АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 5 НОЯБРЬ, 1969 ВЫПУСК 4

ВРАЩАЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ ГРАВИТИРУЮЩИХ ТЕЛ В КВАЗИСТАЦИОНАРНОМ СОСТОЯНИИ

Т. А. АГЕКЯН, И. М. МИХЭИЛЭ

Поступила 1 апреля 1969

Получена система уравнений, описывающая состояние и эволюцию вращающейся квазистационарной системы гравитирующих тел. В отличие от ранее полученных результатов теория свободна от предположения о равенстве компонентов дисперсии остаточных скоростей. Показано, что существует вращающаяся квазистационарная система, эволюционирующая гомологично. Для нее избыточный момент вращения, уносимый диссипирующими звездами, в среднем по системе равен 3/2 среднего момента вращения этих звезд.

1. *Введение.* В ходе эволюции вращающаяся система гравитирующих тел достигает квазистационарного состояния в каждой точке и и затем переходит в состояние квазистационарное в целом [1]. Иррегулярные силы стремятся выровнять угловые скорости центроидов и компоненты тензора дисперсии скоростей. Вследствие диссипации тел полное выравнивание недостижимо. В результате, в системе квазистационарной в целом устанавливается некоторое определенное, не зависящее от предыдущих состояний, распределение угловых скоростей центроидов и компонентов тензора дисперсии скоростей. Если бы диссипация отсутствовала, то система достигла бы твердотельного вращения [2].

Для исследования квазистационарных вращающихся систем можно применить гидродинамический метод [3, 4]. В работе [4] уравнения состояния были получены при упрощающем предположении, что в квазистационарной системе распределение остаточных скоростей является сферическим.

Как известно, во вращающихся системах, в частности в Галактике, распределение остаточных скоростей не является сферическим. В настоящей работе покажем, что задача может быть решена без предположения о сферичности распределения остаточных скоростей.

После этого обобщения система уравнений, описывающая состояние вращающейся квазистационарной системы, позволит построить правильную теоретическую модель вращающейся системы.

Будем считать, что система обладает ротационной симметрией и ограничимся случаем равенства масс тел. Предположим, что компоненты скорости являются независимыми переменными.

2. *Уравнения состояния вращающейся квазистационарной системы.* Напишем уравнение Больцмана для фазовой плотности в системе цилиндрических координат

$$\frac{\partial f}{\partial t} + R\frac{\partial f}{\partial r} + Z\frac{\partial f}{\partial z} + \left(\frac{\Theta^2}{r} + \frac{\partial U}{\partial r}\right)\frac{\partial f}{\partial R} - \frac{R\Theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \Theta} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial Z} = \chi, \quad (1)$$

где R, Θ и Z — компоненты скорости вдоль линий координат, U — потенциал, χ — функция сближений.

Для вывода уравнений начальных моментов до второго порядка распределения скоростей помножим уравнение (1) поочередно на $d\Omega$, $Rd\Omega$, $\Theta d\Omega$, $Zd\Omega$, $R^2d\Omega$, $\Theta^2d\Omega$, $Z^2d\Omega$ ($d\Omega$ — элемент объема в пространстве скоростей) и проинтегрируем по всему пространству скоростей. Получим

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{\partial(\nu\overline{R})}{\partial r} + \frac{\partial(\nu\overline{Z})}{\partial z} + \frac{\nu\overline{R}}{r} = A, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\nu\overline{R})}{\partial t} + \frac{\partial(\nu\overline{R^2})}{\partial r}\,\frac{\partial(\nu\overline{RZ})}{\partial z} - \nu\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\nu\overline{\Theta^2}}{r} + \frac{\nu\overline{R^2}}{r} = B_1, \quad (3)$$

$$\frac{\partial(\nu\overline{\Theta})}{\partial t} + \frac{\partial(\nu\overline{R\Theta})}{\partial r} + \frac{\partial(\nu\overline{\Theta Z})}{\partial z} + \frac{2\nu\overline{R\Theta}}{r} = B_2, \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\nu\overline{Z})}{\partial t} + \frac{\partial(\nu\overline{RZ})}{\partial r} + \frac{\partial(\nu\overline{Z^2})}{\partial z} + \frac{\nu\overline{RZ}}{r} - \nu\frac{\partial U}{\partial z} = B_3, \quad (5)$$

$$\frac{\partial(\nu\overline{R^2})}{\partial t} + \frac{\partial(\nu\overline{R^3})}{\partial r} + \frac{\partial(\nu\overline{R^2Z})}{\partial z} - 2\nu\overline{R}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{2\nu\overline{R\Theta^2}}{r} + \frac{\nu\overline{R^3}}{r} = C_1, \quad (6)$$

$$\frac{\partial(\nu\overline{\Theta^2})}{\partial t} + \frac{\partial(\nu\overline{R\Theta^2})]}{\partial r} + \frac{\partial(\nu\overline{\Theta^2 Z})}{\partial r} + \frac{3\nu\overline{R\Theta^2}}{r} = C_2, \quad (7)$$

$$\frac{\partial(\nu\overline{Z^2})}{\partial t}+\frac{\partial(\nu\overline{RZ^2})}{\partial r}+\frac{\partial(\nu\overline{Z^3})}{\partial z}+\frac{\nu\overline{RZ^2}}{r}-2\nu\overline{Z}\frac{\partial U}{\partial z}=C_3, \tag{8}$$

где ν — плотность, а черта означает усреднение.

