АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 5 НОЯБРЬ, 1969 ВЫПУСК 4

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ НА КОНВЕКЦИЮ В ПОЛИТРОПНОЙ АТМОСФЕРЕ

Н. С. ПЕТРУХИН

Поступила 20 ноября 1968

Методом возмущений, аналитически исследовано влияние излучения на конвективную неустойчивость политропной атмосферы. Рассматриваются оптически нетонкие возмущения ($\tau > 1$). Найдены матричные элементы, позволяющие определить в первом приближении для любой моды инкремент нарастания возмущений и функции, характеризующие конвективное движение. В явном виде получено и исследовано выражение для скорости роста возмущений основной моды.

Хорошо известно, что атмосферы молодых звезд (например, типа T Tau) обладают сильной динамической активностью, природа которой окончательно не выяснена. Можно предполагать, что эта активность связана с интенсивным конвективным движением в звездах. В частности, в современных моделях сжимающихся протозвезд [11] конвекция играет определяющую роль. Поэтому необходим физический анализ условий возникновения конвекции, влияния на нее магнитного поля и излучения.

Влияние излучения на конвекцию в политропной атмосфере рассматривалось в [1, 2]. В работе [1] Бём и Рихтер исследовали численно крупномасштабную конвекцию для частного случая, когда коэффициент непрозрачности, рассчитанный на грамм вещества, пропорционален газовому давлению. В работе [2] Шпигель провел аналитические исследования некоторых предельных случаев. Так, им рассмотрены неустойчивость возмущений в тонком слое жидкости, а также поведение оптически тонких ($\tau \ll 1$) возмущений в политропном слое произвольной толщины.

Особенно важны аналитические исследования, так как они дают наиболее полную информацию о характере процесса и, кроме того, их результаты, вероятно, могут быть использованы в качестве начальных условий для нелинейных задач [3].

В настоящей работе аналитически исследавано влияние высвечивания на конвективную неустойчивость оптически нетонких ($\tau \geqslant 1$) возмущений, распространяющихся в политропной атмосфере.

Исходными уравнениями задачи являются обычные уравнения газодинамики без учета вязкости. В уравнение энергии входит член, характеризующий обмен энергией между движущимся элементом газа и окружающей средой. Пользуясь методом Ламба [7] линеаризации исходной системы, после довольно сложных преобразований получаем:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{c^2\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}+\left(\frac{dc^2}{dz}+\gamma g\right)\frac{\partial\chi}{\partial z}-\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}+c^2\Delta_1\chi+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\rho_0}\left[\frac{d\rho_0}{dz}\frac{\partial Q}{\partial z}+\Delta_1 Q\right]\right\}=\Delta_1\left\{g\left[\frac{dc^2}{dz}-g(\gamma-1)\right]\chi-\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz}Q\right\}, \tag{1}$$

где: χ — дивергенция скорости, Q — функция, определяющая неадиабатичность движения, γ — отношение удельных теплоемкостей, g — ускорение силы тяжести, z — вертикальная координата, c и ρ_0 — скорость звука и невозмущенная плотность газа, функции от глубины, и $\Delta_1=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$.

В уравнении (1) переменные разделяются. Так как его коэффициенты не зависят от x, y и t, можно положить, что функции χ и Q изменяются со временем как e^{nt}, где n — постоянная, и гармоничны в горизонтальной плоскости, т. е.

$$\chi/u(z)=Q/q(z)=\exp\{nt+i(k_x x+k_y y)\},$$

где $k^2=k_x^2+k_y^2$, k — горизонтальное волновое число и $u(z)$ и $q(z)$ — амплитуды возмущений, функции только от z. Учитывая это, получаем основное уравнение для амплитуд. Так как теперь коэффициенты и функции уравнения зависят только от одной переменной z, можно перейти к полным производным:

$$c^2\frac{d^2u}{dz^2}+\left(\frac{dc^2}{dz}+\gamma g\right)\frac{du}{dz}-\left\{k^2c^2+n^2-\frac{gk^2}{n^2}\left[\frac{dc^2}{dz}-g(\gamma-1)\right]\right\}u=$$
$$=\frac{1}{\rho_0}\left\{-\frac{d^2q}{dz^2}+\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz}\frac{dq}{dz}+\left[k^2+\frac{gk^2}{n^2}\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz}\right]q\right\}. \tag{2}$$

