АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 5 НОЯБРЬ, 1969 ВЫПУСК 4

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НЕЙТРИНО В АНИЗОТРОПНЫХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

А. Г. ДОРОШКЕВИЧ, Я. Б. ЗЕЛЬДОВИЧ, И. Д. НОВИКОВ

Поступила 4 марта 1969

Рассмотрены вопросы о роли нейтрино и других слабовзаимодействующих частиц в анизотропной космологической модели. Методом кинетической теории показано, что при реальных свойствах нейтрино они становятся свободными на анизотропной стадии расширения, когда анизотропия расширения еще велика. После этого все процессы протекают так, как это описано в работе авторов [12].

Различные возможности выхода за рамки модели Фридмана широко обсуждаются в последнее время как в связи с вопросами ранних стадий эволюции Метагалактики и возможной анизотропии реликтового излучения, так и в связи с вопросами образования галактик [1—10].

В настоящей работе мы ограничимся анализом вопроса о поведении слабовзаимодействующих частиц в простейшей однородной, но анизотропной модели. Этот вопрос обсуждался с различных точек зрения Дорошкевичем, Зельдовичем и Новиковым (Д.З.Н.) [11, 12] и Мизнером [13, 14] (см. также Стюарт [15]).

Определяющим для физики процессов и для динамики расширения анизотропной космологической модели является поведение слабовзаимодействующих частиц (для определенности говорим о нейтрино, подразумевая нейтрино и антинейтрино всех сортов) при резко анизотропном расширении в то время, когда температура упала настолько, что процессы с нейтрино идут уже достаточно медленно по сравнению со скоростью изменения параметров системы и термодинамическое равновесие (для нейтрино) нарушается.

В работах Д.З.Н. [11, 12], с одной стороны, и в работах Мизнера [13, 14], с другой стороны, поведение нейтрино рассмотрены в двух крайних предположениях.

В [11, 12] предполагалось, что после некоторого момента $t = \tau$ вероятность взаимодействия нейтрино с другими частицами и между собой мала, нейтрино становятся свободными. При этом компонента импульса нейтрино вдоль оси x_1, по которой происходит сжатие, возрастает в силу „синего" смещения. Распределение импульсов нейтрино становится резко анизотропным, вытянутым в направлении сжатия: вдоль оси x_1, энергия каждого нейтрино растет.

Часть нейтрино и летящих навстречу антинейтрино получает такую энергию, что становится заметной вероятность их необратимого превращения в электроны и позитроны. В [11, 12] предположено, что это основной процесс роста энтропии.

Мизнер [13, 14] рассматривал проблему отклонения нейтрино от термодинамического равновесия, пользуясь приближением вязкости в уравнениях гидродинамики. Две точки зрения (Мизнера [13, 14] и Д.З.Н. [11, 12]) на характер поведения слабовзаимодействующих частиц, приводят к существенно разным физическим следствиям: на ранних, резко анизотропных стадиях расширения по разным законам должны меняться температура и энтропия взаимодействующих частиц. Особенно сильно отличаются число и энергия слабовзаимодействующих частиц. Разными оказываются и наблюдательные предсказания об ожидаемой сегодняшней величине анизотропии реликтового электромагнитного излучения и о энергии реликтовых нейтрино.

Это различие в выводах заставляет исследовать вопрос подробнее.

Подробный анализ анизотропной космологической модели требует решения уравнений Эйнштейна совместно с кинетическим уравнением, описывающим поведение свободных и слабовзаимодействующих частиц. Такой анализ чрезвычайно сложен и в настоящее время неосуществим как в силу математических трудностей, так и из-за недостаточности наших знаний о свойствах элементарных частиц при сверхвысоких энергиях. Однако при ряде упрощающих предположений некоторые сведения о свойствах анизотропных космологических моделей с учетом влияния свободных частиц могут быть получены. Также могут быть получены некоторые выводы, допускающие экспериментальную проверку.

Ниже мы ограничимся анализом влияния слабовзаимодействующих частиц на динамику простейшей однородной анизотропной модели с метрикой

$$ds^2 = dt^2 - a_1^2(t)\,dx_1^2 - a_2^2(t)\,dx_2^2 - a_3^2(t)\,dx_3^2 \tag{1}$$

(скорость света $c = 1$).

Модели с метрикой (1) подробно изучены [2, 3, 5, 9]. Вблизи особой точки зависимость компонент метрического тензора a_1, a_2, a_3 от времени имеет асимптотический (при $t \to 0$) вид: $a_1 = a_{10}t^{p_1}$; $a_2 = a_{20}t^{p_2}$; $a_3 = a_{30}t^{p_3}$

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = p_1 + p_2 + p_3 = 1; \quad p_1 \leqslant p_2 \leqslant p_3. \tag{2}$$

На этом этапе сопутствующий объем меняется пропорционально $(a_1 a_2 a_3) \sim t$, плотность сохраняющихся частиц пропорциональна t^{-1}, а плотность равновесного ультрарелятивистского газа с уравнением состояния $P = \varepsilon/3$ меняется как

$$\varepsilon = K^* t^{-4/3}. \tag{3}$$

Характер расширения определяется заданием одного показателя, например, наименьшего $p_1 = -\alpha\,(0 \leqslant \alpha \leqslant 1/3)$. При этом по соответствующей оси происходит сжатие вещества (за исключением случая $\alpha = 0$), по двум другим — расширение. Постоянная K является (наряду с α) произвольным параметром модели.

