АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 5 НОЯБРЬ, 1969 ВЫПУСК 4

ПЕРЕНОС РЕЗОНАНСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ОПТИЧЕСКИ ТОЛСТОМ СЛОЕ

Д. И. НАГИРНЕР

Поступила 5 мая 1969

Рассматривается перенос излучения в резонансной линии в плоском слое оптической толщины τ_0. Считается, что происходит консервативное рассеяние с полным перераспределением по частоте. Найдена точная асимптотическая формула, выражающая резольвентную функцию $\Phi(\tau, \tau_0)$ через $\Phi(\tau) \equiv \Phi(\tau, \infty)$ при $\tau_0 \gg 1$ и любых оптических глубинах τ $(0 < \tau < \tau_0)$. При помощи этой формулы может быть решена любая задача о свечении чисто рассеивающего слоя большой оптической толщины. В качестве примера найдено среднее число рассеяний кванта, возникшего в любом месте слоя.

1. *Введение.* Изучение переноса излучения в плоском слое газа, состоящего из двухуровенных атомов, на которых происходит резонансное рассеяние с полным перераспределением по частоте, приводит к интегральному уравнению с ядром, зависящим от модуля разности аргументов [1—3], для функции источников $S(\tau)$:

$$S(\tau) = g(\tau) + \frac{\lambda}{2}\int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|)\, S(\tau')\, d\tau'. \tag{1}$$

Здесь τ — оптическая глубина точек слоя, τ_0 — оптическая толщина слоя, τ и τ_0 рассчитываются для центра линии; λ — вероятность выживания кванта при рассеянии, $g(\tau)$ — заданная функция, характеризующая мощность первичных источников излучения, $K(\tau)$ — ядерная функция

$$K(\tau) = A\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x)\, E_1[\tau\alpha(x)]\, dx, \tag{2}$$

где x — безразмерная частота, отсчитываемая от центра линии, $\alpha(x)$ — профиль коэффициента поглощения $\left(\alpha(0)=1, \ A\int\limits_{-\infty}^{\infty}\alpha(x)\,dx=1\right)$.

В работах В. В. Соболева [1, 2] показано, что резольвента уравнения (1) выражается через функцию $\Phi(\tau, \tau_0)$, определяемую уравнением

$$\Phi(\tau, \tau_0)=\frac{\lambda}{2}K(|\tau|)+\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^{\tau_0}K(|\tau-\tau'|)\,\Phi(\tau', \tau_0)\,d\tau'. \qquad (3)$$

Таким образом, если известна $\Phi(\tau, \tau_0)$, то при любых $g(\tau)$ можно найти функцию источников $S(\tau)$. Функция $\Phi(\tau, \tau_0)$ имеет простой физический смысл. С точностью до постоянного множителя она равна степени возбуждения атомов в слое, на границе которого ($\tau=0$) все время поддерживается (не рассеянным излучением, а каким-либо другим механизмом) постоянная поверхностная плотность возбужденных атомов. Величина же ($\delta(\tau)$ — δ-функция)

$$\frac{\delta(\tau)+\Phi(\tau, \tau_0)}{1+\int\limits_0^{\tau_0}\Phi(\tau', \tau_0)\,d\tau'}\,d\tau \qquad (4)$$

представляет собой вероятность того, что квант, находящийся в поглощенном состоянии на границе среды $\tau=0$, затем, после любого числа рассеяний поглотится на глубинах от τ до $\tau+d\tau$ (подробнее о физической стороне задачи см., например, [3]).

Найти точное решение уравнения (3) с ядром (2) в замкнутой форме возможно лишь для случая полубесконечного слоя, т. е. при $\tau_0=\infty$. Функция $\Phi(\tau)=\Phi(\tau, \infty)$ найдена в явном виде [4] и подробно исследована [4, 5] (см. также [3]). При конечных же τ_0 уравнение (3) приходится решать численно. Численные расчеты были проведены рядом авторов (см. недавний обзор Д. Хаммера и Дж. Рыбицкого [6]). Если $1-\lambda$ не очень мало, а τ_0 не очень велико, то хорошие результаты дает применение различных численных методов. Напротив, при больших τ_0 и λ, близких к единице, для получения даже сравнительно невысокой точности требуются значительные затраты машинного времени. В астрофизических же объектах типичными являются именно такие условия, когда истинное поглощение мало, а толщина слоя велика, т. е. $1-\lambda\ll 1$, $\tau_0\gg 1$.

Между тем ясно, что оптические характеристики слоя большой толщины и полубесконечного слоя должны быть близки. В связи с этим возникает задача выразить функции, определяющие поле излучения в толстом слое, через соответствующие функции для полубесконечной среды. Такая задача прежде всего рассматривалась для выходящего излучения. Во многих случаях интенсивность выходящего излучения может быть выражена через преобразования Лапласа от $\Phi(\tau, \tau_0)$, точнее говоря, через функции [2, 7]

$$X(z, \tau_0) = 1 + \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{z}} \Phi(\tau, \tau_0)\, d\tau,$$
$$Y(z, \tau_0) = e^{-\frac{\tau_0}{z}} + \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau_0-\tau}{z}} \Phi(\tau, \tau_0)\, d\tau, \tag{5}$$

а для полубесконечного слоя — через

$$H(z) \equiv X(z, \infty) = 1 + \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z}} \Phi(\tau)\, d\tau. \tag{6}$$

Для случая изотропного монохроматического рассеяния (без изменения частоты), которому соответствует $K(\tau) = E_1(\tau)$, функции $H(z)$, $X(z, \tau_0)$ и $Y(z, \tau_0)$ часто, например, в [1] и [3], обозначаются $\varphi(\mu)$, $\varphi(\mu, \tau_0)$ и $\psi(\mu, \tau_0)$ и называются функциями Амбарцумяна. В работах В. В. Соболева [8, 9] для $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, а затем В. В. Иванова [10] для произвольных значений μ функции $\varphi(\mu, \tau_0)$ и $\psi(\mu, \tau_0)$ при $\tau_0 \gg 1$ выражены через $\varphi(\mu)$ при любых $\lambda\,(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$.

