

Interaction of vortex and potential motions in relativistic hydrodynamics. I. Approximative formulas for a generation of a potential motion by a vortex one (and on the contrary) are found on the basis of relativistic hydrodynamics.

17 июля 1968

Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе АН СССР

А. Д. ЧЕРНИН
Е. Д. ЭЙДЕЛЬМАН

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. M. J. Lighthell, Proc. Roy. Soc., A 211, № 1107, 564, 1952; A 222, № 1148, 1, 1954.
2. В. И. Кляцкин, Изв. АН, Физика атмосферы и океана, 2, 474, 1966.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, 1953, стр. 599.
4. Л. М. Озерной, А. Д. Чернин, Астрон. ж., 45, 1137, 1968.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВИХРЕВЫХ И ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ. II

Как известно, в гравитирующей системе существует четыре типа возмущений, не взаимодействующих между собой в линейном приближении: 1) продольные (потенциальные) волны, 2) поперечные (вихревые) волны, 3) волны энтропии, 4) гравитационные волны. Взаимодействие различных мод появляется во втором порядке теории возмущений благодаря нелинейностям уравнений общей теории относительности. Эти нелинейности можно разделить на гидродинамические (которые имеются и в классической теории) и гравитационные, специфичные для теории относительности. Как и в [1], нас будет интересовать нелинейное взаимодействие первых двух из указанных выше возмущений.

Если нелинейные эффекты малы, то величина гидродинамического эффекта определяется, вообще говоря, квадратом отношения v/u (u — скорость звука), а гравитационного — квадратом отношения v/c и отношением φ/c^2 (φ — ньютоновский потенциал). В соответствии с этим для процесса генерации потенциальных движений вихревыми находим следующие соотношения (основанные на оценке и сравнении по порядку величины различных слагаемых в уравнениях постньютоновской гидродинамики [2]):

$$\left(\frac{v_p}{v_s}\right)_1 \sim \frac{v_s^2}{u^2} \frac{1}{1 - \frac{v_s^2}{c^2}}, \quad (1)$$

$$\left(\frac{v_p}{v_s}\right)_2 \sim \frac{\varphi}{c^2}. \quad (2)$$

(v_p , v_s — потенциальная и вихревая скорости).

Для этих случаев относительная величина возмущений плотности есть

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \sim \frac{v_p}{v_s}. \quad (3)$$

Первое соотношение вытекает из релятивистской гидродинамики без учета гравитации [1], а второе описывает процесс генерации потенциальных движений вихревыми, обремененный гравитационной нелинейности.

Для анализа (2) рассмотрим одну конкретную задачу, относящуюся к космологической модели с вихревыми движениями [3, 4]. Пусть в ограниченной части фридмановского расширяющегося мира существуют вихревые движения с полем скорости v , в масштабах вплоть до максимального L . Если рассматриваемая область достаточно мала, то в течение ограниченного промежутка времени метрику внутри нее можно считать в нулевом приближении галилеевой. Кинематика расширения с наложенным на него вихревым движением описывается тогда классической гидродинамикой и линейной теорией тяготения. Нас будут интересовать ранние фазы эволюции „горячей“ вселенной, когда скорость звука близка к скорости света ($u = c/\sqrt{3}$). В этих условиях малость возмущений плотности, способных возникнуть из-за гидродинамической нелинейности, требует $v^2/c^2 \ll 1$.

В следующем приближении нужно учитывать возмущения галилеевой метрики, малые потенциальные скорости v_p и соответствующие им возмущения плотности. Для последних, согласно (2)–(3), находим

$$\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_2 \sim \left(\frac{v_p}{v_s}\right)_2 \sim \frac{\varphi}{c^2} \sim \frac{r^2}{(ct)^2}. \quad (4)$$

Мы учли здесь, что

$$\begin{aligned} \varphi &\sim \frac{GM}{r} \sim G\rho r^2 \sim H^2 r^2, \\ H &= \frac{da}{dt} \sim \frac{1}{t} \end{aligned} \quad (5)$$

(H — фактор Хаббла, a — фридмановский радиус).

Возмущения плотности особенно велики в наибольшем масштабе вихревых движений

$$\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_{2,L} \sim \left(\frac{L}{ct}\right)^2. \quad (6)$$

Отсюда следует, что условия малости возмущений плотности, создаваемых в расширяющемся фридмановском мире вихревыми движениями, есть

$$\frac{v^2}{c^2} \ll 1, \quad \left(\frac{L}{ct}\right)^2 \ll 1. \quad (7)$$

Поскольку $L \sim a \sim t^{1/2}$, то $\left(\frac{L}{ct}\right)^2 \sim t^{-1}$ и второе из условий (7) не может выполняться при $t \rightarrow 0$. Это означает, что ранние стадии эволюции горячей вселенной с „фотонными вихрями“ в общем случае обязаны быть нефридмановскими, как и предполагалось в [3, 4].

Благодарю А. Г. Дорошкевича, Я. Б. Зельдовича, И. Д. Новикова, Л. М. Озерного за обсуждения, приведшие к этой заметке.

Interaction of vortex and potential motions in relativistic hydrodynamics. II. The hydrodynamical interaction of motions due to nonlinearity of gravitation equations in General Relativity is analysed in the Post-Newtonian approximation.

25 марта 1969

Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе АН СССР

А. Д. ЧЕРНИН

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. Д. Чернин, Е. Д. Эйдельман, *Астрофизика*, 5, 668, 1969.
2. S. Chandrasekhar, *Ap. J.*, 142, 1488, 1965.
3. Л. М. Озерной, А. Д. Чернин, *Астрон. ж.*, 44, 1131, 1967; 45, 1137, 1968; *Письма ЖЭТФ*, 7, 436, 1968.
4. А. Д. Чернин, в сб. „Труды 5-ой школы по космофизике“, Апатиты, 1968, стр. 29.