На этой стадии наличие материи не влияет на динамику расширения [3]. Эту стадию можно назвать „вакуумной".

В дальнейшем, в ходе расширения, материя начинает влиять на динамику расширения.

Легко показать, даже без решения уравнений Эйнштейна (см. например, [12]), что конец „вакуумного" решения в задаче с учетом лишь ультрарелятивистского газа с уравнением состояния $P = \varepsilon/3$ происходит в момент (положим $8\pi G = 1$)

$$t = \theta \simeq K^{*\,-3/2}. \tag{4}$$

В дальнейшем решение быстро стремится к изотропному:

$$a_1 \simeq a_2 \simeq a_3 \sim t^{1/2}; \qquad \varepsilon \sim t^{-2}. \tag{5}$$

Ниже, в разделе 2, будут коротко изложены результаты работ Д.З.Н. [11, 12]. В следующем разделе 3 излагаются метод и основные результаты Мизнера [13, 14]. Наконец в 4 и 5 сравниваются результаты обоих методов и выясняется, в каких условиях осуществляется решение Д.З.Н. и в каких—Мизнера.

2. *Нейтрино в анизотропном решении.* Следуя работе [12] (с небольшими обобщениями), предположим, что вблизи особой точки все

частицы находятся в состоянии термодинамического равновесия, и что в ходе расширения в момент $t=\tau$ время релаксации нейтрино и гидродинамическое время сравниваются

$$\sigma n_\nu t = 1, \tag{6}$$

где σ — сечение взаимодействия $\nu + \bar{\nu} \rightleftarrows e^+ + e^-$, как и выше $c \equiv 1$. Будем считать $\tau \ll \theta$. Момент „освобождения" τ нейтрино в анизотропной модели можно связать с моментом освобождения τ' нейтрино в модели Фридмана ($\tau' = 0.1$ *сек*),

$$\tau \simeq \tau'^{5/4} \theta^{-1/4}. \tag{7}$$

При $t > \tau$ компонента импульса нейтрино по оси $x_1\,(t_1)$ растет и соответственно увеличивается сечение взаимодействия.

Для процесса рассеяния нейтрино

$$\nu_e + e^- \rightleftarrows \nu_e + e^- \tag{8}$$

сечение пропорционально $\sigma \sim \bar{E}_\nu \bar{E}_e$. Из условия свободного движения нейтрино $\sigma n t < 1$ и соотношений (для адиабатического расширения) $n_e \sim t^{-1}$, $E_e \sim T \sim t^{-1/3}$ получаем, что этот процесс не допускает роста E_ν, быстрее чем $t^{1/3}$, но поскольку $\alpha \leqslant 1/3$, то $E_\nu \sim t^\alpha$ и не может расти быстрее. Таким образом, этот процесс сам по себе не приводит к нарушению условия $\sigma n t < 1$ и к заметной перекачке энергии свободных нейтрино в пары e^+e^-. (О значении этого процесса при наличии аннигиляции нейтрино см. конец раздела).

Однако это не так для процесса аннигиляции $\nu + \bar{\nu} \rightleftarrows e^+ + e^-$. Сечение этого процесса $\sigma \sim \bar{E}_\nu^2$ и при сохранении числа нейтрино условие $\sigma n t < 1$ не будет удовлетворено. Следовательно, число нейтрино будет убывать, и процесс аннигиляции действительно ведет к необратимому переходу энергии в пары $e^+ e^-$.

Оценки, сделанные в [12], показывают, что в этом случае для роста энтропии получается формула

$$s = s(\tau) \left[1 + \frac{4\alpha}{1-\alpha} (t/\tau)^{\frac{1-\alpha}{8}} \right]^{3/4}. \tag{9}$$

Средняя энергия отдельного нейтрино меняется по закону

$$E_\nu \sim t^{\alpha/3}. \tag{10}$$

Плотность энергии нейтрино и γ-квантов и пар $e^+ e^-$ из-за „подогрева" оказывается все время одного порядка. Взаимодействие встречных потоков нейтрино и антинейтрино будет продолжаться до тех пор, пока либо прекратится рост сечения взаимодействия нейтрино (это будет, вероятно, при $E_\nu \sim 300$ *Бэв*), либо окончится вакуумная стадия, т. е. прекратится рост E_ν. Момент окончания вакуумной стадии в рассматриваемых условиях дается соотношением

$$\theta^* = \theta\,(\tau/\theta)^{\frac{9}{4}\frac{1-\alpha}{3-\alpha}}. \tag{11}$$