Пусть R', Θ' и Z' компоненты остаточной скорости. Если пренебрежем центральными моментами третьего порядка и также $\overline{R}^3$ и $\overline{Z}^3$ (компоненты $\overline{R}$ и $\overline{Z}$ в квазистационарной системе малы), то получим

$$\begin{aligned}
&\overline{R^2}=\overline{R}^2+\overline{R'^2}, && \overline{R\Theta}=\overline{R}\overline{\Theta},\\
&\overline{\Theta^2}=\overline{\Theta}^2+\overline{\Theta'^2}, && \overline{RZ}=\overline{R}\overline{Z},\\
&\overline{Z^2}=\overline{Z}^2+\overline{Z'^2}, && \overline{\Theta Z}=\overline{\Theta}\overline{Z},
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
&\overline{R^3}=3\overline{R}\overline{R^2}, && \overline{RZ^2}=\overline{R}\,\overline{Z^2},\\
&\overline{R^2Z}=\overline{R^2}\,\overline{Z}, && \overline{\Theta^2 Z}=\overline{\Theta^2}\,\overline{Z},\\
&\overline{R\Theta^2}=\overline{R}\overline{\Theta^2}, && \overline{Z^3}=3\overline{Z}\,\overline{Z^2}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Равенства (9) определяют дисперсии компонентов скоростей $\overline{R'^2}$, $\overline{\Theta'^2}$ и $\overline{Z'^2}$, если известны начальные моменты $\overline{R^2}$, $\overline{\Theta^2}$ и $\overline{Z^2}$ и компоненты скорости центроида $\overline{R}$, $\overline{\Theta}$, $\overline{Z}$.

В квазистационарной в целом системе все изменения в конечном счете вызваны диссипацией тел из системы. Диссипация же тел является результатом действия иррегулярных сил. Поэтому величины A, $B_1,\ldots$, C_3, стоящие в правых частях уравнений (2)—(8), должны быть равны изменению в единичном объеме соответствующей уравнению характеристики вследствие диссипации из этого объема тел и дополнительного действия иррегулярных сил, вызванного явлением диссипации.

Для определения правых частей уравнений используем шварцшильдовское распределение скоростей. Это естественное в настоящее время приближение.

Вводя сферическую систему координат (V', θ, φ), напишем шварцшильдовское распределение остаточных скоростей в виде

$$\Psi(V',\eta,\varphi)=\frac{\nu}{(2\pi)^{3/2}\left(\overline{R'^2}\,\overline{\Theta'^2}\,\overline{Z'^2}\right)^{1/2}}e^{-(QV')^2}V'^2, \tag{11}$$

где

$$Q^2=\frac{(1-\eta^2)\cos^2\varphi}{2\overline{R'^2}}+\frac{\eta^2}{2\overline{\Theta'^2}}+\frac{(1-\eta^2)\sin^2\varphi}{2\overline{Z'^2}}, \tag{12}$$

$$\eta = \cos\theta. \tag{13}$$

Уравнение (2) описывает изменение плотности. Если a выражает долю тел единичного объема, диссипирующих за время релаксации τ, то получаем

$$A = -\frac{\nu}{\tau} a. \tag{14}$$

Будем считать, что доля a равна доле тел, имеющих при шварцшильдовском распределении скорости, большие критической V_e. Тогда получим

$$a = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\,[\overline{R^2}\,(\overline{\theta^2}-\overline{\theta}^2)\,\overline{Z^2}]^{1/2}}\int\limits_{-1}^{+1} d\eta \int\limits_{0}^{2\pi}\frac{d\varphi}{Q^3}\int\limits_{QV_e'}^{\infty}\xi^2 e^{-\xi^2}d\xi, \tag{15}$$

если пренебрежем $\overline{R}^2$ и $\overline{Z}^2$. В дальнейшем мы всегда будем пренебрегать этими величинами и также $\overline{R}\,\overline{Z}$, поскольку компоненты $\overline{R}$ и $\overline{Z}$ малы по сравнению с компонентой $\overline{\theta}$.

Для вычисления интеграла нужно выразить критическую остаточную скорость V_e' через искомые функции. Имеем

$$V_e^2 = V_e'^2 + 2\overline{\theta}\varkappa V_e' + \overline{\theta}^2 = 2U, \tag{16}$$

где

$$\varkappa = \frac{\overline{R}}{\overline{\theta}}\sqrt{1-\eta^2}\cos\varphi + \eta + \frac{\overline{Z}}{\overline{\theta}}\sqrt{1-\eta^2}\sin\varphi, \tag{17}$$

и, следовательно,

$$V_e' = \overline{\theta}\left(\sqrt{\varkappa^2 + \frac{2U}{\overline{\theta}^2} - 1} - \varkappa\right). \tag{18}$$

Время релаксации в данном единичном объеме определяется формулой

$$\tau = \frac{(\overline{V'^2})^{3/2}}{LG^2m^2\nu} = \frac{(\overline{R^2}+\overline{\theta^2}+\overline{Z^2}-\overline{\theta}^2)^{3/2}}{LG^2m^2\nu}, \tag{19}$$

где G — гравитационная постоянная, m — масса тела, а величина L слабо зависит от положения точки системы.

