу границей всегда меньше единицы. Этот эффект для других типов нестационарности среды уже отмечался ранее [6], [1].

Найдем среднее время пребывания в среде выходящих из среды квантов. Из формулы (11) с учетом (13) и (15) получим

$$\bar{u}(\tau) = \frac{2}{\sqrt{4(1-\lambda)+\lambda^2 v^2}} \frac{2-\lambda-\sqrt{4(1-\lambda)+\lambda^2 v^2}}{2-\lambda v-\sqrt{4(1-\lambda)+\lambda^2 v^2}} + \left(\frac{2-\lambda}{\sqrt{4(1-\lambda)+\lambda^2 v^2}} - v\right)\frac{\tau}{1-v^2}. \tag{18}$$

С увеличением $v$ среднее время $\bar{u}(\tau)$ убывает. В частности, при $v = +1$ из (18) следует

$$\bar{u}(\tau) = \frac{\lambda}{2-\lambda} + \left[1 + \left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)^2\right]\frac{\tau}{2}. \tag{19}$$

Известно, что среднее время пребывания квантов в полубесконечной среде при $\lambda = 1$ бесконечно. Если же граница движется внутрь среды, то указанное среднее время оказывается конечным и величина его определяется следующей простой формулой:

$$\bar{u}(\tau) = \frac{1+\tau}{v} \tag{20}$$

2. *Отражение кванта от среды*. Функция $\rho(u)\,du$, определяющая вероятность отражения кванта от среды в промежутке времени от $u$ до $u+du$ после падения на нее, в случае $t_1 = 0$ связана с вероятностью выхода кванта из среды $p(\tau, u)$ соотношением

$$\rho(u) = \int_0^{\frac{u(1+v)}{2}} e^{-\tau} p[\tau(1-v),\ u-\tau]\,d\tau. \tag{21}$$

Обозначим через $A$ полную вероятность отражения кванта от среды — альбедо среды

$$A=\int_{0}^{\infty}\rho(u)\,du. \tag{22}$$

Подставив (21) в (22), после несложных преобразований получим

$$A=\frac{1}{1-v}\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{\tau}{1-v}}P(\tau)\,d\tau. \tag{23}$$

Интегрируя (23) с учетом (13), находим окончательное выражение для альбедо полубесконечной среды с движущейся границей

$$A=\frac{1}{1-v}\left[\frac{2}{\lambda}-1-\frac{2}{\lambda}\sqrt{1-\lambda+\frac{\lambda^2v^2}{4}}\right]. \tag{24}$$

Из формулы (24) для $v=+1$ следует

$$A=\frac{\lambda}{2-\lambda}. \tag{25}$$

При $\lambda=1$ и $v<0$ из (24) имеем

$$A=\frac{1-|v|}{1+|v|}. \tag{26}$$

Как и следовало ожидать, альбедо полубесконечной среды с движущейся наружу границей при $\lambda=1$ меньше единицы. Отметим, что (26) совпадает с формулой для альбедо среды в случае $t_1\gg t_2$ и $v\ll 1$ [1]. Физический смысл указанного совпадения достаточно ясен. Именно, случай $t_2\gg t_1$ отличается от противоположного тем, что в последнем случае кванты могут покидать среду в поглощенном состоянии. Условие $v\ll 1$ при $t_1\gg t_2$ означает, что число квантов, покидающих среду в поглощенном состоянии, очень мало по сравнению с числом квантов, выходящих из среды обычным путем.

Для получения функции $\rho(u)$ найдем сначала ее лапласовское изображение

$$\bar{\rho}(s)=\int_{0}^{\infty}e^{-su}\rho(u)\,du. \tag{27}$$

В соответствии с (14) можем написать

$$\bar{\rho}(s)=A\left\{\frac{\lambda}{1+s},\ v\right\}. \tag{28}$$

Выполняя в (24) указанные замены, находим

$$\bar{\rho}(s)=\frac{1}{1-v}\left[\frac{2}{\lambda}(1+s)-1-\frac{2}{\lambda}\sqrt{(1+s)(1+s-\lambda)+\frac{\lambda^2v^2}{4}}\right]. \quad (29)$$