В общем случае после $t = \theta^*$ энтропия вещества постоянна, при $t > \theta^*$ нейтрино больше не исчезают. Решение быстро изотропизуется. Но чрезвычайно важно, что в момент θ энергия нейтрино, которая росла после освобождения нейтрино как $E_\nu \sim t^{\alpha/3}$, много больше энергии γ-квантов, которая все время уменьшалась: $\overline{E}_\gamma \sim T \sim t^{-\frac{3+\alpha}{12}}$. Для последующего времени $t > \theta^*$ отношение E_ν/E_γ сохраняется. В результате, если ранние стадии расширения Вселенной действительно были анизотропными, то сегодня энергия реликтовых нейтрино может во много раз превышать равновесную энергию $T_\nu \simeq 2\,°\mathrm{K}$, предсказываемую изотропной моделью. Но зато во столько же раз меньше их плотность. На сегодняшний день должно быть справедливо приблизительное равенство $\varepsilon_\nu \simeq \varepsilon_\gamma$ (может быть $\varepsilon_\nu \simeq 0.1\ \varepsilon_\gamma$).

Проведенный выше анализ основан, в частности, на предположении $\sigma_{\nu\bar\nu} \sim E_\nu E_{\bar\nu}$, что, согласно современным взглядам, справедливо лишь при $E_\nu \leqslant 300$ *Бэв*. При больших энергиях сечение аннигиляции нейтрино либо остается постоянным, либо даже убывает с ростом энергии. Это условие накладывает ограничения на увеличение энтропии в рассмотренном выше процессе. Оценки показывают, что максимальное увеличение энтропии происходит в следующем случае:

$$\begin{gathered}\theta = 10^{19}\ \textit{сек};\ \ \alpha \simeq 0.02;\ \ \tau = 10^{-26}\ \textit{сек};\ \ \theta^* \simeq 200\ \textit{сек}\\ \textstyle\sum = S(\theta^*)/S(\tau) \simeq 10^6;\qquad n_\nu/n_\gamma \simeq 3\cdot 10^{-8}\end{gathered} \tag{12}$$

(n_γ — плотность фотонов реликтового излучения). Современная энергия нейтрино $E_\nu \leqslant 3\cdot 10^4$ *эв*. В рамках рассмотренной схемы всегда $\sum \leqslant 10^6$; и энергия нейтрино сегодня $E_\nu \leqslant 3\cdot 10^4$ *эв**. Следует, однако, иметь в виду, что в рассматриваемых условиях $T_e \sim t^{-\frac{3+\alpha}{12}}$ и по-

* В данной работе мы не останавливаемся на ограничениях на анизотропные модели, связанные с химическим составом дозвездного вещества. Эти ограничения сильно понизят оценку $\max E_\nu$ сегодня.

этому для процесса (8) $\sigma n t = \text{const}$, как и для процесса аннигиляции. Поэтому процесс (8) также даст вклад в набор энтропии. Однако, поскольку ведущим остается процесс аннигиляции, вклад процесса рассеяния (8) не может существенно изменить оценок (12).

3. *Влияние вязкости на динамику расширения анизотропных моделей.* В работах Мизнера [13, 14] развит иной подход к вопросам поведения слабовзаимодействующих частиц в анизотропных космологических моделях. Мизнер обращает внимание на то, что даже при малых отклонениях от равновесной функции распределения нейтрино вязкость приводит к росту энтропии. Этот рост тем больше, чем сильнее функция распределения отличается от равновесной, чем ближе время релаксации к гидродинамическому. Расчеты Мизнера приводят его к выводу, что из-за влияния вязкости набор энтропии всегда столь значителен, что освобождения нейтрино на вакуумной стадии не произойдет, рассмотренный в предыдущем разделе режим не будет иметь места, и вне зависимости от параметров модели изотропизация происходит при температуре $T \approx 3$ *Мэв.*

Лишь после изотропизации происходит освобождение нейтрино. Сегодня нейтрино большой энергии нет.

Рассмотрим этот процесс подробнее, следуя идеям Мизнера*.

Уравнение сохранения энергии с учетом вязкости в модели с метрикой (1) на вакуумной стадии приводится к виду

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{4}{3}\frac{\varepsilon}{t} = \frac{4}{3}\frac{\eta}{t^2}, \tag{13}$$

где η — коэффициент вязкости.

Примем

$$\eta = \frac{1}{3} t^* \varepsilon_\nu = \frac{k}{3}\frac{\varepsilon}{\sigma n_e}, \tag{14}$$

где t^* — время свободного пробега, $\sigma \sim (E_\nu E_e)^m \sim T^{2m}$ — сечение взаимодействия ($m > 0$), n_e и E_e — плотность и энергия рассеивателя (электронов и позитронов), $k = \varepsilon_\nu/\varepsilon$ в равновесии. k может быть выражено через статистические веса нейтрино и остальных частиц плазмы.