Для задач с полным перераспределением по частоте связь X- и Y-функций с H-функцией, для которой имеется, как и для $\Phi(\tau)$, явное выражение, получить труднее. Здесь приходится ограничиваться частными случаями. В. В. Иванов [7] выразил $X(z, \tau_0)$ и $Y(z, \tau_0)$ при $\tau_0 \gg 1$ через $H(z)$ при выполнении одного из следующих предельных соотношений между значениями λ и τ_0:

$$\frac{1 - V(1/\tau_0)}{1 - \lambda} \ll 1, \tag{7}$$

$$\frac{1 - V(1/\tau_0)}{1 - \lambda} \gg 1, \tag{8}$$

где

$$V(u) = \int_0^{\infty} K(\tau) \cos \tau u\, d\tau, \tag{9}$$

в двух частных случаях, когда $\tau_0/z \gg 1$ и $\tau_0/z \ll 1$. Неравенство (7) физически означает, что в слое определяющую роль в выбывании квантов из рассеяний играет истинное поглощение. В противоположном случае (8) главный процесс выбывания квантов—выход их из среды (подробнее об этом см. [3]). Тогда во всех уравнениях можно положить $\lambda = 1$, считая рассеяние консервативным, т. е. что за каждым актом поглощения кванта атомом следует его переизлучение. Для консервативного случая в [10] найден также главный член асимптотического разложения $\dfrac{X(\tau_0/t,\ \tau_0)}{X(\infty,\ \tau_0)}$ и $\dfrac{Y(\tau_0/t,\ \tau_0)}{X(\infty,\ \tau_0)}$ при $\tau_0 \gg 1$. В [7] и [10] рассматривался допплеровский профиль коэффициента поглощения $\alpha(x) = e^{-x^2}$. В работе автора [11] консервативный случай изучен подробнее. Найдены главные члены асимптотик $X(z,\ \tau_0)$ и $Y(z,\ \tau_0)$ при $\tau_0 \gg 1$ и любых z. Что касается коэффициента поглощения, то он предполагался либо имеющим прямоугольный профиль (монохроматическое рассеяние), либо убывающим в крыле линии по степенному закону. Допплеровский профиль был рассмотрен отдельно. В. В. Иванов указал способ объединения этих результатов [3] (см. также ниже). Недавно для допплеровского профиля им получены также [12] старшие члены асимптотических разложений X- и Y-функций при $\tau_0 \to \infty$.

Асимптотическое выражение $\Phi(\tau,\ \tau_0)$ через $\Phi(\tau)$ до сих пор было найдено только для монохроматического рассеяния. Формула, справедливая при любых λ и любых τ $(0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0)$, была дана В. В. Соболевым в работе [9]. Обобщить его результат на рассеяние с полным перераспределением целиком не удается. В настоящей статье, являющейся по существу продолжением [11], находится асимптотика $\Phi(\tau,\ \tau_0)$ при $\tau_0 \gg 1$ в предположении, что выполняется условие (8). Отметим, что в работе [9] существенно использовалось наличие полюса у преобразования Лапласа от $\Phi(\tau)$. Как известно, так обстоит дело лишь в случае монохроматического рассеяния, при полном же перераспределении по частоте полюса нет [3—5]. Поэтому применяемый нами способ получения асимптотики $\Phi(\tau,\ \tau_0)$ отличается от способа [9]. Близкие, хотя менее точные результаты, касающиеся асимптотического поведения $\Phi(\tau,\ \tau_0)$ при $\tau_0 \to \infty$, получены недавно другим путем Ю. Ю. Абрамовым, А. М. Дыхне и А. П. Напартовичем [13].

2. *Функции M и N.* В уравнении (3) оптическая глубина заключена между 0 и τ_0. Мы продолжим функцию $\Phi(\tau,\ \tau_0)$ на все значения τ $(-\infty < \tau < +\infty)$ при помощи того же уравнения (3). Физически такое продолжение соответствует тому, что мы дополняем слой

толщины τ_0 с обеих сторон средой с теми же оптическими свойствами, но не переизлучающей поглощаемые в ней кванты. Обозначим

$$\begin{aligned} \Phi(\tau, \tau_0) &= N(-\tau, \tau_0) \quad \text{при} \quad \tau \leqslant 0, \\ \Phi(\tau, \tau_0) &= M(\tau - \tau_0, \tau_0) \quad \text{при} \quad \tau \geqslant \tau_0. \end{aligned} \tag{10}$$

Теперь воспользуемся тем, что если $\alpha(x)$ четная строго убывающая при $x \geqslant 0$ функция, то ядерную функцию $K(\tau)$ можно привести к виду [1, 3]

$$K(\tau) = \int_0^\infty G(z)\, e^{-\frac{\tau}{z}} \frac{dz}{z}, \tag{11}$$

где

$$G(z) = \begin{cases} 2A \int\limits_0^\infty \alpha^2(x)\, dx \quad \text{при} \quad z \leqslant 1, \\ 2A \int\limits_{x(z)}^\infty \alpha^2(x)\, dx \quad \text{при} \quad z \geqslant 1, \\ \alpha(x(z)) = \dfrac{1}{z}, \quad x(z) > 0. \end{cases} \tag{12}$$

Тогда, заменяя в (3) τ на $-\tau$, где $\tau > 0$, подставляя туда (11) и используя (10) и (5), находим, что функция $N(\tau, \tau_0)$ выражается через $X(z, \tau_0)$:

$$\Phi(-\tau, \tau_0) = N(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{z}} X(z, \tau_0)\, G(z) \frac{dz}{z}. \tag{13}$$

Аналогично ($\tau > 0$, как и в (13))

$$\Phi(\tau_0 + \tau, \tau_0) = M(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{z}} Y(z, \tau_0)\, G(z) \frac{dz}{z}. \tag{14}$$

Из сказанного ясен физический смысл функций M и N. Так $N(\tau, \tau_0)$ дает среднее число квантов, поглощаемых на высоте τ над слоем (на „глубине“ $-\tau$), если первоначально в поглощенном состоянии на глубине $\tau = 0$ находился один квант, а среда продолжена, как говорилось выше.