Правые части уравнений (3)—(5) выражают изменения импульса единичного объема вдоль осей координат в пространстве скоростей под влиянием иррегулярных сил. Эти изменения вызваны диссипацией и внутренним трением.

Будем считать, что скорости диссипирующих тел равны критической скорости [4, 5]. Тогда импульсы (на единицу массы), уносимые в направлениях осей, равны

$$\begin{aligned} R &= \overline{R} + V_e'\sqrt{1-\eta^2}\cos\varphi, \\ \Theta &= \overline{\Theta} + V_e'\eta, \\ Z &= \overline{Z} + V_e'\sqrt{1-\eta^2}\sin\varphi. \end{aligned} \tag{20}$$

Для получения импульсов, уносимых диссипирующими телами за время релаксации из единичного объема, помножим (20) на $\psi d\eta d\varphi dV'$ и проинтегрируем по области $[-1, +1]\times[0, 2\pi]\times[V_e', \infty)$. Получим импульсы, уносимые в направлениях осей в единицу времени

$$\begin{aligned} &\frac{\nu\overline{R}}{\tau}a + \frac{\nu\overline{\Theta}}{\tau}p_1, \\ &\frac{\nu\overline{\Theta}}{\tau}a + \frac{\nu\overline{\Theta}}{\tau}p_2, \\ &\frac{\nu\overline{Z}}{\tau}a + \frac{\nu\overline{\Theta}}{\tau}p_3, \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}[\overline{R^2}(\overline{\Theta^2}-\overline{\Theta}^2)\overline{Z^2}]^{1/2}}\int_{-1}^{+1}d\eta\times \\ &\times\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{\varkappa^2+\frac{2U}{\overline{\Theta}^2}-1}-\varkappa\right)\frac{\sqrt{1-\eta^2}\cos\varphi\,d\varphi}{Q^3}\int_{QV_e'}^{\infty}\xi^2e^{-\xi^2}d\xi, \\ p_2 &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}[\overline{R^2}[\overline{\Theta^2}-\overline{\Theta}^2)\overline{Z^2}]^{1/2}}\int_{-1}^{+1}d\eta\times \\ &\times\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{\varkappa^2+\frac{2U}{\overline{\Theta}^2}-1}-\varkappa\right)\frac{\eta\,d\varphi}{Q^3}\int_{QV_e'}^{\infty}\xi^2e^{-\xi^2}d\xi, \end{aligned} \tag{22}$$

$$p_3 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\,[\overline{R^2}\,(\overline{\Theta^2} - \overline{\Theta}^2)\,\overline{Z^2}]^{1/2}} \int_{-1}^{+1} d\eta \times$$
$$\times \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{\varkappa^2 + \frac{2U}{\overline{\Theta}^2} - 1} - \varkappa \right) \frac{\sqrt{1-\eta^2}\sin\varphi\, d\varphi}{Q^3} \int_{QV'_e}^{\infty} \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi. \tag{22}$$

Нетрудно видеть, что p_1 и p_3 очень малы в сравнении с p_2 и в случае сферического распределения остаточных скоростей равны нулю. Поэтому импульс, уносимый вдоль оси Θ, гораздо больше импульсов, уносимых вдоль других двух направлений.

Внутреннее трение вызывает сглаживание угловой скорости центроида в соседних точках системы. Будем считать, что компонента ω угловой скорости по оси z гораздо больше, чем другие две компоненты, и пренебрежем внутренним трением вдоль них. Тогда [4] B_2 содержит также член

$$\frac{1}{3}\frac{r_0^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\nu r^2}{\tau}\frac{\partial\omega}{\partial r}\right) + \frac{1}{3} z_0^2 r \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\nu}{\tau}\frac{\partial\omega}{\partial z}\right), \tag{23}$$

где r_0 и z_0 — наибольшие значения r и z в системе. Учитывая формулы (21) и (23), получим

$$B_1 = -\frac{\nu\overline{R}}{\tau} a - \frac{\nu\overline{\Theta}}{\tau} p_1,$$
$$B_2 = -\frac{\nu\overline{\Theta}}{\tau} a - \frac{\nu\overline{\Theta}}{\tau} p_2 + \frac{1}{3}\frac{r_0^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\nu r^2}{\tau}\frac{\partial\omega}{\partial r}\right) + \frac{1}{3} z_0^2 r \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\nu}{\tau}\frac{\partial\omega}{\partial z}\right), \tag{24}$$
$$B_3 = -\frac{\nu\overline{Z}}{\tau} a - \frac{\nu\overline{\Theta}}{\tau} p_3.$$

В уравнениях (6)—(8) правые части выражают изменение кинетической энергии, вызванное иррегулярными силами.