---

* Мизнер рассматривает точные уравнения Эйнштейна и учитывает обратное влияние материи и нейтрино на деформацию. На вакуумной стадии это влияние несущественно, поэтому мы решаем задачу на фоне заданной метрики (1), что упрощает анализ и, очевидно, не влияет на выводы.

Считаем (как и Мизнер) $k = \mathrm{const}$, т. е. в течение всего процесса количество сортов частиц остается неизменным.

Решение уравнений (14) легко получить в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_a \left[1 + ct^{2m/3}\right]^{-4/(3+2m)} = \tag{15а}$$

$$= \varepsilon_a \left[1 - k\,\frac{3+2m}{6m}\left(\frac{t^*}{t}\right)\right]^{-4/(3+2m)}, \tag{15б}$$

где ε_a — адиабатический закон изменения плотности энергии (3). Из (15а) следует, что при $ct^{2m/3} \gg 1$.

$$\varepsilon \sim t^{-4/(3+2m)}, \tag{16}$$

независимо от начальных параметров задачи.

Мизнер рассматривал случай $m = 0.5$, $k = 1$ и получил, что на вакуумной стадии $\varepsilon \sim t^{-1}$ и нейтрино находятся в равновесии вплоть до изотропизации модели, происходящей вне зависимости от начальных параметров при $T = 3$ *Мэв*.

В действительности главный вопрос заключается в обоснованности приближений, приводящих к (16). Из (15б) следует, что рассматриваемый режим устанавливается при $k\,\dfrac{3+2m}{6m}\,\dfrac{t^*}{t} \to 1$. В реальных условиях в термодинамическом равновесии находится много частиц (при $T \sim 0.5$ *Бэв* в равновесии находятся e, γ, ν_e, μ, ν_μ, π; при $T > 3$ *Бэв* необходимо учитывать также барионы, скалярные и векторные мезоны).

Поэтому в зависимости от температуры $k = \varepsilon_\nu/\varepsilon$ лежит в пределах $0.25 \geqslant k \geqslant 0.025$. Следовательно, решение выходит на рассматриваемый режим Мизнера при $t^*/t = 4.8 \div 48$ $(m = 1)$ или при $t^*/t = 3 \div 30$ $(m = 0.5)$ в зависимости от значения k, т. е. в условиях, когда применимость понятия вязкости совершенно не очевидна. Неправомерность макроскопического описания явления с помощью понятия вязкости еще не означает, что выводы Мизнера неправильны качественно, так как возможно существование решения кинетического уравнения со свойствами, подобными свойствам полученного Мизнером решения. В этих условиях для получения достоверных результатов необходимо исследовать кинетическое уравнение. В то же время открыта и другая возможность, а именно, что осуществляются процессы, описанные в предыдущем разделе, а роль вязкости не существенна. С этой целью исследуем кинетическое уравнение. Кратко вопрос рассмотрен в [16].

4. ***Кинетическая теория нейтрино в анизотропной модели, автомодельное решение.*** Будем рассматривать вакуумную стадию; кроме того положим $\alpha = 1/3$, т. е. $a_1 \sim t^{-1/3}$; $a_2 = a_3 \sim t^{2/3}$. Функция распределения нейтрино в импульсном пространстве, соотнесенная к ячейке, равной $(2\pi\hbar)^{-3}$, определяется кинетическим уравнением

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{i_1}{3t}\frac{\partial w}{\partial i_1} - \frac{2}{3}\frac{i_2}{t}\frac{\partial w}{\partial i_2} - \frac{2}{3}\frac{i_3}{t}\frac{\partial w}{\partial i_3} = \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{st}, \tag{17}$$

где $(\partial w/\partial t)_{st}$—столкновительный член, описывающий изменение функции распределения нейтрино из-за взаимодействия с остальными частицами.

Остальные частицы находятся в термодинамическом равновесии, которое характеризуется заданием температуры T (в энергетических единицах). Предположим, что все эти частицы ультрарелятивистские, так что для них имеет место уравнение состояния $P = \bar{\varepsilon}/3$, плотность энергии $\bar{\varepsilon} = \varkappa T^4$; $\varkappa = b\,\dfrac{24\pi}{(2\pi\hbar)^3}$, где b — сумма статистических весов. Пренебрежем отличием Ферми и Бозе — газов от классического, т. е. заменим $(e^{E/T} \pm 1)^{-1} \equiv n^{\bullet}$ на $e^{-E/T}$ в формулах равновесного распределения и соответственно выбросим $n^{\bullet}$ во множителях $(1 - n^{\bullet})$, $(1 + n^{\bullet})$ в интеграле столкновений. Тогда $b = \sum g_j$, где g_j— статистический вес j-того сорта частиц ($g = 2$ для $e^{\pm}$, μ, $g = 1$ для скалярных мезонов, $g = 1$ для двухкомпонентных нейтрино). При сделанных предположениях

$$k = \frac{g_{\nu\bar{\nu}}}{b + g_{\nu\bar{\nu}}} = \frac{2}{b + 2}.$$

Температура определяется уравнением сохранения энергии

$$\frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} + \frac{4}{3}\frac{\bar{\varepsilon}}{t} \equiv 4\varkappa T^3\left(\frac{dT}{dt} + \frac{1}{3}\frac{T}{t}\right) = Q(W, T), \tag{18}$$