Функции $M(\tau, \tau_0)$ и $N(\tau, \tau_0)$ вводились раньше [2] равенствами (13)—(14). Мы видим, что три функции $\Phi(\tau, \tau_0)$, $M(\tau, \tau_0)$ и $N(\tau, \tau_0)$

по существу представляют одну. Получим уравнения, которым удовлетворяют эти функции. Дифференцируя (3) по τ_0, находим

$$\frac{\partial \Phi(\tau, \tau_0)}{\partial \tau_0} = \Phi(\tau_0, \tau_0)\, \Phi(\tau_0 - \tau, \tau_0). \tag{15}$$

Отсюда, используя равенства (10), получаем уравнения для M и N

$$\begin{aligned} \frac{\partial N(\tau, \tau_0)}{\partial \tau_0} &= \Phi(\tau_0, \tau_0)\, M(\tau, \tau_0), \\ \frac{\partial M(\tau, \tau_0)}{\partial \tau_0} - \frac{\partial M(\tau, \tau_0)}{\partial \tau} &= \Phi(\tau_0, \tau_0)\, N(\tau, \tau_0). \end{aligned} \tag{16}$$

Входящая сюда функция $\Phi(\tau_0, \tau_0)$ следующим образом выражается через $Y(z, \tau_0)$:

$$\Phi(\tau_0, \tau_0) = M(0, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int\limits_0^\infty G(z)\, Y(z, \tau_0) \frac{dz}{z}. \qquad (1$$

Применяя к системе (16) преобразование Лапласа по τ на промежутке $[0, +\infty)$, а к (15) — на конечном промежутке $[0, \tau_0]$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{N}(z, \tau_0)}{\partial \tau_0} &= \Phi(\tau_0, \tau_0)\, \overline{M}(z, \tau_0), \\ \frac{\partial \overline{M}(z, \tau_0)}{\partial \tau_0} &= \frac{1}{z} \overline{M}(z, \tau_0) + \Phi(\tau_0, \tau_0)\, [\overline{N}(z, \tau_0) - 1], \end{aligned} \tag{18}$$

где

$$\begin{aligned} \overline{N}(z, \tau_0) &= \int\limits_0^\infty N(\tau, \tau_0)\, e^{-\frac{\tau}{z}}\, d\tau = \frac{\lambda}{2} z \int\limits_0^\infty X(z', \tau_0)\, G(z') \frac{dz'}{z' + z}, \\ \overline{M}(z, \tau_0) &= \int\limits_0^\infty M(\tau, \tau_0)\, e^{-\frac{\tau}{z}}\, d\tau = \frac{\lambda}{2} z \int\limits_0^\infty Y(z', \tau_0)\, G(z') \frac{dz'}{z' + z}, \end{aligned} \tag{19}$$

а также известную систему для X- и Y-функций

$$\begin{aligned} \frac{\partial X(z, \tau_0)}{\partial \tau_0} &= \Phi(\tau_0, \tau_0)\, Y(z, \tau_0), \\ \frac{\partial Y(z, \tau_0)}{\partial \tau_0} &= -\frac{1}{z} Y(z, \tau_0) + \Phi(\tau_0, \tau_0)\, X(z, \tau_0). \end{aligned} \tag{20}$$

Впрочем, (18) можно вывести и из (20).

К полученным уравнениям необходимо добавить граничные условия

$$N(\tau, \infty) = N(\tau) = \frac{\lambda}{2}\int_0^\infty H(z)\, e^{-\frac{\tau}{z}} G(z)\frac{dz}{z},$$

$$M(\tau, \infty) = \overline{M}(z, \infty) = 0, \tag{21}$$

$$\overline{N}(z, \infty) = \overline{N}(z) = 1 - \frac{1}{H(z)}.$$

Последнее равенство представляет собой известное нелинейное интегральное уравнение для H-функции [2, 3].

Как уже говорилось, мы будем считать выполненным неравенство (8). Это позволяет положить во всех уравнениях $\lambda = 1$. Все последующее рассмотрение проводится для этого случая. Приведем теперь те из известных результатов, относящихся к консервативному рассеянию в полубесконечном слое, которые понадобятся нам в дальнейшем.

3. *Характеристики полубесконечного слоя*. Как отмечалось выше, функции, характеризующие поле излучения в полубесконечном слое, получены в явном виде. При $\lambda = 1$ резольвентная функция $\Phi(\tau)$ дается формулой

$$\Phi(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{G(z)\, e^{-\frac{\tau}{z}}}{[1 - U(z)]^2 + \frac{\pi^2}{4} z^2 G^2(z)} \cdot \frac{dz}{zH(z)}, \tag{22}$$

а для $H(z)$ справедливо выражение

$$\ln H(z) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \ln[1 - V(u)]\frac{z\, du}{1 + z^2 u^2}, \tag{23}$$

где $V(u)$ — косинус-преобразование (9) ядерной функции $K(\tau)$, а $U(z)$ — ее двухстороннее преобразование Лапласа:

$$U(z) = V\left(\frac{i}{z}\right) = z^2\int_0^\infty G(z')\frac{dz'}{z^2 - z'^2}. \tag{24}$$