Удвоенная кинетическая энергия (на единицу массы) диссипирующего тела по осям координат в пространстве скоростей равна соответственно

$$R^2 = 2\overline{R}V'_e\sqrt{1-\eta^2}\cos\varphi + V'^2_e\,(1-\eta^2)\cos^2\varphi,$$
$$\Theta^2 = \overline{\Theta}^2 + 2\overline{\Theta}\,V'_e\eta + V'^2_e\,\eta^2, \tag{25}$$
$$Z^2 = 2\overline{Z}V'_e\sqrt{1-\eta^2}\sin\varphi + V'^2_e(1-\eta^2)\sin^2\varphi.$$

Поступая как в случае получения импульса, уносимого диссипирующими телами, найдем удвоенную энергию, уносимую в направлениях осей в единицу времени

$$
\begin{gathered}
2\frac{\nu\overline{R}\,\overline{\Theta}}{\tau}p_1+\frac{\nu\overline{\Theta}^2}{\tau}q_1,\\
\frac{\nu\overline{\Theta}^2}{\tau}(a+2p_2+q_2),\\
2\frac{\nu\overline{\Theta}\,\overline{Z}}{\tau}p_3+\frac{\nu\overline{\Theta}^2}{\tau}q_3,
\end{gathered}
\tag{26}
$$

где

$$
\begin{gathered}
q_1=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}[\overline{R^2}(\overline{\Theta^2}-\overline{\Theta}^2)\overline{Z^2}]^{1/2}}\int\limits_{-1}^{+1}d\eta\times\\
\times\int\limits_0^{2\pi}\left(\sqrt{\varkappa^2+\frac{2U}{\overline{\Theta}^2}-1}-\varkappa\right)^2\frac{(1-\eta^2)\cos^2\varphi\,d\varphi}{Q^3}\int\limits_{QV_e'}^{\infty}\xi^2e^{-\xi^2}d\xi,\\
q_2=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}[\overline{R^2}(\overline{\Theta^2}-\overline{\Theta}^2)\overline{Z^2}]^{1/2}}\int\limits_{-1}^{+1}d\eta\times\\
\times\int\limits_0^{2\pi}\left(\sqrt{\varkappa^2+\frac{2U}{\overline{\Theta}^2}-1}-\varkappa\right)^2\frac{\eta^2d\varphi}{Q^3}\int\limits_{QV_e'}^{\infty}\xi^2e^{-\xi^2}d\xi,\\
q_3=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}[\overline{R^2}(\overline{\Theta^2}-\overline{\Theta}^2)\overline{Z^2}]^{1/2}}\int\limits_{-1}^{+1}d\eta\times\\
\times\int\limits_0^{2\pi}\left(\sqrt{\varkappa^2+\frac{2U}{\overline{\Theta}^2}-1}-\varkappa\right)^2\frac{(1-\eta^2)\sin^2\varphi\,d\varphi}{Q^3}\int\limits_{QV_e'}^{\infty}\xi^2e^{-\xi^2}d\xi.
\end{gathered}
\tag{27}
$$

Кроме диссипации происходит также процесс выравнивания кинетической энергии в соседних точках. Этот процесс аналогичен теплопроводности [4]. Учитывая и этот процесс, получим

$$C_1 = -2\frac{\nu\overline{R\Theta}}{\tau}p_1 - \frac{\nu\overline{\Theta^2}}{\tau}q_1 + \frac{1}{3}\frac{r_0^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\nu r}{\tau}\frac{\partial\overline{R^2}}{\partial r}\right) + \frac{1}{3}z_0^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\nu}{\tau}\frac{\partial\overline{R^2}}{\partial z}\right),$$

$$C_2 = -\frac{\nu\overline{\Theta^2}}{\tau}(a + 2p_2 + q_2) + \frac{1}{3}\frac{r_0^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\nu r}{\tau}\frac{\partial\overline{\Theta^2}}{\partial r}\right) + \frac{1}{3}z_0^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\nu}{\tau}\frac{\partial\overline{\Theta^2}}{\partial z}\right), \quad (28)$$

$$C_3 = -2\frac{\nu\overline{\Theta Z}}{\tau}p_3 - \frac{\nu\overline{\Theta^2}}{\tau}q_3 + \frac{1}{3}\frac{r_0^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\nu r}{\tau}\frac{\partial\overline{Z^2}}{\partial r}\right) + \frac{1}{3}z_0^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\nu}{\tau}\frac{\partial\overline{Z^2}}{\partial z}\right).$$