Уравнение (2) описывает поведение возмущений в атмосфере с произвольной стратификацией. Применим его к политропной атмосфере. Как известно, в такой атмосфере невозмущенные давление P_0 и плотность ρ_0 связаны соотношением $P_0 \sim \rho_0^\Gamma$, где Γ — показатель политропы — постоянная величина, и скорость звука $c = \left(\gamma \frac{\Gamma-1}{\Gamma} gz\right)^{1/2}$. Подставляя в (2) значения ρ_0 и c и вводя новые переменные $\xi = 2kz$ и $\psi(\xi) = u \cdot e^{\xi/2}$, получаем в самосопряженном виде

$$\frac{d}{d\xi}\left[\xi^{\alpha+1} e^{-\xi} \frac{d\psi}{d\xi}\right] - \lambda \xi^\alpha e^{-\xi}\psi =$$
$$= -\frac{2\alpha k \xi^\alpha e^{-\xi/2}}{\gamma \rho_0 g}\left\{\frac{d^2 q}{d\xi^2} - \frac{\alpha-1}{\xi}\frac{dq}{d\xi} - \left[\frac{1}{4} + \frac{\alpha-1}{2\sigma^2 \xi}\right] q\right\}, \tag{3}$$

где

$$\lambda = \frac{1}{2}\left[\frac{\sigma^2 \alpha}{\gamma} + \alpha + 1 - \frac{\alpha - \gamma(\alpha-1)}{\gamma\sigma^2}\right]; \quad \sigma^2 = \frac{n^2}{gk}; \quad \alpha = \frac{\Gamma}{\Gamma - 1}. \tag{4}$$

Уравнение (3) совместно с подходящими граничными условиями представляет собой задачу на собственные значения. На одном из концов (при $\xi = 0$) она имеет особенность, которая появляется из-за обращения в нуль невозмущенных функций (ρ_0, c) на поверхности звезды. Учитывая это, потребуем конечности функций $\psi(\xi)$ при ξ — стремящейся к нулю и при ξ — стремящейся к бесконечности. Нетрудно показать, что в адиабатическом случае $(q \equiv 0)$ решением уравнения (3) с такими граничными условиями являются собственные значения $\lambda_n = -n$, где $n = 0, 1, 2\ldots$ и собственные функции $\psi_n = L_n^\alpha(\xi)$, где $L_n^\alpha(\xi)$ — обобщенные полиномы Лагерра.

Решим задачу (3) методом возмущений. В качестве нулевого приближения возьмем решение для адиабатического случая, собственные функции которого, как известно [4], образуют на положительном, полубесконечном интервале полную ортонормированную систему с весовой функцией $[e^{-\xi}\xi^\alpha n!/\Gamma(\alpha+n+1)]^{1/2}$. Разложение в ряд проведем по степеням параметра ε, явный вид которого определим ниже.

Из теории возмущений получаем в первом приближении поправки к собственным значениям и собственным функциям задачи (3):

$$\lambda_n^1 = d_{nn}; \qquad \psi_n^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_{nk}}{\lambda_n^0 - \lambda_k^0}\psi_k^0, \qquad n \neq k, \tag{5}$$

где нижний индекс величин λ и ψ показывает номер моды (номер собственного значения) и верхний — порядок приближения. Матричные элементы d_{nk} находятся из соотношения

$$d_{nk}=\binom{n+\alpha}{n}\frac{\sqrt{n!\,k!}}{\sqrt{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\alpha+k+1)}}\int\limits_0^\infty r_n(\xi)\,L_k^\alpha(\xi)\,d\xi, \qquad (6)$$

где функция $r_n(\xi)$ равна первой части уравнения (3), поделенной на параметр ε.