Во всех представляющих практический интерес случаях асимптотики $\Phi(\tau)$ и $H(z)$ при больших τ и соответственно z выражаются через $V(u)$. Именно, в широком классе случаев $V(u)$ при малых u ведет себя таким образом, что

$$1 - V(u) \sim V_0(u)\, u^{2\gamma}, \tag{25}$$

где γ — постоянная $(0 < \gamma \leqslant 1)$, а $V_0(u)$ — постоянная или медленно меняющаяся при $u \to 0$ функция. Последнее означает, что

$$\lim_{u \to 0} \frac{V_0(uc)}{V_0(u)} = 1, \quad 0 < c < \infty. \tag{26}$$

Например, при монохроматическом рассеянии $\gamma = 1$, $V_0 = 1/3$, при допплеровском контуре $\gamma = 1/2$, $V_0(u) = \sqrt{\pi}/(4\sqrt{\ln 1/u})$. Если $\alpha(x)$ при $|x| \gg 1$ представляется произведением медленно меняющейся при $|x| \to +\infty$ функции на $x^{-1/(1-2\gamma)}$, то $0 < \gamma < 1/2$. В частности, при лоренцовском профиле $\alpha(x) = 1/(1+x^2)$ мы имеем $\gamma = 1/4$, $V_0 = \sqrt{2}/3$.

Если выполнено (25), то имеют место асимптотические равенства:

$$\Phi(\tau) \sim \Phi_{as}(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)\sqrt{V_0\left(\frac{1}{\tau}\right)}} \frac{1}{\tau^{1-\gamma}}, \qquad \tau \to \infty, \tag{27}$$

$$H(z) \sim H_{as}(z) = \frac{z^{\gamma}}{\sqrt{V_0\left(\frac{1}{z}\right)}}, \quad z \to \infty, \tag{28}$$

где $\Gamma(\gamma)$ — гамма-функция. Нам понадобится еще функция

$$\Psi(\tau, \tau_0) = 1 + \int_0^{\tau} \Phi(\tau', \tau_0)\, d\tau'. \tag{29}$$

При больших τ

$$\Psi(\tau) \equiv \Psi(\tau, \infty) \sim \Psi_{as}(\tau) = \frac{\tau^{\gamma}}{\Gamma(1+\gamma)\sqrt{V_0\left(\frac{1}{\tau}\right)}}. \tag{30}$$

Для простоты вывода искомых асимптотик для конечного слоя мы примем ряд предположений (в конце статьи будет указано, как от них отказаться). Будем считать, что $0 < \gamma < 1/2$, а $V_0(u) = \text{const}$. Предположим также, что

$$H(z) - H_{as}(z) \to 0 \quad \text{при} \quad z \to \infty. \tag{31}$$

Тогда при помощи (6) легко проверить, что выполняются соотношения: при $\tau \to \infty$

$$\Psi(\tau) - \Psi_{as}(\tau) \to 1 + \int_0^\infty [\Phi(\tau) - \Phi_{as}(\tau)]\, d\tau = 0. \tag{32}$$

4. *Асимптотики функций M и N.* В этом пункте мы выразим $M(\tau, \tau_0)$ и $N(\tau, \tau_0)$ при $\tau_0 \gg 1$ через $N(\tau)$. Начнем с рассмотрения их преобразований Лапласа (19). Асимптотики $\overline{N}(z, \tau_0)$ и $\overline{M}(z, \tau_0)$ мы найдем из уравнений (18) при условиях (21). Для этого воспользуемся асимптотической формулой [3, 11, 13]

$$\Phi(\tau_0, \tau_0) \sim \frac{\gamma}{\tau_0}. \tag{33}$$

Подставляя (33) в (18) и переходя к переменной $t = \tau_0/z$, получим систему

$$\begin{aligned} \overline{N}' &= \frac{\gamma}{t}\overline{M}, \\ \overline{M}' &= \frac{\gamma}{t}(\overline{N} - 1) + \overline{M}, \end{aligned} \tag{34}$$

где штрих означает производную по t. Условиями, позволяющими выделить нужное нам решение, служат ограниченность искомых функций и (21). Сводя систему (34) к одному уравнению второго порядка и решая его, найдем

$$\begin{aligned} \overline{N}(z, \tau_0) &= \overline{N}(z) - \overline{n}(t) + \overline{N}(z)\,\overline{n}(t), \\ \overline{M}(z, \tau_0) &= \overline{m}(t) - \overline{N}(z)\,\overline{m}(t). \end{aligned} \tag{35}$$

Входящие сюда функции $\overline{n}(t)$ и $\overline{m}(t)$ могут быть представлены несколькими способами:

$$\begin{aligned} \overline{n}(t) &= e^{t/2} t^{-1/2} W_{1/2,\,\gamma}(t) - 1 = \\ &= \frac{1}{2} t^{1/2} \pi^{-1/2} e^{t/2} \left[K_{\gamma+1/2}\left(\frac{t}{2}\right) + K_{\gamma-1/2}\left(\frac{t}{2}\right) \right] - 1 = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty e^{-u} u^{\gamma-1} \left[\left(1 + \frac{u}{t}\right)^\gamma - 1 \right] du, \end{aligned} \tag{36}$$

$$\overline{m}(t) = \gamma e^{t/2} t^{-1/2} W_{-1/2,\,\gamma}(t) =$$
$$= \frac{1}{2} t^{1/2} \pi^{-1/2} e^{t/2} \left[K_{\gamma+1/2}\left(\frac{t}{2}\right) - K_{\gamma-1/2}\left(\frac{t}{2}\right) \right] = \tag{36}$$
$$= \frac{1}{t\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty e^{-u} u^\gamma \left(1 + \frac{u}{t}\right)^{\gamma-1} du.$$

Здесь $W_{k,\gamma}$ — функции Уиттекера, а K_ν — функции Макдональда (в [11] K_ν имеет другую нормировку):

$$W_{k,\gamma}(t) = \frac{t^k e^{-t/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - k + \gamma\right)} \int_0^\infty u^{-k-1/2+\gamma} \left(1 + \frac{u}{t}\right)^{k-1/2+\gamma} e^{-u} du, \tag{37}$$

$$K_\nu(t) = \frac{t^\nu \sqrt{\pi}}{2^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-t\,\mathrm{ch}\,\varphi}\, \mathrm{sh}^{2\nu} \varphi\, d\varphi. \tag{38}$$

Если заменить в (35) функцию $\overline{N}(z)$ по формуле из (21), то $\overline{N}(z, \tau_0)$ и $\overline{M}(z, \tau_0)$ окажутся выраженными через H-функцию.