Если подставить найденные выражения для правых частей и опустить малые члены, содержащие $\overline{R}^2$, $\overline{Z}^2$ и $\overline{R}\,\overline{Z}$, то уравнения (2)—(8) принимают вид

$$\frac{\partial\nu}{\partial t} + \frac{\partial(\nu\overline{R})}{\partial r} + \frac{\partial(\nu\overline{Z})}{\partial z} + \frac{\nu\overline{R}}{r} = -\frac{\nu}{\tau}a, \quad (29)$$

$$\frac{\partial(\nu\overline{R})}{\partial t} + \frac{\partial(\nu\overline{R^2})}{\partial r} - \nu\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\nu\overline{\Theta^2}}{r} + \frac{\nu\overline{R^2}}{r} = -\frac{\nu\overline{R}}{\tau}a - \frac{\nu\overline{\Theta}}{\tau}p_1, \quad (30)$$

$$\frac{\partial(\nu\overline{\Theta})}{\partial t} + \frac{\partial(\nu\overline{R\Theta})}{\partial r} + \frac{\partial(\nu\overline{\Theta Z})}{\partial z} + \frac{2\nu\overline{R\,\Theta}}{r} =$$
$$= -\frac{\nu\overline{\Theta}}{\tau}(a + p_2) + \frac{1}{3}\frac{r_0^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\nu r^2}{\tau}\frac{\partial\omega}{\partial r}\right) + \frac{1}{3}z_0^2 r\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\nu}{\tau}\frac{\partial\omega}{\partial z}\right), \quad (31)$$

$$\frac{\partial(\nu\overline{Z})}{\partial t} + \frac{\partial(\nu\overline{Z^2})}{\partial r} - \nu\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\nu\overline{Z}}{\tau}a - \frac{\nu\overline{\Theta}}{\tau}p_3, \quad (32)$$

$$\frac{\partial(\nu\overline{R^2})}{\partial t} + 3\frac{\partial(\nu\overline{R}\,\overline{R^2})}{\partial r} + \frac{\partial(\nu\overline{R^2}\,\overline{Z})}{\partial z} - 2\nu\overline{R}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{2\nu\overline{R\Theta^2}}{r} + \frac{3\nu\overline{R}\,\overline{R^2}}{r} =$$
$$= -2\frac{\nu\overline{R\Theta}}{\tau}p_1 - \frac{\nu\overline{\Theta^2}}{\tau}q_1 + \frac{1}{3}\frac{r_0^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\nu r}{\tau}\frac{\partial\overline{R^2}}{\partial r}\right) + \frac{1}{3}z_0^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\nu}{\tau}\frac{\partial\overline{R^2}}{\partial z}\right), \quad (33)$$

$$\frac{\partial(\nu\overline{\Theta^2})}{\partial t} + \frac{\partial(\nu\overline{R}\overline{\Theta^2})}{\partial r} + \frac{\partial(\nu\overline{\Theta^2}\overline{Z})}{\partial z} + \frac{3\nu\overline{R}\overline{\Theta^2}}{r} =$$
$$= -\frac{\nu\overline{\Theta^2}}{\tau}(a + 2p_2 + q_2) + \frac{1}{3}\frac{r_0^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\nu r}{\tau}\frac{\partial\overline{\Theta^2}}{\partial r}\right) + \frac{1}{3}z_0^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\nu}{\tau}\frac{\partial\overline{\Theta^2}}{\partial z}\right), \quad (34)$$

$$\frac{\partial(\nu\overline{Z^2})}{\partial t} + \frac{\partial(\nu\overline{R}\overline{Z^2})}{\partial r} + 3\frac{\partial(\nu\overline{Z}\,\overline{Z^2})}{\partial z} + \frac{\nu\overline{R}\overline{Z^2}}{r} - 2\nu\overline{Z}\frac{\partial U}{\partial z} =$$
$$= -2\frac{\nu\overline{\Theta Z}}{\tau}p_3 - \frac{\nu\overline{\Theta^2}}{\tau}q_3 + \frac{1}{3}\frac{r_0^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\nu r}{\tau}\frac{\partial\overline{Z^2}}{\partial r}\right) + \frac{1}{3}z_0^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\nu}{\tau}\frac{\partial\overline{Z^2}}{\partial z}\right). \quad (35)$$

В правых частях уравнений (30) и (32) все члены, а в левых $\partial(\nu\overline{R})/\partial t$ и $\partial(\nu\overline{Z})/\partial t$ очень малы. Также очень малы члены $2\nu\overline{R}\overline{\Theta}p_1/\tau$ и $\nu\overline{\Theta}\overline{Z}p_3/\tau$ в уравнениях (33) и (35). Поэтому в дальнейшем будем пренебрегать этими членами.

Потенциал $U(r, z, t)$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=-4\pi G m\nu. \tag{36}$$

Система уравнений (29)—(36) определяет строение и эволюцию вращающейся квазистационарной системы. Искомыми функциями являются плотность и потенциал ν и U, компоненты скорости центроида $\overline{R}$, $\overline{\Theta}$ и $\overline{Z}$ и начальные моменты второго порядка распределения скоростей $\overline{R^2}$, $\overline{\Theta^2}$ и $\overline{Z^2}$.

3. *Уравнения состояния гомологичной вращающейся квазистационарной системы.* Решение уравнений состояния (29)—(36) является сложной задачей. Поэтому большое значение имеет возможность гомологичной эволюции вращающейся системы. Существование такой эволюции было уже доказано в случае изотропного распределения скоростей [4, 6].