Обращая преобразование Лапласа методом контурного интегрирования, приходим к точному выражению для искомой функции

$$\rho(u)=\frac{2\lambda}{\pi(1-v)}\int\limits_{1-\frac{\sqrt{1-v^2}}{2}}^{1+\frac{\sqrt{1-v^2}}{2}}\sqrt{x(1-x)-\frac{v^2}{4}}\;e^{-(1-x)u}\,dx. \quad (30)$$

Для больших значений $\lambda u$ и $v^2 \ll 1$ имеет место следующее асимптотическое представление:

$$\rho(u)=\frac{e^{-(1-\lambda)u-\frac{v^2}{4}u}}{(1-v)\,u\sqrt{\pi\lambda u}}. \quad (31)$$

При $v=-1$ из (30) следует физически очевидный результат $\rho(u)\equiv 0$, то есть от среды, граница которой движется наружу со скоростью света, кванты не отражаются. При $v=+1$

$$\rho(u)=\frac{\lambda}{2}\,e^{-\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)u}. \quad (32)$$

Последний результат совпадает с формулой для $\rho(u)$ в случае $t_1 \gg t_2$ и $v \gg 1$ [1].

Формулу (32) легко получить непосредственно из физических соображений. Именно, вероятность того, что квант испытает одно рассеяние и через промежуток времени $u$ отразится от среды, граница которой движется внутрь со скоростью света, равна $\frac{\lambda}{2}e^{-u}$. Тогда для вероятности отражения кванта, испытавшего $n$ рассеяний, имеем

$$\rho_n(u)=\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\,e^{-u}. \quad (33)$$

Суммирование (33) по $n$ от 1 до $\infty$ дает формулу (32). Отметим, что (32) можно получить из (25) с учетом (28).

Подсчитаем среднее время, затрачиваемое квантами на отражение от среды

$$\bar{u} = \frac{Z}{A}, \tag{34}$$

где

$$Z = \int_0^\infty \rho(u)\, u du. \tag{35}$$

Для определения $Z$ воспользуемся тем, что эта функция связана с $\bar{\rho}(s)$ следующим соотношением:

$$Z = -\left.\frac{\partial \bar{\rho}(s)}{ds}\right|_{s=0}. \tag{36}$$

Зная $Z$ и $A$, по формуле (34) легко находим

$$\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda + \frac{\lambda^2 v^2}{4}}}. \tag{37}$$

В последнем результате несколько неожиданным кажется то обстоятельство, что величина $\bar{u}$ не зависит от направления движения границы среды. Этот вывод можно понять, если учесть что с уменьшением $v$ убывает доля отраженных средой квантов.

4. *Свечение среды с движущейся границей.* Пусть функция $R(\tau)\, d\tau$, определяющая количество энергии, заключенной между оптическими глубинами $\tau$ и $\tau + d\tau$, имеет вид

$$R(\tau)\, d\tau = (a_0 + a_1 \tau)\, d\tau. \tag{38}$$

В таком случае интенсивность выходящего из среды излучения будет равна

$$I = a_0 A_0 + a_1 A_1, \tag{39}$$

где использованы обозначения

$$A_k = \int_0^\infty P(\tau)\, \tau^k\, d\tau. \tag{40}$$

Для определения величин $A_k$ подставим (13) в (40) и проинтегрируем при $k = 0$ и $k = 1$. Получим

$$A_0 = \frac{\lambda}{2}\, \frac{1 + v}{1 - \lambda} - \frac{\lambda}{2}\, \frac{1 - v}{1 - \lambda} A, \tag{41}$$

Выполняя в (24) указанные замены, находим

$$\bar{\rho}(s)=\frac{1}{1-v}\left[\frac{2}{\lambda}(1+s)-1-\frac{2}{\lambda}\sqrt{(1+s)(1+s-\lambda)+\frac{\lambda^2 v^2}{4}}\right]. \quad (29)$$