где $Q(W, T)$ — член, описывающий влияние на температуру взаимодействия плазмы с нейтрино. Если предположить, что сечения взаимодействия нейтрино с остальными частицами степенным образом зависят от энергии сталкивающихся частиц в системе центра энергии ($\sigma = \sigma_0 2^{-m} E^{2m}$), то можно убедиться, что система (17), (18) допускает автомодельное решение вида:

$$W = W(\vec{q}); \qquad T \sim t^{-1/(2m+3)}, \tag{19}$$

где
$$\vec{q} = \frac{\vec{i}}{T}.$$

Физическими параметрами, определяющими задачу, являются (при заданной метрике) показатель m; постоянная σ_0 (или несколько постоянных σ_{0j}) в выражении сечения взаимодействия; числа b и k, характеризующие термодинамику системы. Практически, для определения области существования автомодельного решения, удобно действовать следующим образом: задаваясь значениями σ_0 и $T = T(t)$, определять область изменения k.

Эту общую программу удалось осуществить лишь после дополнительных упрощающих предположений относительно взаимодействия нейтрино с равновесной плазмой и друг с другом.

Задачу удается решить в двух случаях:

А. Рассматривается только одиночное рождение и гибель нейтрино согласно реакции

$$\nu + N \rightleftarrows P + e, \tag{20}$$

где вместо N, P, e могут фигурировать и другие частицы, находящиеся в равновесии. Кроме них могут присутствовать и другие частицы, не взаимодействующие с нейтрино.

Б. Рассматривается только парная аннигиляция и рождение нейтрино и антинейтрино согласно реакции

$$\nu + \bar{\nu} \rightleftarrows e^+ + e^- \tag{21}$$

с добавочным ограничением на показатель степени в выражении для сечения $m = 1$ (также допускается присутствие частиц, не взаимодействующих с нейтрино).

Учет рассеяния нейтрино, а также отказ от ограничения условием $m = 1$ в варианте Б приводит к большим техническим трудностям, и эти варианты пока не рассмотрены. В задаче только с одним рассеянием (без рождения — парного или одиночного) автомодельного решения, очевидно, нет.

Рассмотрим случай А.

Примем сечение взаимодействия реакции (20) в виде

$$d\sigma = \frac{\sigma_0}{2\pi} (V_1 V_2)^m \frac{d^3 V_3}{V_3^0} \frac{d^3 V_4}{V_4^0} \delta^4 (V_1 + V_2 - V_3 - V_4), \tag{22}$$

где V_1, V_2 — четырехимпульсы частиц до столкновения, V_3, V_4 — после столкновения, V^0 — нулевая компонента четырехимпульса. Интегральное сечение взаимодействия и средняя энергия вылетающей частицы равны

$$\sigma = \sigma_0 (V_1 V_2)^m; \qquad \overline{V_3^0} = \int V_3^0 d\sigma = \frac{1}{2} \sigma (V_1^0 + V_2^0), \tag{23}$$

для $\left(\dfrac{dW}{dt}\right)_{st}$ и $Q(W;\ T)$ получаем:

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_{st} = \frac{f}{t}\left(\frac{E_\nu}{T}\right)^m \left(e^{-E_\nu/T} - W\right) \tag{24}$$

$$Q(W;\ T) = \frac{\varepsilon_\nu^*}{\sigma T}\,\frac{f}{4\pi}\left[\int W q^{m+1}\,d^3q - 4\pi\Gamma(m+4)\right], \tag{25}$$

где $f = \Gamma(m+3)^{2m/2+m}\,\sigma_0 T^{2m}\,nt = \text{const}$, $q = |\vec{q}| = \left|\dfrac{\vec{i}}{T}\right|$ и ε_ν^* — плотность энергии нейтрино и антинейтрино в равновесии. Уравнение (18) с учетом (20) и (25) приводится к виду

$$\frac{b}{g_{\nu\bar{\nu}}} = \frac{1-k}{k} = \frac{2m+3}{16\,m}\,\frac{f}{4\pi}\left\{\int W q^{m+1}\,d^3q - 4\pi\Gamma(m+4)\right\}. \tag{26}$$

Автомодельное решение уравнения (17) с учетом (24) имеет вид

$$W(\vec{q}) = f\int_0^1 F^m(\vec{q};\ x)\,e^{-F(q;\ x) - f\int_x^1 F^m(\vec{q};\ y)\frac{dy}{y}}\,\frac{dx}{x}, \tag{27}$$

где

$$F(\vec{q};\ x) = \left\{q_1^2\,x^{-\frac{4}{3}\frac{m+3}{(2m+3)}} + (q_2^2 + q_3^2)\,x^{-2\frac{4m+3}{3(2m+3)}}\right\}^{1/2}.$$

Подставляя (27) в (26), получаем зависимость $k = k(f;\ m)$ и область существования автомодельного решения.