Если система эволюционирует гомологично, то это означает, что изменение ее масштабов во всех направлениях происходит одинаковым образом и функции, описывающие ее состояние, должны иметь вид

$$\nu=\alpha x(\lambda r, \lambda z), \tag{37}$$

$$\nu\overline{R}=\beta y(\lambda r, \lambda z), \quad \frac{\overline{\Theta}}{r}=\gamma l(\lambda r, \lambda z), \quad \nu\overline{Z}=\delta h(\lambda r, \lambda z), \tag{38}$$

$$\overline{R^2}=\varepsilon g(\lambda r, \lambda z), \quad \overline{\Theta^2}=\iota j(\lambda r, \lambda z), \quad \overline{Z^2}=\mu k(\lambda r, \lambda z), \tag{39}$$

$$U=\sigma w(\lambda r, \lambda z), \tag{40}$$

где α, β, γ, δ, ε, ι, μ, σ и λ зависят только от времени.

Можно считать, что в начальный момент, например, в момент наблюдения $\alpha(t_0)=\cdots=\lambda(t_0)=1$ и, следовательно,

$$\nu=x(r, z), \tag{41}$$

$$\nu\overline{R}=y(r, z), \quad \frac{\overline{\Theta}}{r}=l(r, z), \quad \nu\overline{Z}=h(r, z) \tag{42}$$

$$\overline{R^2}=g(r, z), \quad \overline{\Theta^2}j=(r, z), \quad \overline{Z^2}=k(r, z), \tag{43}$$

$$U = w(r, z). \tag{44}$$

Если система гомологична, то после подстановки выражений (37)—(40) в уравнения состояния и перехода к независимым переменным $\rho = \lambda r$, $\xi = \lambda z$ все множители, зависящие от t, сокращаются. Таким образом, система уравнений приводится к системе уравнений с переменными ρ и ζ.

Для определения выражений функций $\alpha, \ldots, \lambda$ поступим как в случае сферической квазистационарной системы [7].

Из условий постоянства потенциальной энергии и кинетической энергии системы находим

$$\alpha = \lambda^{5/2}, \tag{45}$$

$$\varepsilon = \iota = \mu = \lambda^{1/2}. \tag{46}$$

Далее, из условия выполнения уравнения Пуассона в любой момент времени вытекает, что

$$\sigma = \lambda^{1/2}, \tag{47}$$

а из выражения времени релаксации следует, что

$$\gamma = \lambda^{5/4}. \tag{48}$$

Наконец, подставим условие равенства множителей, зависящих от времени во всех членах уравнения плотности (29). Так как в квазистационарной вращающейся системе компонента $\overline{\Theta}$ скорости центроида гораздо больше двух других, будем считать, что согласно (18)

$$V_{\bullet}' = \overline{\Theta}\left(\sqrt{\eta^2 + \frac{2U}{\overline{\Theta}^2} - 1} - \eta\right). \tag{49}$$

Тогда функции a, p_i и q_i $(i = 1, 2, 3)$ не зависят явно от времени. Получим

$$\beta = \delta = \lambda^{13/4}, \tag{50}$$

$$\dot{\lambda} = b\lambda^{11/4}, \tag{51}$$

где b — постоянная.

Интегрируя уравнение (51) с начальным условием $\lambda(t_0) = 1$, находим

$$\lambda = \left[1 - \frac{7}{4} b(t - t_0)\right]^{-4/7}. \tag{52}$$

Видно, что λ возрастает со временем и при

$$t - t_0 = \frac{4}{7} b^{-1} \tag{53}$$

становится бесконечно большим. В ходе эволюции система сжимается.

Опуская в уравнениях (29)—(36) малые члены, подставляя в них (37)—(40) и используя выражения (45)—(48), (50) и (51), получаем

$$\frac{5}{2} bx + b\rho \frac{\partial x}{\partial \rho} + b\zeta \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial h}{\partial \zeta} + \frac{y}{\rho} = -\frac{sx^2}{u^{3/2}} a, \tag{54}$$

$$\frac{\partial (xg)}{\partial \rho} - x \frac{\partial w}{\partial \rho} - \frac{xj}{\rho} + \frac{xg}{\rho} = 0, \tag{55}$$

$$\begin{gathered} \frac{11}{4} b\rho\, xl + b\rho \frac{\partial (\rho\, xl)}{\partial \rho} + b\zeta \frac{\partial (\rho\, xl)}{\partial \zeta} + \frac{\partial (\rho\, yl)}{\partial \rho} + \frac{\partial (\rho\, hl)}{\partial \zeta} + yl = \\ -\frac{s\rho\, x^2 l}{u^{3/2}} (a + p_2) + \frac{s}{3} \frac{\rho_0^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho^2 x^2}{u^{3/2}} \frac{\partial l}{\partial \rho} \right) + \frac{s}{3} \zeta_0^2 \rho \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{x^2}{u^{3/2}} \frac{\partial l}{\partial \zeta} \right), \end{gathered} \tag{56}$$

$$\frac{\partial (xh)}{\partial \zeta} - x \frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0, \tag{57}$$

