ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВИХРЕВЫХ И ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ I.

Взаимодействие движений сплошной среды, описываемое нелинейными членами уравнений гидродинамики, способно привести к генерации потенциальных (p) движений вихревыми (s) движениями и наоборот. Этот эффект особенно существенен для релятивистских движений, когда макроскопическая скорость приближается к скорости света, и может служить причиной неустойчивости чисто вихревых (бездивергентных) и чисто потенциальных течений относительно перехода в режим, в котором представлены движения обоих типов.

В рамках нерелятивистской теории (sp) — взаимодействие исследовалось на примере возбуждения звука турбулентностью [1, 2].

Рассмотрим процесс генерации потенциальных движений вихревыми. Задача может быть сформулирована следующим образом. Считаем, что в некоторый момент среде сообщено s-движение с полем скоростей v_s в масштабах от некоторого минимального до максимального. Нужно ожидать, что по прошествии определенного времени τ, разного для разных масштабов, нелинейное взаимодействие вихрей приведет, вообще говоря, к возникновению поля потенциальных скоростей v_p с соответствующими возмущениями плотности $\delta\rho$. Требуется найти связь v_p и $\delta\rho$ с начальным полем v_s.

Хотя полное и математически строгое рассмотрение нелинейных эффектов является весьма сложной задачей, некоторые результаты качественного характера могут быть получены весьма просто — без интегрирования дифференциальных уравнений, если воспользоваться распространенным в гидродинамике методом приближенной оценки и сравнения по порядку величины различных членов гидродинамических уравнений.

Пусть пространственная часть 4-скорости в некотором масштабе R изменилась за время τ на величину $\sim U_\alpha$; тогда различные члены релятивистского уравнения движения [3]

$$wU^k \frac{\partial U_\alpha}{\partial x^k} = -\frac{\partial p}{\partial x^\alpha} - U_\alpha U^k \frac{\partial p}{\partial x^k}$$

можно оценить следующим образом:

$$U^0 \frac{\partial U_\alpha}{\partial ct} \sim U^0 \frac{U_\alpha}{c\tau} \sim \gamma^2 \frac{v}{c^2\tau};$$

$$U^\alpha \frac{\partial U_\alpha}{\partial x^\alpha} \sim \gamma^2 \frac{v^2}{c^2 R}; \qquad \frac{\partial p}{\partial x^\alpha} \sim \frac{\delta p}{R} \sim u^2 \frac{\delta\rho}{R};$$

$$U_\alpha U^0 \frac{\partial p}{\partial ct} \sim \gamma^2 \frac{v}{c} \frac{\delta p}{c\tau} \sim \gamma^2 v \frac{u^2}{c^2} \frac{\delta\rho}{\tau};$$

$$U_\alpha U^\alpha \frac{\partial p}{\partial x^\alpha} \sim \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} u^2 \frac{\delta\rho}{R}.$$

Здесь δp, $\delta\rho$ — изменение давления и плотности за время τ в масштабе R, u — скорость звука, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, w — энтальпия $(\rho c^2 < w < 2\rho c^2)$. Точно так же можно оценить и слагаемые уравнения неразрывности. Не выписывая их полностью, обратим внимание на то, что в члене, содержащем операцию дивергенции, сохраняется лишь потенциальная скорость

$$w \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\alpha} \sim w\gamma \frac{v_p}{cR} \sim \rho c\gamma \frac{v_p}{R}.$$

Выберем в качестве τ промежуток времени, за который изменение скорости в данном масштабе таково, что нелинейный „инерциальный" член $\sim v^2/R$ близок к линейному $\sim v/\tau$. Этому условию отвечает $\tau \sim R/v$. Тогда сравнение членов в обоих указанных выше уравнениях приводит к следующим соотношениям:

$$\frac{v_p}{v} \sim \frac{v_p}{v_s} \sim \frac{v_s^2}{u^2} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \qquad (1)$$

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \sim \frac{v_p}{v_s}. \qquad (2)$$

В нерелятивистском ($v \ll c$) случае (1)—(2) совпадают с формулами, выведенными тем же способом из классических уравнений [4].

Аналогичным образом легко получить приближенные соотношения, описывающие обратный процесс — порождение вихрей потенциальными движениями. Для трехмерной скорости генерируемых вихревых движений выполняется зависимость

$$\frac{v_s}{u} \sim \frac{v_p^2}{u^2}. \qquad (3)$$

Как видно из (1)—(3), рассмотренные нелинейные процессы тем эффективнее, чем больше скорости, чем ближе исходное движение к релятивистскому режиму.

Мы благодарны за обсуждения Л. Э. Гуревичу.

Interaction of vortex and potential motions in relativistic hydrodynamics. I. Approximative formulas for a generation of a potential motion by a vortex one (and on the contrary) are found on the basio of relativistic hydrodynamics.

17 июля 1968

Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе АН СССР

А. Д. ЧЕРНИН
Е. Д. ЭЙДЕЛЬМАН

ЛИТЕРАТУРА

1. *M. J. Lighthell*, Proc. Roy. Soc., A 211, № 1107, 564, 1952; A 222, № 1148, 1, 1954.
2. *В. И. Кляцкин*, Изв. АН, Физика атмосферы и океана, 2, 474, 1966.
3. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Механика сплошных сред, 1953, стр. 599.
4. *Л. М. Озерной, Л. Д. Чернин*, Астрон. ж., 45, 1137, 1968.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВИХРЕВЫХ И ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ. II

Как известно, в гравитирующей системе существует четыре типа возмущений, не взаимодействующих между собой в линейном приближении: 1) продольные (потенциальные) волны, 2) поперечные (вихревые) волны, 3) волны энтропии, 4) гравитационные волны. Взаимодействие различных мод появляется во втором порядке теории возмущений благодаря нелинейностям уравнений общей теории относительности. Эти нелинейности можно разделить на гидродинамические (которые имеются и в классической теории) и гравитационные, специфичные для теории относительности. Как и в [1], нас будет интересовать нелинейное взаимодействие первых двух из указанных выше возмущений.

Если нелинейные эффекты малы, то величина гидродинамического эффекта определяется, вообще говоря, квадратом отношения v/u (u — скорость звука), а гравитационного — квадратом отношения v/c и отношением φ/c^2 (φ — ньютоновский потенциал). В соответствии с этим для процесса генерации потенциальных движений вихревыми находим следующие соотношения (основанные на оценке и сравнении по порядку величины различных слагаемых в уравнениях постньютоновской гидродинамики [2]):

$$\left(\frac{v_p}{v_s}\right)_1 \sim \frac{v_s^2}{u^2}\frac{1}{1-\frac{v_s^2}{c^2}}, \tag{1}$$