Найдем асимптотическую зависимость $k(f,\ m)$ при $f \gg 1$ и при $f \ll 1$. При $f \gg 1$ получаем

$$\frac{1-k}{k} \simeq -\frac{2m+5}{2}, \tag{28}$$

т. е. автомодельного решения не существует при f больше некоторого критического значения f_0. Это объясняется тем, что при больших f функция распределения нейтрино весьма близка к равновесной, и малое отклонение W от $e^{-E_\nu/T}$ не в состоянии поддержать изменение температуры со временем по закону $T \sim t^{-1/2m+3}$ (медленнее адиабатического закона $T \sim t^{-1/3}$).

Очевидно, что для того, чтобы обеспечить набор энтропии, необходимой для поддержания автомодельного решения, требуется достаточно большая длина свободного пробега. Необходимо, чтобы рост энергии нейтрино из-за синего смещения по оси x_1 (с последующей передачей этой энергии равновесным частицам) был достаточен для поддержания более медленного падения температуры с расширением, чем по адиабатическому закону.

При $f \ll 1$ получаем:

$$\frac{1-k}{k} \simeq \frac{m+3}{24} f^{*} \left[\Gamma\left(\frac{m^2+m+3}{m(m+3)}\right) \Gamma\left(\frac{m^2+9m+9}{m+3}\right) \times \right.$$
$$\left. \times \frac{m+3}{4m+3} f^{*\,\frac{2m-3}{m(m+3)}} - \Gamma(m+4) \right], \tag{29}$$

где $f^{*} = \dfrac{3(2m+3)}{2m(m+3)} f$. Из (29) следует, что при $m > 1.5$, $\dfrac{1-k}{k} < 0$, т. е. автомодельного решения нет. При $m_0 \leqslant m < 1.5$, $m_0 = \dfrac{6}{\sqrt{37}+5} \simeq$ $\simeq 0.545$ функция $(1-k)/k$ проходит через максимум и решение есть лишь при не слишком малых k. Лишь при $m < m_0$, $(1-k)/k \to \infty$ при $f^{*} \to 0$, т. е. автомодельное решение существует при любом значении $k\,(0 < k < 1)$. При $m = m_0$ максимум функции $(1-k)/k$ достигается в точке $f^{*} = 0$ и минимальное значение $k_m = 6/7 \simeq 0.86$.

При $m = 1$ задача исследовалась более подробно. Используя приближенную формулу (29), можно показать, что в этом случае максимум функции $(1-k)/k$ (соответственно минимум k) достигается при $f^{*} = 5 \cdot 10^{-3}$ и $k_m \simeq 0.993$. Расчет на ЭВМ дает близкие результаты: $k_m = 0.992$ при $f^{*} = 8.5 \cdot 10^{-3}$.

Аналогичные результаты могут быть получены и в задаче Б, с учетом лишь парной аннигиляции и рождения нейтрино при $m = 1$ и предположениях о сечении (23). Расчеты в этом варианте сложнее, чем в варианте А, так как автомодельная функция распределения W зависит от чисел, характеризующих степень отклонения W от равновесной:

$$D_1 = \frac{1}{4\pi} \int q' W(\vec{q}\,')\, d^3q'$$
$$D_2 = \frac{1}{8\pi} \int q' W(\vec{q}\,')\, P_2(\mu')\, d^3q', \tag{30}$$

где $P_2(\mu')$ — второй полином Лежандра, $\mu' = q_1'/q' = i_1'/E_\nu'$. Не останавливаясь на деталях расчета (в общем аналогичного приведенному выше), приведем асимптотическую формулу, заменяющую (29):

$$\frac{1-k}{k} \simeq 24 f_0 \left[0.28 f_0^{-2.5} - 1\right], \qquad f_0 \ll 1, \tag{31}$$

где $f_0 = 7.5\,\sigma_0 T^5 t\,(2\pi\hbar)^{-3} = \text{const}$. При $f_0 \simeq 10^{-2}$, $k(f_0)$ достигает минимального значения 0.97. При меньших k в рассматриваемом варианте автомодельного решения не существует.

Кратко суммируем полученные выше результаты:

1. Автомодельное решение рассматриваемого выше типа при $m = 1$ возможно лишь при $(1-k) \ll 1$. Это следует как из задачи Б, так и из задачи А. По-видимому, учет рассеяния $e + \nu \rightleftarrows e + \nu$ не сможет заметно изменить этот результат.