Для вычисления матричных элементов (6) необходимо определить явный вид функции $r_n(\xi)$. В $r_n(\xi)$, в свою очередь, входить функция q, характеризующая неадиабатичность движения. В астрофизической конвекции наиболее эффективным механизмом обмена энергией является излучение, поэтому в уравнении сохранения энергии учтем лишь лучистый перенос энергии. Будем рассматривать возмущения с оптической толщиной $\tau\gg 1$, для которых решение уравнения переноса можно проводить в эддингтоновском приближении. Коэффицент непрозрачности, рассчитанный на грамм вещества, возьмем в виде $\varkappa=\varkappa_* T^b\rho^l$, где $\varkappa_*$, b и l—постоянные величины. В этом приближении функция q для политропной атмосферы определена в [1] (формула (36), в которой функции q соответствует $(\gamma-1)\operatorname{div} F$, где F — лучистый поток). В q входят в нулевом приближении возмущения температуры и плотности. Их выражения через дивергенцию скорости можно вычислить соответственно из уравнения сохранения энергии для адиабатического случая и уравнения непрерывности. Подставляя функции T и ρ в q и затем в $r_n(\xi)$, после довольно громоздких преобразований находим матричные элементы (6). В явном виде они определяются формулой (П. 1), приведенной ниже в приложении. Из нее можно найти любые матричные элементы, а, следовательно, поправки первого приближения (5) к любой собственной функции и собственному значению. Определим поправки к решению основной моды. При $n=0$ обобщенные полиномы Лагерра равны единице, поэтому в фигурных скобках в (П. 1) останется только последний член. Интеграл от оставшейся функции легко вычисляется [6] и окончательно получаем

$$d_{0k}=-\frac{D_0}{\alpha+k}\sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{k!}}. \qquad (7)$$

Здесь D_0 — постоянная, равная:

$$D_0=\frac{(\gamma-1)(\alpha-1)^2\left[l(\alpha+1)+\dfrac{\alpha(\gamma-1)}{\gamma^2}+\dfrac{(\alpha+1)^2}{\alpha}\right]}{4\sqrt{2}\,\Gamma(\alpha)\sqrt{\Gamma(\alpha+1)}\,\sigma_0^0}\,\xi_0^{\alpha+\frac{1}{2}}, \qquad (8)$$

где $\xi_0 = 2kd$, d — глубина конвективной зоны и σ_0^0 — безразмерный инкремент адиабатических возмущений. Из (5) замечаем, что диагональный матричный элемент d_{00} дает поправку к собственному значению основной моды. Таким образом, учитывая (4), получаем в первом приближении дисперсионное соотношение для основной моды:

$$\frac{\sigma_0^2 \Gamma}{\gamma} + 2\Gamma - 1 - \frac{\Gamma - \gamma}{\gamma \sigma_0^2} = -\varepsilon m \xi_0^{\alpha + 1/2}. \tag{9}$$

Здесь

$$m = \frac{(\gamma - 1)\left[l + \frac{\alpha(\gamma - 1)}{\gamma^2(\alpha - 1)} + \frac{\alpha + 1}{\alpha}\right]}{2\sqrt{2}\,\Gamma(\alpha + 2)\,\sigma_0^0};$$

$$\varepsilon = \frac{32\sigma\left(\frac{\Gamma - 1}{\Gamma}\right)^{3-b} g^{2,5-b}\mu^{4-b}}{3\varkappa_* A^{l+2} R^{4-b} d^{(3\Gamma-1)/2(\Gamma-1)}}, \tag{10}$$

где σ — постоянная Стефана-Больцмана, A — постоянная, определяющая масштаб шкалы плотностей, μ — молекулярный вес, R — газовая постоянная, ε — параметр, в ряды по степеням которого проводились разложения отыскиваемых решений. В работе [10] показано, что эта постоянная пропорциональна отношению лучистого потока к потоку механической энергии газа, имеющего давление $P_0(d)$ и движущегося со скоростью звука $c(d)$, где d — глубина конвективной зоны.