Обращая преобразование Лапласа методом контурного интегрирования, приходим к точному выражению для искомой функции

$$\rho(u)=\frac{2\lambda}{\pi(1-v)}\int\limits_{1-\frac{\sqrt{1-v^2}}{2}}^{1+\frac{\sqrt{1-v^2}}{2}}\sqrt{x(1-x)-\frac{v^2}{4}}\,e^{-(1-x)u}\,dx. \quad (30)$$

Для больших значений $\lambda u$ и $v^2\ll 1$ имеет место следующее асимптотическое представление:

$$\rho(u)=\frac{e^{-(1-\lambda)u-\frac{v^2}{4}u}}{(1-v)\,u\sqrt{\pi\lambda u}}. \quad (31)$$

При $v=-1$ из (30) следует физически очевидный результат $\rho(u)\equiv 0$, то есть от среды, граница которой движется наружу со скоростью света, кванты не отражаются. При $v=+1$

$$\rho(u)=\frac{\lambda}{2}\,e^{-\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)u}. \quad (32)$$

Последний результат совпадает с формулой для $\rho(u)$ в случае $t_1\gg t_2$ и $v\gg 1$ [1].

Формулу (32) легко получить непосредственно из физических соображений. Именно, вероятность того, что квант испытает одно рассеяние и через промежуток времени $u$ отразится от среды, граница которой движется внутрь со скоростью света, равна $\frac{\lambda}{2}e^{-u}$. Тогда для вероятности отражения кванта, испытавшего $n$ рассеяний, имеем

$$\rho_n(u)=\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\,e^{-u}. \quad (33)$$

Суммирование (33) по $n$ от 1 до $\infty$ дает формулу (32). Отметим, что (32) можно получить из (25) с учетом (28).

Подсчитаем среднее время, затрачиваемое квантами на отражение от среды

$$\bar{u} = \frac{Z}{A}, \tag{34}$$

где

$$Z = \int_0^\infty \rho(u)\, u du. \tag{35}$$

Для определения $Z$ воспользуемся тем, что эта функция связана с $\bar{\rho}(s)$ следующим соотношением:

$$Z = -\left.\frac{\partial \bar{\rho}(s)}{ds}\right|_{s=0}. \tag{36}$$

Зная $Z$ и $A$, по формуле (34) легко находим

$$\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda + \frac{\lambda^2 v^2}{4}}}. \tag{37}$$

В последнем результате несколько неожиданным кажется то обстоятельство, что величина $\bar{u}$ не зависит от направления движения границы среды. Этот вывод можно понять, если учесть что с уменьшением $v$ убывает доля отраженных средой квантов.

4. *Свечение среды с движущейся границей.* Пусть функция $R(\tau)\, d\tau$, определяющая количество энергии, заключенной между оптическими глубинами $\tau$ и $\tau + d\tau$, имеет вид

$$R(\tau)\, d\tau = (a_0 + a_1 \tau)\, d\tau. \tag{38}$$

В таком случае интенсивность выходящего из среды излучения будет равна

$$I = a_0 A_0 + a_1 A_1, \tag{39}$$

где использованы обозначения

$$A_k = \int_0^\infty P(\tau)\, \tau^k\, d\tau. \tag{40}$$

Для определения величин $A_k$ подставим (13) в (40) и проинтегрируем при $k = 0$ и $k = 1$. Получим

$$A_0 = \frac{\lambda}{2}\,\frac{1+v}{1-\lambda} - \frac{\lambda}{2}\,\frac{1-v}{1-\lambda} A, \tag{41}$$

$$A_1 = \frac{\lambda}{2}\frac{(1+v)^2}{1-\lambda} + \frac{\lambda}{2}\frac{(1-v)^2}{1-\lambda}A + \frac{\lambda v}{1-\lambda}A_0, \tag{42}$$

где $A$ — альбедо среды. Подстановка (41), (42) и (24) в (39) дает интенсивность выходящего из среды излучения $I$.