Отметим, что из (35) могут быть получены асимптотики X- и Y- функций при больших τ_0, найденные в [11]. Для этого следует воспользоваться линейными интегральными уравнениями [3]:

$$\begin{aligned} [1 - U(z)]\, X(z, \tau_0) &= 1 - \overline{N}(-z, \tau_0) - e^{-\frac{\tau_0}{z}} \overline{M}(z, \tau_0), \\ [1 - U(z)]\, Y(z, \tau_0) &= e^{-\frac{\tau_0}{z}} - e^{-\frac{\tau_0}{z}} \overline{N}(z, \tau_0) - \overline{M}(-z, \tau_0). \end{aligned} \tag{39}$$

Подставляя сюда (35), получим

$$\begin{aligned} X(z, \tau_0) &= H(z)[\overline{n}(-t) + 1] - H(-z)\, e^{-t}\, \overline{m}(t), \\ Y(z, \tau_0) &= -H(z)\, \overline{m}(-t) + H(-z)\, e^{-t} [\overline{n}(t) + 1]. \end{aligned} \tag{40}$$

Здесь под функциями с вещественным отрицательным аргументом понимаются полусуммы их пределов при стремлении аргумента к соответствующей точке на вещественной оси сверху и снизу. Из известного соотношения

$$H(z) H(-z) [1 - U(z)] = 1 \tag{41}$$

имеем [11]

$$H(-z) = \frac{1-U(z)}{[1-U(z)]^2 + \frac{\pi^2}{4} z^2 G^2(z)} \cdot \frac{1}{H(z)}. \tag{42}$$

Величины $\bar{n}(-t)$ и $\bar{m}(-t)$ при $t > 0$ также выражаются через функции Макдональда и бесселевы функции от мнимого аргумента

$$\begin{aligned} 1+\bar{n}(-t) &= \frac{\sqrt{\pi t}}{2} e^{-t/2} \left[I_{\gamma+1/2}\left(\frac{t}{2}\right) + I_{\gamma-1/2}\left(\frac{t}{2}\right)\right] + \cos \pi\gamma e^{-t} \bar{m}(t), \\ \bar{m}(-t) &= \frac{\sqrt{\pi t}}{2} e^{-t/2} \left[I_{\gamma+1/2}\left(\frac{t}{2}\right) - I_{\gamma-1/2}\left(\frac{t}{2}\right)\right] + \cos \pi\gamma e^{-t} [\bar{n}(t)+1]. \end{aligned} \tag{43}$$

На возможность выражения $X(z, \tau_0)$ и $Y(z, \tau_0)$ через бесселевы функции обратил внимание В. В. Иванов [3]. Отметим, что если выражения (40) и (35) подставить в известные нелинейные уравнения для X- и Y-функций (см., например, [3]), то получатся верные равенства.

Перейдем к асимптотикам самих $M(\tau, \tau_0)$ и $N(\tau, \tau_0)$. Оригиналами $\bar{n}(t)$ и $\bar{m}(t)$, (т. е. функциями, для которых $\bar{n}(t)$ и $\bar{m}(t)$ служат преобразованиями Лапласа) являются следующие функции:

$$\begin{aligned} n(\xi) &= \gamma^2 F(1-\gamma, 1+\gamma, 2; -\xi) = \gamma^2 (1+\xi)^{\gamma-1} F\left(1-\gamma, 1-\gamma, 2, \frac{\xi}{1+\xi}\right), \\ m(\xi) &= \gamma F(1-\gamma, 1+\gamma, 1, -\xi) = \gamma (1+\xi)^{\gamma-1} F\left(1-\gamma, -\gamma, 1, \frac{\xi}{1+\xi}\right). \end{aligned} \tag{44}$$

Здесь F — полная гипергеометрическая функция

$$\begin{aligned} F(a, b, c, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)\, b(b-1)\cdots(b-k+1)}{k!\, c(c-1)\cdots(c-k+1)} z^k = \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{c-a-1} (1-zu)^{-b} du. \end{aligned} \tag{45}$$

Функции n и m связаны дифференциальными уравнениями, получающимися из (34),

$$\frac{d}{d\xi}[\xi n(\xi)] = \gamma m(\xi), \qquad \frac{d}{d\xi}[(\xi+1)\, m(\xi)] = \gamma n(\xi). \tag{46}$$

Переходя в равенствах (35) от преобразований к оригиналам, при помощи теоремы о свертке получим следующие асимптотические выражения

$$
\begin{aligned}
N(\tau, \tau_0) &= N(\tau) - \frac{1}{\tau_0} n\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) + \frac{1}{\tau_0}\int_0^{\tau} N(\tau')\, n\left(\frac{\tau-\tau'}{\tau_0}\right) d\tau', \\
M(\tau, \tau_0) &= \frac{1}{\tau_0} m\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) - \frac{1}{\tau_0}\int_0^{\tau} N(\tau')\, m\left(\frac{\tau'-\tau}{\tau_0}\right) d\tau'.
\end{aligned} \tag{47}
$$

Легко проверить, что определяемые этими формулами функции удовлетворяют системе (16) и условиям (21).