Выражение (9) определяет два типа волн — акустические и гравитационные. Рассмотрим гравитационные волны, неустойчивость которых приводит к конвекции. Как показали Шпигель и Унно [9], в адиабатическом случае $\sigma_0^{0^2}$ — малая величина. Излучение, как известно, понижает степень неустойчивости, поэтому безразмерный инкремент в неадиабатическом случае будет меньше адиабатического или одного порядка с ним. Поэтому, отбрасывая в (9) малый член, пропорциональный σ_0^2, находим

$$\sigma_0^2 = \frac{\Gamma - \gamma}{\gamma\left[2\Gamma - 1 + \varepsilon m\,\xi_0^{\alpha + 1/2}\right]}. \tag{11}$$

Из этого выражения замечаем, что в первом приближении излучение не меняет критерий конвективной неустойчивости ($\Gamma > \gamma$). При $\varepsilon = 0$ (11) переходит в соотношение, полученное для основной моды в адиабатическом приближении Шпигелем и Унно [9]. Как известно, в этом случае $\sigma_0^{0^2}$ не зависит от масштаба возмущений. При $\varepsilon \neq 0$, как видно из (11), σ_0^2 является монотонно убывающей функцией от ξ_0.

Подставляя в (11) вместо σ_0^2 ее значения из (4), получаем выражение для квадрата инкремента

$$\frac{n^2 d}{g} = \frac{(\Gamma - \gamma)\,\xi_0}{2\gamma\,[2\Gamma - 1 + \varepsilon m \xi_0^{\alpha + {}^1/_2}]}. \tag{12}$$

При $\varepsilon = 0$ функция $n^2(\xi_0)$ — линейная. Высвечивание уменьшает инкремент, причем этот эффект заметнее для больших волновых чисел. Далее, из (12) замечаем, что с увеличением параметра α скорость роста возмущений уменьшается. Большие значения α соответствуют меньшим показателям политропы Γ. Параметр Γ, как известно, характеризует неоднородность атмосферы, а именно, чем меньше Γ, тем неоднородность атмосферы более резкая. Таким образом, зависимость n^2 от α показывает, что при прочих равных условиях в атмосферах с более резкой зависимостью плотности (а следовательно, и давления) от глубины влияние излучения на конвекцию более заметно. Наименее эффективно в этом смысле излучение в однородной атмосфере $\alpha = 1$.

Определим, при каком значении ξ_0 функция (12) принимает наибольшее значение. Другими словами, найдем волновое число самого неустойчивого возмущения. Дифференцируя (12) по ξ_0 и приравнивая производную к нулю, получаем:

$$\xi_{0\,max} = \left[\frac{\alpha + 1}{(\alpha - 1)\left(\alpha + \dfrac{1}{2}\right)\varepsilon m}\right]^{\frac{2}{2\alpha+1}}. \tag{13}$$

Как известно [9], в политропной атмосфере без учета излучения наиболее неустойчивыми являются возмущения бесконечно малых масштабов (коротковолновая „катастрофа“). Этот эффект легко получить из (13). Действительно, если ε стремится к нулю, ξ_{0max} стремится к бесконечности. Если $\varepsilon \neq 0$, максимальное значение функции (12) достигается при конечном безразмерном волновом числе, причем при возрастании параметра ε, ξ_{0max} сдвигается в сторону меньших ξ_0. Так как коэффициент ε пропорционален лучистому потоку, можно сказать, что чем больше поток энергии, тем больше масштаб наиболее неустойчивых возмущений. Этот эффект имеет простое физическое объяснение. Как известно, возрастание потока эквивалентно уменьшению коэффициента непрозрачности, а следовательно, усилению высвечивания. С уменьшением коэффициента непрозрачности эффект лучистого затухания захватывает возмущения все больших масштабов.

Найдем, как меняется значение наиболее неустойчивых масштабов при изменении параметра α. Из (13) можно заметить, что в однородной атмосфере ($\alpha=1$) наиболее неустойчивыми являются возмущения бесконечно малых масштабов. С возрастанием α, $\xi_{0\max}$ смещается в длинноволновую область.