2. Из анализа задачи А следует существование критических значений показателя степени $m_0 \simeq 0.545$ и $m_1 = 1.5$ таких, что при $m < m_0$ автомодельное решение существует при любом значении k, $0 < k < 1$. При $m_0 < m < m_1$ автомодельное решение существует лишь при $1 > k > k_{\min}$. Наконец, при $m > m_1$ автомодельного решения нет вообще.

Неясно, насколько полученные конкретные значения параметров в разделе 2 зависят от упрощений, сделанных при постановке и решении задачи А.

5. *Решение кинетического уравнения в приближении Д.З.Н.* Рассмотренный в разделе 2 режим осуществляется при условии $\sigma_{\nu\nu} \sim E^2$, т. е. $m = 1$. Такие процессы описываются предположениями, сделанными в пункте Б раздела 4. С помощью кинетической теории можно в случае Б получить функцию распределения нейтрино в режиме Д.З.Н., уточнить соотношения между нейтрино и равновесными частицами и строго доказать возможность существования рассматриваемого режима.

Очевидно, рассматриваемый режим не будет автомодельным, т. е. функция распределения W явно зависит от времени.

Общее решение кинетического уравнения в случае Б имеет вид:

$$\begin{aligned} W(E, \mu, t) &= e^{-\frac{E_0}{T_0} - \frac{2}{3}\sigma_0 \int_{t_0}^{t} E_\nu T n_e (D_1 + P_2(\mu) D_2)\, d\tau} + \\ &+ 4\sigma_0 \int_{t_0}^{t} E_\nu T n_e e^{-\frac{E_\nu}{T} - \frac{2}{3}\sigma_0 \int_{\tau}^{t} E_\nu T n_e (D_1 + P_2(\mu) D_2)\, d\xi}\, d\tau, \end{aligned} \tag{32}$$

где E_0 и T_0 — энергия нейтрино и температура в момент $t = t_0$. Переход к автомодельному решению соответствует пренебрежению первым членом в (32) и $t_0 \to 0$ во втором члене. Это согласуется с предположением Мизнера о том, что главную роль играют нейтрино, рождающиеся непрерывно при аннигиляции e^+e^-, что и описывается вторым членом. Напротив, в режиме Д.З.Н. главную роль играют нейтрино, присутствовавшие в момент $t = t_0$, тогда как нейтрино, возникающие при аннигиляции, влияют главным образом на низкоэнергичную часть спектра. Поэтому первый член в (32) играет главную роль.

Сохранив в (32) лишь первый член, легко получить ($t \gg t_0$):

$$T \approx t^{-5/18}; \quad D_1 = \text{const}, \quad D_2 \simeq \frac{1}{2} D_1; \quad \bar{E}_\nu \sim t^{1/9}; \quad n_\nu \sim t^{-11/9}, \qquad (33)$$

в соответствии с результатами раздела 2. Кроме того,

$$\varepsilon_{\nu\bar{\nu}} = nTD_1; \qquad \tilde{\varepsilon} = 2nTD_1; \qquad (34)$$

(T — в энергетических единицах).

Таким образом, частицы, находящиеся в равновесии, имеют плотность энергии вдвое большую, чем нейтрино и антинейтрино.

Константа D_1 выражается через число сортов равновесных частиц N

$$D_1 = \frac{\tilde{\varepsilon}}{2nT} = \frac{3}{2} N.$$

Оценить влияние рождающихся при аннигиляции e^+e^- нейтрино (второй член (32)) на рассматриваемый режим довольно сложно. Пока что можно лишь утверждать, что зависимость от времени всех величин сохранится такой же, как и в (33). Возможно, нарушится соотношение $\varepsilon_{\nu\bar{\nu}} = 1/2\,\tilde{\varepsilon}$.

Таким образом, анализ кинетического уравнения в предположениях Б подтверждает качественные выводы, сделанные в разделе 2. Очевидно, что результаты сохранятся и при небольших отклонениях α от 1/3.

Варианты с $\alpha \ll 1/3$ пока не рассмотрены. Также неясно, насколько сильно может повлиять на результаты учет рассеяния нейтрино на электронах.

6. *Выводы.* Анализ, проведенный в предыдущих разделах, приводит к следующим выводам.

Для наиболее важного (реального) значения $m = 1$ (т. е. $\sigma \sim E^2$) и реального $k = \varepsilon_\nu/\varepsilon < 0.25$ нет автомодельного решения кинетического уравнения, подобного вязкому решению Мизнера*.

Физический вывод заключается, в том, что когда в анизотропном космологическом решении начинается отклонение от равновесия слабовзаимодействующих частиц, то вскоре эти частицы становятся свободными, число их уменьшается, а средняя энергия растет, как это описано в [11, 12].