5. *Асимптотика* $\Phi(\tau, \tau_0)$. Воспользуемся соотношениями, связывающими $\Phi(\tau, \tau_0)$ и $\Phi(\tau)$ с $\Phi_\infty(\tau)$ — решением уравнения вида (3), в котором интеграл берется от $-\infty$ до $+\infty$. Эти соотношения имеют вид ([14], см. также [3]):

$$
\begin{aligned}
\Phi(\tau, \tau_0) = \Phi_\infty(\tau) &- \int_0^\infty \Phi_\infty(\tau + t)\, N(t, \tau_0)\, dt - \\
&- \int_0^\infty \Phi_\infty(\tau_0 - \tau + t)\, M(t, \tau_0)\, dt,
\end{aligned} \tag{48}
$$

$$
\Phi(\tau) = \Phi_\infty(\tau) - \int_0^\infty \Phi_\infty(\tau + t)\, N(t)\, dt. \tag{49}
$$

Подставляя в (48) асимптотики $M(\tau, \tau_0)$ и $N(\tau, \tau_0)$ из (47), меняя порядок интегрирования и учитывая (49), находим

$$
\begin{aligned}
\Phi(\tau, \tau_0) = \Phi(\tau) &+ \frac{1}{\tau_0}\int_0^\infty n\left(\frac{t}{\tau_0}\right) \Phi(\tau + t)\, dt - \\
&- \frac{1}{\tau_0}\int_0^\infty m\left(\frac{t}{\tau_0}\right) \Phi(\tau_0 - \tau + t)\, dt
\end{aligned} \tag{50}
$$

или

$$\Phi(\tau, \tau_0) = \Phi(\tau) + \frac{1}{\tau_0}\int\limits_{\tau}^{\infty} n\left(\frac{\tau' - \tau}{\tau_0}\right)\Phi(\tau')\,d\tau' - \\ - \frac{1}{\tau_0}\int\limits_{\tau_0-\tau}^{\infty} m\left(\frac{\tau' - \tau_0 + \tau}{\tau_0}\right)\Phi(\tau')\,d\tau'. \tag{51}$$

При помощи известных свойств гипергеометрических функций легко установить, что каждый из интегралов в (50) сходится при $0 < \gamma < 1/2$. Если, однако, разность интегралов рассматривать как один, то сходимость будет обеспечена при $0 < \gamma \leqslant 1$. Чтобы сходимость улучшить, вычтем и прибавим в (51) под знаками интегралов $\Phi_{as}(\tau')$. Тогда, вычисляя получающиеся интегралы, придем к более удобной для исследований (и особенно вычислений) формуле

$$\Phi(\tau, \tau_0) = \Phi(\tau) - \Phi_{as}(\tau)\left[1 - \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right)^{\gamma}\right] + \\ + \frac{1}{\tau_0}\int\limits_{\tau}^{\infty} n\left(\frac{\tau' - \tau}{\tau_0}\right)[\Phi(\tau') - \Phi_{as}(\tau')]\,d\tau' - \\ - \frac{1}{\tau_0}\int\limits_{\tau_0-\tau}^{\infty} m\left(\frac{\tau' - \tau_0 + \tau}{\tau_0}\right)[\Phi(\tau') - \Phi_{as}(\tau')]\,d\tau'. \tag{52}$$

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что каждое из трех выражений (50), (51) и (52) удовлетворяет соотношению (15) точно, если $\Phi(\tau_0, \tau_0)$ взять согласно (33). Можно показать, что из (50) следуют и асимптотики (40) для X- и Y-функций. Наоборот, из (40) можно вывести формулу (50). Сделать это, однако, не очень просто, поэтому мы предпочли обходный путь — через функции M и N, которые представляют и самостоятельный интерес.

6. *Частные случаи.* Выражение (52) довольно сложно. Посмотрим, что оно дает при различных предельных соотношениях между τ и τ_0. Рассмотрим сначала точки, находящиеся вдали от обеих граничных плоскостей. Удаленность от границ означает, что ни τ, ни $\tau_0 - \tau$ не очень малы по сравнению с τ_0. Тогда $\Phi(\tau)$ можно заменить на $\Phi_{as}(\tau)$, а обоими интегралами в (52) пренебречь. В результате получим

$$\Phi(\tau, \tau_0) = \Phi_{as}(\tau_0)\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{\gamma-1}\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{\gamma}. \tag{53}$$

Другими способами это выражение было получено в [12] и [13].

Вблизи границы $\tau = 0$, т. е. при $\tau \ll \tau_0$, в (52) можно откинуть второй интеграл, а в первом положить функцию n равной $n(0) = \gamma^2$. Действительно, при больших τ' разность $\Phi(\tau') - \Phi_{as}(\tau')$ мала, и основной вклад в оставленный интеграл дают малые τ'. Учитывая (29) и (30), находим, что при $\tau \ll \tau_0$

$$\Phi(\tau, \tau_0) = \Phi(\tau) - \frac{\gamma^2}{\tau_0}\Psi(\tau). \tag{54}$$

Эта формула согласуется с (47), так как

$$\lim_{\tau\to 0}[\Phi(\tau) - \Phi(\tau, \tau_0)] = \lim_{\tau\to 0}[N(\tau) - N(\tau, \tau_0)] = \frac{\gamma^2}{\tau_0}. \tag{55}$$

Напротив, для точек вблизи границы $\tau = \tau_0$ можно считать, что $\Phi(\tau) = \Phi_{as}(\tau)$ вне интегралов, отбросить первый интеграл, а во втором заменить m на $m(0) = \gamma$. Таким образом, при $\tau_0 - \tau \ll \tau_0$

$$\Phi(\tau, \tau_0) = \frac{\gamma}{\tau_0}\Psi(\tau_0 - \tau). \tag{56}$$

Последняя формула показывает, что значение $\Phi(\tau_0, \tau_0)$, даваемое (52), находится в согласии с (33).