В заключение оценим интервал изменения безразмерных волновых чисел ξ_0, для которого применимы результаты данной задачи. Как известно [5], теория возмущений дает хорошее приближение, если матричные элементы (П. 1) малы по сравнению с отношением соответствующих разностей невозмущенных собственных значений к постоянной ε. Будем рассматривать случаи, когда невозмущенный коэффициент непрозрачности не уменьшается с глубиной. Можно показать [10], что это будет иметь место, если показатель $\Gamma > 4/3$ (или $\alpha \leqslant 4$). При таких α теория возмущений применима к возмущениям с ξ_0, подчиняющимся условию

$$\xi_0 < [\varepsilon m]^{-\frac{2}{2\alpha+1}}. \tag{14}$$

Сравнивая (14) с (13), замечаем, что практически полученные результаты применимы к возмущениям с ξ_0 вплоть до $\xi_{0\max}$. К сожалению, поведение функции при больших значениях ξ_0 остается неизвестным. Для очень малых масштабов, когда влияние излучения велико и применим ньютоновский закон высвечивания, эта зависимость была исследована Шпигелем [2]. Он показал, что с возрастанием волнового числа инкремент продолжает расти. Возможно, функция $n_0^2(\xi)$ при значениях аргумента немного больших $\xi_{0\max}$ вначале будет убывать с ростом ξ_0 и затем, войдя в область оптически тонких возмущений, где применимы результаты исследований [2], начнет вновь возрастать. На уменьшение инкремента после максимума указывают численные исследования [1].

Работа выполнена под руководством С. А. Каплана, которому автор выражает глубокую благодарность.

Приложение

Матричные элементы d_{nk}^{rr} (6) определяются выражением:

$$d_{nk} = \frac{a\sqrt{n!\,k!}}{\sqrt{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\alpha+k+1)}} \int_0^\infty e^{-\xi}\Big\{-2l\xi \frac{d^3}{d\xi^3}L_n^\alpha(\xi) + \tag{П.1}$$

$$+ [(3l+\beta_n)\xi + l(\alpha-1)]\frac{d^2}{d\xi^2}L_n^\alpha(\xi) +$$

$$+\left[(\alpha-1)\left(\frac{l}{\sigma_n^{0^2}}-2l-\beta_n\right)-(l+\beta_n)\xi\right]\frac{d}{d\xi}L_n^{\alpha}(\xi)+$$
$$+\frac{1}{2}(\alpha-1)(l+\beta_n)\left[1-\frac{1}{\sigma_n^{0^2}}\right]L_n^{\alpha}(\xi)\Big\}L_k^{\alpha}(\xi)\,d\xi, \tag{П.1}$$

где

$$a=\frac{[\alpha-(\alpha-1)\gamma](\gamma-1)}{2\sqrt{2}\,\alpha\gamma\sigma_n^0}\xi_0^{\alpha+\frac{1}{2}} \tag{П. 2}$$

и

$$\beta_n=\frac{a(\gamma-1)}{\gamma^2(\alpha+2n+1)}+\frac{\alpha+2n+1}{a}. \tag{П. 3}$$

Горьковский политехнический
институт

THE INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF RADIATION ON THE CONVECTION IN POLYTROPIC ATMOSPHERE

N. S. PETRUCHIN

The effect of radiation on convection of an unstable polytropic atmosphere are analytically investigated by the method of disturbance. Disturbances with optical thickness $\tau > 1$ are considered. Some matrix elements which allow to determine the growth-rate and the functions characterizing convective motions for any mode at the first approximation are found. The expression for the growth-rate of the main mode is received and investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *K. H. Böhm, E. Richter*, Z. Astrophys., 48, 231, 1959.
2. *E. Spiegel*, Ap. J, 139, 959, 1964.
3. *P. Ledoux, M. Schwarzshild, E. Spiegel*, Ap. J., 133, 184, 1961.
4. *Р. Курант, Д. Гильберт*, Методы математической физики. 1, ГИТТЛ, М., 1951.
5. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Квантовая механика, Физматгиз, М., 1963.
6. *Н. С. Градштейн, И. Н. Рыжик*, Таблицы интегралов, Физматгиз, М., 1963.
7. *Г. Ламб*, Гидродинамика, Гостехиздат, М., 1947.
8. *Г. Бейтмен, Н. Эрдейн*, Высшие трансцендентные функции, 2, Наука, М., 1966.
9. *E. Spiegel, W. Unno*, Publ. Astr. Soc. Japan, 14, 28, 1962.
10. *Н. С. Петрухин*, Диссертация, Горький, 1968.
11. *S. Hayashi*, Publ. Astr. Soc. Japan, 13, 450, 1961.