Возможно так выбрать параметры анизотропной космологической модели, что отклонение от равновесия нейтрино произойдет при очень большой температуре, когда показатель $m < 1$ и может быть мал. В этих условиях возможно и устанавливается автомодельное решение типа Мизнера (для ответа на этот вопрос требуются дополнительные исследования как решения кинетического уравнения, так и свойств нейтрино при высоких энергиях).

Однако в ходе дальнейшего расширения температура падает, и показатель m должен стать равным 1 еще на вакуумной стадии, так как согласно Мизнеру изотропизация решения происходит всегда при относительно низкой температуре ($T = 3$ *Мэв*). Начиная с этого момента ($m = 1$) решение Мизнера невозможно, и нейтрино должны стать свободными.

Таким образом, если ранние стадии расширения действительно описывались моделью Гекмана-Шюкинга [2] с метрикой (1), то сохраняются сделанные в [12, 17] наблюдательные предсказания следствий процессов с нейтрино. Согласно цитированным работам:

1. Анизотропия реликтового микроволнового космологического излучения сегодня должна быть порядка (для $\rho \simeq \rho_c = 2\cdot 10^{-29}\,г/см^3$)

$$\frac{\Delta T}{T} \simeq 10^{-3} \div 10^{-4}. \tag{32}$$

В широких пределах начальных параметров анизотропной модели (θ и α) формула (32) дает ожидаемую анизотропию независимо от конкретного значения параметров. Напомним, что согласно решению Мизнера [13, 14] величина анизотропии сегодня

$$\frac{\Delta T}{T} < 3\cdot 10^{-5} \qquad (\rho \simeq 2\cdot 10^{-29}\,г/см^3). \tag{33}$$

---

* Такое решение получается при формальном применении уравнений гидродинамики с вязкостью для значений $t^*/t > 1$, что, очевидно, незаконно и приводит, как мы видим из анализа кинетического уравнения, даже к качественно неверному результату.

Сегодня должен существовать направленный поток энергичных реликтовых нейтрино с $E_\nu \leqslant 10^4$ *эв* и плотностью $\varepsilon_\nu \simeq 10^{12} \div 10^{-13}$ *эрг/см*^{3}.

Институт прикладной математики
АН СССР

Примечание при корректуре.

Рост энтропии происходит и в случае, когда $\alpha = 0$, что можно показать методом, аналогичным использованному в разделе 5. В этом случае $\tilde{\varepsilon} \sim x^{-1} (\ln x)^{-7/4}$; $\varepsilon_\nu = 4/9\, (\tilde{\varepsilon} \ln x)$, $x = t/t_0 \gg 1$.

THE KINETIC THEORY OF NEUTRINOS IN THE ANISOTROPIC COSMOLOGICAL MODELS

A. G. DOROSHKEVICH, Y. B. ZELDOVICH, I. D. NOVIKOV

The modern situation concerning the question of the role of neutrinos and other weakly interacting particles in the anisotropic cosmological models is given. Making use of kinetic theory and the real properties of neutrinos it has been shown that neutrinos had become free as long ago as at the stage of expansion of the anisotropic cosmological models when the anisotropy is still large. Later on all the processes proceed the same way as described by authors in JETP, 53, 644 (USSR).

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Л. Зельманов*, Труды VI совещания по вопросам космогонии, М., 1959.
2. *O. Heckmann, E. Schücking*, XI Conseil de Physique Solvay, Bruxelles, 1959.
3. *Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников*, УФН, 80, 391, 1963; ЖЭТФ, 39, 149, 800, 1960.
4. *K. S. Thorne*, Ap. J., 148, 51, 1967.
5. *Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков*, Релятивистская астрофизика, Наука, М., 1967.
6. *Л. П. Грищук, А. Г. Дорошкевич, И. Д. Новиков*, ЖЭТФ, 55, 2281, 1968.
7. *И. Д. Новиков*, Астрон. ж., 45, 538, 1968.
8. *R. B. Partridge, D. T. Wilkinson*, Nature, 215, 70, 1967.
9. *А. Г. Дорошкевич*, Астрофизика, 1, 255, 1965.
10. *Л. М. Озерной, А. Д. Черник*, Астрон. ж., 44, 1131, 1967.
11. *А. Г. Дорошкевич, Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков*, Письма ЖЭТФ, 5, 119, 1967.
12. *А. Г. Дорошкевич, Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков*, ЖЭТФ, 53, 644, 1967.
13. *C. W. Misner*, Phys. Rev. Lett., 19, 533, 1967.
14. *C. W. Misner*, Ap. J., 158, 431, 1968.
15. *J. M. Stewart*, Astr. Lett., 2, 133, 1968; Preprint, Cambridge, 1968.
16. *А. Г. Дорошкевич, Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков*, Письма ЖЭТФ, 8, 95, 1968.
17. *А. Г. Дорошкевич, Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков*, Астрон. цирк., № 442, 1967.