$$\begin{gathered} 3bxg + b\rho \frac{\partial (xg)}{\partial \rho} + b\zeta \frac{\partial (xg)}{\partial \zeta} + 3 \frac{\partial (yg)}{\partial \rho} + \frac{\partial (hg)}{\partial \zeta} - 2y \frac{\partial w}{\partial \rho} - 2 \frac{yj}{\rho} + \\ + 3 \frac{yg}{\rho} = -\frac{s\rho^2 x^2 l^2}{u^{3/2}} q_1 + \frac{s}{3} \frac{\rho_0^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho x^2}{u^{3/2}} \frac{\partial g}{\partial \rho} \right) + \frac{s}{3} \zeta_0^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{x^2}{u^{3/2}} \frac{\partial g}{\partial \zeta} \right), \end{gathered} \tag{58}$$

$$\begin{gathered} 3bxj + b\rho \frac{\partial (xj)}{\partial \rho} + b\zeta \frac{\partial (xj)}{\partial \zeta} + \frac{\partial (yj)}{\partial \rho} + \frac{\partial (hj)}{\partial \zeta} + 3 \frac{yj}{\rho} = \\ = -\frac{s\rho^2 x^2 l^2}{u^{3/2}} (a + 2p_2 + q_2) + \frac{s}{3} \frac{\rho_0^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho x^2}{u^{3/2}} \frac{\partial j}{\partial \rho} \right) + \frac{s}{3} \zeta_0^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{x^2}{u^{3/2}} \frac{\partial j}{\partial \zeta} \right), \end{gathered} \tag{59}$$

$$\begin{gathered} 3bxk + b\rho \frac{\partial (xk)}{\partial \rho} + b\zeta \frac{\partial (xk)}{\partial \zeta} + \frac{\partial (yk)}{\partial \rho} + 3 \frac{\partial (hk)}{\partial \zeta} + \frac{yk}{\rho} - 2h \frac{\partial w}{\partial \zeta} = \\ = -\frac{s\rho^2 x^2 l^2}{\partial \rho} q_3 + \frac{s}{3} \frac{\rho_0^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho x^2}{u^{3/2}} \frac{\partial k}{\partial \rho} \right) + \frac{s}{3} \zeta_0^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{x^2}{u^{3/2}} \frac{\partial k}{\partial \zeta} \right), \end{gathered} \tag{60}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = -cx, \tag{61}$$

где

$$u = g + j + k - \rho^2 l^2, \tag{62}$$

$$c = 4\pi\, Gm, \tag{63}$$

$$s = \frac{Lc^2}{16\,\pi^2}. \tag{64}$$

В уравнениях (54)—(60) произошло полное сокращение всех множителей, содержащих λ. Уравнения соответственно сократились на $\lambda^{17/4}$, $\lambda^{16/4}$, $\lambda^{16/4}$, $\lambda^{18/4}$, $\lambda^{19/4}$, $\lambda^{19/4}$ и $\lambda^{19/4}$. Эти множители характеризуют скорости изменения членов уравнений в ходе эволюции. Так как члены, которыми мы пренебрегли в уравнениях (29)—(36), очень малы в сравнении с другими членами, то можно считать, что гомологичность системы фактически полная.

Для определения постоянной b, входящей в уравнения, помножим уравнения (54) на элемент объема $dv^* = 2\pi\rho\, d\rho\, d\zeta$ и проинтегрируем по всему пространству. Получим

$$\frac{b}{2} = \frac{\displaystyle\int \frac{sx}{u^{3/2}}\, axdv^*}{\displaystyle\int xdv^*}, \tag{65}$$

т. е. $b/2$ есть скорость диссипации системы.

Для гомологичности необходимо также равенство изменения кинетического момента системы относительно центра кинетическому моменту, уносимому диссипирующими телами (внутреннее трение приводит только к перераспределению кинетического момента внутри системы).

Кинетический момент единицы объема системы относительно центра равен

$$\vec{k} = m\nu\, [r^2\overline{Z}^2 + z^2(\overline{R}^2 + \overline{\Theta}^2) - 2rz\overline{R}\overline{Z}]^{1/2}\, \frac{\vec{r}}{r} + m\nu\overline{\Theta}\, r\, \frac{\vec{z}}{z}, \tag{66}$$

а кинетический момент уносимого диссипирующего тела

$$\vec{k}_e = (\vec{r} + \vec{z}) \times m\vec{V}_e = (\vec{r} + \vec{z}) \times m\vec{\overline{V}} + (\vec{r} + \vec{z}) \times m\vec{V}_e. \tag{67}$$