Для установления зависимости светимости среды от времени $I(u)$ поступим следующим образом. Найдем сначала преобразование Лапласа от $I(u)$.

$$\overline{I}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-su}\, I(u)\, du. \tag{43}$$

Это легко сделать, воспользовавшись соотношением (14), из которого следует, что

$$\overline{I}(s) = I\left\{\frac{\lambda}{1+s},\ v\right\}. \tag{44}$$

Выполняя в выражении для $I$ замены согласно (44), получим

$$\overline{I}(s) = a_0\overline{A}_0(s) + a_1\overline{A}_1(s), \tag{45}$$

где

$$\overline{A}_0(s) = \frac{\lambda}{2}\frac{1+v}{1+s-\lambda} - \frac{\lambda}{2}\frac{1-v}{1+s-\lambda}\overline{\rho}(s), \tag{46}$$

$$\overline{A}_1(s) = \frac{\lambda}{2}\frac{(1+v)^2}{1+s-\lambda} + \frac{\lambda}{2}\frac{(1-v)^2}{1+s-\lambda}\overline{\rho}(s) + \frac{\lambda v}{1+s-\lambda}\overline{A}_0(s). \tag{47}$$

Обращая (46) и (47), находим при $\lambda = 1$

$$A_0(u) = \frac{1+v}{2}e^{-\frac{u}{2}} + v + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{1-\sqrt{1-v^2}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{1-v^2}}{2}} e^{-xu}\sqrt{x(1-x) - \frac{v^2}{4}}\,\frac{dx}{x}, \tag{48}$$

$$A_1(u) = \frac{(1+v)^2}{2}ue^{-\frac{u}{2}} + 2 + uv^2 - v(1-v) -$$

$$-\frac{1-v}{\pi}\int\limits_{\frac{1-\sqrt{1-v^2}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{1-v^2}}{2}} e^{-xu}\sqrt{x(1-x) - \frac{v^2}{4}}\,\frac{dx}{x} - \tag{49}$$

$$-\frac{v}{\pi}\int\limits_{\frac{1-\sqrt{1-v^2}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{1-v^2}}{2}} e^{-xu}\sqrt{x(1-x)-\frac{v^2}{4}}\,\frac{dx}{x^2}. \qquad (49)$$

Положим $a_0 = a_1 = I_0$. Сложив (48) и (49), в соответствии с (45) получим точное выражение для интенсивности излучения, выходящего из среды с движущейся границей

$$I(u) = I_0\left\{\left|\frac{1+v}{2}+\frac{(1+v)^2}{2}u\right| e^{-\frac{u}{2}}+\right.$$

$$\left.+2+v^2(u+1)-\frac{v}{\pi}\int\limits_{\frac{1-\sqrt{1-v^2}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{1-v^2}}{2}} e^{-xu}\sqrt{x(1-x)-\frac{v^2}{4}}\,\frac{1-x}{x^2}\,dx,\right. \qquad (50)$$

где $I_0$ — интенсивность излучения, выходящего из стационарной среды при $u \to \infty$, в которой распределение энергии в момент $u = 0$ задано формулой (38).

Из (50) можно получить асимптотическую формулу, справедливую для $u \gg v^{-2}$

$$I(u) = I_0 v^2 u, \qquad (51)$$

откуда следует, что светимость среды с движущейся внутрь границей с течением времени возрастает.

Ленинградский Государственный
университет

## ON THE THEORY OF LIGHT SCATTERING IN A MEDIUM WITH A MOVING BOUNDARY

V. V. LEONOV

The problem of light scattering in a one-dimensional semi-infinite homogeneous medium with a moving boundary is considered. The differential equation for the probability of escape of the quantum from the medium, allowing for both time parameters $t_1$ and $t_2$, is obtained. An explicit expression of quantum reflection probability and the quantum emergence probability from the medium when $t_2 \gg t_1$ are given.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *В. В. Леонов*, Астрофизика, 4, 207, 1968.
2. *С. А. Каплан, В. Н. Сиверс*, Астрон. ж., 37, 824, 1960.
3. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, 1956.
4. *И. Н. Минин*, Вестн. ЛГУ, № 13, 137, 1959; 19, 124, 1962.
5. *С. А. Каплан, И. А. Климишин, В. Н. Сиверс*, Астрон. ж., 37, 9, 1960.
6. *И. Н. Минин*, Астрофизика, 1, 173, 1965.