Из проведенного рассуждения видно, что в формуле (52) внеинтегральные члены определяют поведение $\Phi(\tau, \tau_0)$ вдали от границ слоя, первый интеграл дает отклонения $\Phi(\tau, \tau_0)$ от $\Phi(\tau)$ около граничной плоскости $\tau = 0$, а второй около плоскости $\tau = \tau_0$.

Наконец, укажем формулу, охватывающую три рассмотренных предельных случая. Для этого, предполагая выполненным (32), заменим функции n и m в (52) их значениями в нуле. Тогда получим гораздо более простую, чем (52) формулу

$$\begin{aligned}\Phi(\tau, \tau_0) = \Phi(\tau) - \Phi_{as}(\tau)\left[1 - \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right)^{\gamma}\right] - \\ - \frac{\gamma}{\tau_0}[\gamma\Psi(\tau) - \Psi(\tau_0 - \tau) + \Psi_{as}(\tau_0 - \tau) - \gamma\Psi_{as}(\tau)].\end{aligned} \tag{57}$$

В [13] получена следующая асимптотика

$$\Phi(\tau, \tau_0) = \frac{\Phi(\tau)\Psi(\tau_0 - \tau)}{\Psi(\tau_0)}. \tag{58}$$

В отличие от (52) формулы (57) и (58) не являются строгими асимптотическими выражениями, в частности не удовлетворяют уравнению (15). Для двух областей — далекой от границ и вблизи $\tau = \tau_0$ — обе они переходят соответственно в (53) и (56). Для граничной же области $\tau \ll \tau_0$ (57) является несколько более точной: (58) дает лишь первое слагаемое в (54) правильно.

Рассуждения, приведенные при выводе формул этого и предыдущего пункта, строго говоря, справедливы лишь при $0 < \gamma < 1/2$ и $V_0(u) = \mathrm{const}$. Действительно, мы использовали функцию $\Phi_\infty(\tau)$, которая существует для $\gamma < 1/2$. При переходе от (52) к (57) предполагалось верное лишь для $V_0(u) = \mathrm{const}$ соотношение (32). От этих ограничений можно, однако, освободиться. Полученные для $0 < \gamma < 1/2$ выражения можно аналитически продолжить по γ, и они оказываются поэтому верны для всех значений $0 < \gamma \leqslant 1$. Если же $V_0(u)$ не постоянная, а медленно меняющаяся функция, то при выводе асимптотик выражения вида $V_0(\tau/\tau_0)$ надо заменять на $V_0(1/\tau_0)$. Тогда, как можно показать, все результаты остаются в силе. При $V_0(u) \neq \mathrm{const}$ асимптотические разложения $\Phi(\tau)$ и $H(z)$ могут идти не по степеням аргументов. Например, при допплеровском профиле разложения содержат обратные степени $\ln \tau$ и $\ln z$ [3]. Тогда, если в асимптотиках $\Phi(\tau)$ и $H(z)$ ограничиться (27) и (28), т. е. взять только первые члены разложений, то соотношения (32) перестают выполняться, причем интеграл в (32) может расходиться. Тем не менее, можно показать, что формулы (54), (56) и (57) верны и в этом случае, если при выводе их под $\Phi_{as}(\tau)$ понимать не выражение (28), а функцию, обеспечивающую сходимость интеграла в (32), в окончательных же результатах опять переходить к (28).

Отметим, что формулу (52) в случае монохроматического рассеяния ($\gamma = 1$) можно существенно уточнить, если (33) и (30) заменить на (см., например, [9])

$$\Phi_M(\tau_0, \tau_0) = \frac{1}{\tau_0 + 2q(\infty)}, \tag{59}$$

$$\Psi_M(\tau) = \sqrt{3}\,[\tau + q(\tau)], \tag{60}$$

где $q(\tau)$ — функция Хопфа [1], в частности $2q(\infty) = 1.4209$. Поскольку в (58) к τ_0 добавляется лишь постоянное слагаемое, то все выкладки предыдущих пунктов проходят без изменений, а поэтому остаются в силе и окончательные формулы (47) и (52), если заменить в них τ_0 перед интегралами на $\tau_0 + 2q(\infty)$. В соответствии с (44) в этом случае $n = m = 1$, так как $\gamma = 1$. В результате для $\Phi_M(\tau, \tau_0)$ получается выражение, найденное В. В. Соболевым в [9]:

$$\Phi_M(\tau,\ \tau_0) = \Phi_M(\tau) - \sqrt{3}\,\frac{\tau + q(\tau) - q(\tau_0 - \tau) + q(\infty)}{\tau_0 + 2q(\infty)}. \tag{61}$$

Отметим еще, что при $\gamma = 1$ приближенная формула (57) после замены τ перед последней квадратной скобкой на $\tau_0 + 2q(\infty)$, как и (52), переходит в (61). Формулы (53), (54) и (56) также оказываются справедливыми после указанной замены.

Асимптотика (61) дает $\Phi_M(\tau,\ \tau_0)$ с точностью до членов порядка $e^{-\tau_0}$. Относительно точности (52) в общем случае можно сказать следующее. Когда V_0 — постоянная, то порядок погрешности (52) меньше, чем $1/\tau_0$. В противном случае относительная ошибка имеет порядок той функции от τ_0, по степеням которой производится разложение в асимптотике $\Phi_{as}(\tau_0)$, например, при допплеровском профиле она порядка $1/\ln\tau_0$.