Поступая как в случае получения импульса, уносимого диссипирующими телами, находим кинетический момент, уносимый из единичного объема в единицу времени

$$m\frac{\nu}{\tau}\overline{\Theta}\left\{(a+p_2)^2+\left[\left(\frac{\overline{R}}{\overline{\Theta}}a+p_1\right)-\frac{r}{z}\left(\frac{\overline{Z}}{\overline{\Theta}}a+p_3\right)\right]^2\right\}^{1/2}z\frac{\vec{r}}{r}+$$

$$+m\frac{\nu}{\tau}\overline{\Theta}(a+p_2)r\frac{\vec{z}}{z}. \qquad (68)$$

Из условия равенства изменения кинетического момента моменту, уносимому диссипирующими телами, вытекают условия

$$\frac{d}{dt}\int\nu\overline{\Theta}z\,dv=-\int\frac{\nu}{\tau}\overline{\Theta}\left[(a+p_2)^2+\left(p_1-\frac{r}{z}p_2\right)^2\right]^{1/2}z\,dv, \qquad (69)$$

$$\frac{d}{dt}\int\nu\overline{\Theta}r\,dv=-\int\frac{\nu}{\tau}\overline{\Theta}(a+p_2)r\,dv, \qquad (70)$$

если опустить малые величины.

Используя (19), (37)—(39), находим

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\alpha\gamma}{\lambda^5}\right)\int xl\rho\zeta\,dv^*=-\frac{\alpha^2\gamma}{\varepsilon^{3/2}\lambda^5}\int\frac{sx^2l}{u^{3/2}}\left[(a+p_2)^2+\left(p_1-\frac{\rho}{\zeta}p_3\right)^2\right]^{1/2}\rho\zeta\,dv^*, \qquad (71)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\alpha\gamma}{\lambda^5}\right)\int xl\rho^2\,dv^*=-\frac{\alpha^2\gamma}{\varepsilon^{3/2}\lambda^5}\int\frac{sx^2l}{u^{3/2}}(a+p_2)\rho^2\,dv^* \qquad (72)$$

или, после сокращения множителя $\lambda^{1/2}$,

$$\frac{5}{2}b\int xl\rho\zeta\,dv^*=\int\frac{sx^2l}{u^{3/2}}\left[(a+p_2)^2+\left(p_1-\frac{\rho}{\zeta}p_3\right)^2\right]^{1/2}\rho\zeta\,dv^*, \qquad (73)$$

$$\frac{5}{2}b\int xl\rho^2\,dv^*=\int\frac{sx^2l}{u^{3/2}}(a+p_2)\rho^2\,dv^*. \qquad (74)$$

Условие (74) является основным, а условие (73) не играет существенной роли, так как момент системы относительно оси, перпендикулярной оси симметрии, близок к нулю и в случае существования плоскости симметрии равен нулю.

Как показали Г. М. Идлис [8] и Г. Г. Кузмин [9], вращающаяся система, стационарная в регулярном поле, обладает плоскостью симметрии. Поэтому для гомологичной системы каждая часть равенства (73) должна быть равна нулю.

Если подставим выражение (65) в (74) и поделим на квадрат числа тел системы, то получим

$$\frac{5}{2}\overline{\left(\frac{a}{\tau^*}\right)}\,\overline{(l\rho^2)}=\overline{\left(\frac{a+p_2}{\tau^*}l\rho^2\right)}, \qquad (75)$$

где черта означает усреднение по всей системе. Из (75) следует, что

$$\frac{5}{2}\bar{a} \approx \bar{a} + \bar{p}_2 \tag{76}$$

или

$$\bar{p}_2 \approx \frac{3}{2}\bar{a}. \tag{77}$$

Следовательно, если система гомологична, то средняя величина избыточного кинетического момента относительно оси симметрии, уносимого при диссипации, равна 3/2 величины уносимого среднего момента относительно той же оси.

Решение системы дифференциальных уравнений с частными производными (54)—(61), полученное численными методами при заданных граничных условиях, опишет состояние гомологичной системы.

Ленинградский Государственный университет

Бухарестский университет

THE ROTATING SYSTEMS OF GRAVITATING BODIES IN QUASI-STATIONARY STATE

T. A. AGEKIAN, I. M. MICHEILE

The system of equations describing the state and the evolution of rotating quasi-stationary system of gravitating bodies is given. Unlike the previous results the theory is free from the assumption of equality of components of pecular velocity dispersion. It is shown that there exists a rotating quasi-stationary system the evolution of which is homological. The superfluous rotating momentum carried out by dissipating stars in such the system is equal in average to 3/2 of the mean rotating momentum of the stars.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Т. А. Агекян*, Астрон. ж., 37, 317, 1960.
2. *К. Ф. Огородников*, Астрон. ж., 34, 770, 1957.
3. *Г. Г. Кузмин*, Труды Астрофиз. ин-та АН Каз.ССР, 5, 70, 1965.
4. *Т. А. Агекян*, Астрон. ж., 43, 425, 1966.
5. *Л. Э. Гуревич, Б. Ю. Левин*, ДАН СССР, 70, 781, 1950.
6. *Т. А. Агекян*, Астрон. ж., 35. 26, 1958.
7. *Т. А. Агекян*, Астрон. ж., 40, 318, 1963; 41, 523, 1964.
8. *Г. М. Идлис*, Известия Астофиз. ин-та АН Каз.ССР, 13, 3, 1962.
9. *Г. Г. Кузмин*, Публ. Тартуской астрон. обс., 34, 9, 1964.