6. *Среднее число рассеяний.* Проиллюстрируем применение полученных результатов. Асимптотика (52) верна при любых значениях оптической глубины τ $(0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0)$, и следовательно эта формула позволяет получить решение любой задачи о консервативном рассеянии излучения в слое большой оптической толщины. В качестве примера рассмотрим вопрос о среднем числе рассеяний кванта в толстом слое. Пусть $Q(\tau,\ \tau_0)$ — среднее число рассеяний, которое в слое толщины τ_0 испытывает квант, первоначально находившийся в поглощенном состоянии на глубине τ. Для этой величины в [15] найдено следующее выражение:

$$Q(\tau,\ \tau_0) = \Psi(\tau_0,\ \tau_0)\,[\Psi(\tau,\ \tau_0) + \Psi(\tau_0 - \tau,\ \tau_0) - \Psi(\tau_0,\ \tau_0)]. \tag{62}$$

Для $Q(0,\ \tau_0) = \Psi(\tau_0,\ \tau_0)$ и $Q(\tau_0/2,\ \tau_0)$ в [15] были получены верхние и нижние оценки. Пользуясь (52), мы можем найти асимптотику $Q(\tau,\ \tau_0)$ при любых τ, а значит и среднее число рассеяний квантов при произвольном распределении первичных источников излучения. Ограничимся рассмотрением тех же предельных случаев, что и в предыдущем разделе.

Найдем поведение $Q(\xi\tau_0,\ \tau_0)$, где ни ξ, ни $1-\xi$ не слишком малы, т. е. кванты поглотились далеко от границ слоя. На основании формул (52) и (62) получим при $\xi = \mathrm{const}$ и $\tau_0 \to \infty$:

$$Q(\xi\tau_0,\ \tau_0) \sim \frac{\tau_0^{2\gamma}[\xi(1-\xi)]^{\gamma}}{\Gamma(1+2\gamma)\,V_0\!\left(\dfrac{1}{\tau_0}\right)} = \frac{\Gamma^2(1+\gamma)}{\Gamma(1+2\gamma)}\,\Psi_{as}(\xi\tau_0)\,\Psi_{as}[(1-\xi)\tau_0]. \tag{63}$$

В частности,

$$Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right) \sim \frac{\tau_0^{2\gamma}}{\Gamma(1+2\gamma)\, V_0\left(\frac{1}{\tau_0}\right) 2^{2\gamma}}. \tag{64}$$

Для допплеровского и лоренцовского профилей соответственно имеем

$$Q_D\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, \tau_0 \ln^{1/2} \tau_0, \quad Q_L\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right) \sim \frac{3}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\tau_0}. \tag{65}$$

В [15] были даны границы возможных значений численных коэффициентов в этих формулах: $0.6 \div 1.8$ и $1.3 \div 1.9$. Мы видим, что точные их значения 1.128 и 1.692 попадают примерно в середину указанных интервалов.

Для квантов, поглощенных вблизи границы $\tau = 0$, имеем из (62) и (52)

$$Q(\tau, \tau_0) \sim \frac{\tau_0^{\gamma}\, \Gamma(\gamma)\, \Psi(\tau)}{2\Gamma(2\gamma) \sqrt{V_0\left(\frac{1}{\tau_0}\right)}} = \frac{\Gamma^2(1+\gamma)}{\Gamma(1+2\gamma)}\, \Psi_{as}(\tau_0)\, \Psi(\tau). \tag{66}$$

Асимптотика $Q(0, \tau_0)$ была получена ранее в работе автора [11]. Заметим, что простое выражение

$$Q(\tau, \tau_0) \approx \frac{\Gamma^2(1+\gamma)}{\Gamma(1+2\gamma)}\, \Psi(\tau)\, \Psi(\tau_0 - \tau) \tag{67}$$

заключает в себе как частные случаи обе асимптотики (63) и (66) и может служить интерполяционной формулой для всех значений τ.

Ленинградский Государственный
университет

TRANSFER OF RESONANCE RADIATION IN THE OPTICALLY THICK LAYER

D. I. NAGIRNER

Transfer of resonance radiation in the plane-parallel layer of optical thickness τ_0 is considered. The scattering is assumed to be conservative, with complete frequency redistribution. The rigorous asymptotic ($\tau_0 \gg 1$) formula expressing the resolvent function $\Phi(\tau, \tau_0)$ for arbitrary $\tau\,(0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0)$ in terms of $\Phi(\tau) \equiv \Phi(\tau, \infty)$ is found. Hence the solution of a general problem of conservative light scattering in the optically thick layer is found. As an illustration the mean number of scatterings of a photon born at arbitrary τ in such a layer is found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.
2. *В. В. Соболев*, Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 11, 39, 1958; Астрон. ж., 36, 564, 1959.
3. *В. В. Иванов*, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
4. *Д. И. Нагирнер*, Астрон. ж., 41, 669, 1964; Уч. зап. ЛГУ, № 337 (Труды Астрон. обс. ЛГУ, XXV), 3, 1968.
5. *Ю. Ю. Абрамов, А. М. Дыхне, А. П. Напартович*, Астрофизика, 3, 459, 1967.
6. *D. J. Hummer, G. Rybicki*, Methods Computat. Phys., 7, 53, 1967.
7. *В. В. Иванов*, Астрон. ж., 40, 257, 1963.
8. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 34, 336, 1957.
9. *В. В. Соболев*, ДАН СССР, 155, 336, 1964.
10. *В. В. Иванов*, Астрон. ж., 41, 1097, 1964.
11. *Д. И. Нагирнер*, Астрофизика, 3, 293, 1967.
12. *В. В. Иванов*, J. Q. S. R. T., в печати.
13. *Ю. Ю. Абрамов, А. М. Дыхне, А. П. Напартович*, ЖЭТФ, 56, 654, 1969; Институт атомной энергии. ИАЭ—1804, М., 1969.
14. *В. В. Иванов*, Астрон. ж., 41, 44, 1964.
15. *В. В. Соболев*, Астрофизика, 3, 137, 1967.