

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 5

АВГУСТ, 1969

ВЫПУСК 3

МЕДЛЕННОЕ ВРАЩЕНИЕ БЕЛЫХ КАРЛИКОВ И БАРИОННЫХ ЗВЕЗД

В. В. ПАПОЯН, Д. М. СЕДРАКЯН, Э. В. ЧУБАРЯН

Поступила 10 февраля 1969

Исправлена 29 апреля 1969

В статье рассматривается вращение белых карликов и барионных звезд в первом по угловой скорости вращения Ω приближении. Найдено распределение диагональной компоненты метрики и релятивистского момента инерции вдоль радиуса звезды, оценена величина энергии вращения. Полученные результаты верны и во втором приближении по Ω .

Результаты численного интегрирования представлены табл. 1 и рисунками 1–4. Рассмотрены переходы с сохранением числа барионов и момента импульса между состояниями гиперонных звезд с разными энергиями. Показано, что при переходах за счет разницы в массах высвобождается энергия $\sim 10^{51}$ эрг. Энергия такого же порядка высвобождается за счет уменьшения энергии вращения. Вероятно, эта энергия обеспечивает с одной стороны наблюдаемую светимость, с другой—приводит к пульсациям рассматриваемого объекта.

1. Вращение, по-видимому, играет важную роль в эволюции звезд, исчерпавших запасы ядерного горючего. Есть основания предполагать, что вращение стабилизирует „холодную“ звезду относительно коллапса, если даже ее масса больше критической. Кроме того, остывающая звезда, сжимаясь, пульсирует, а вращение может служить приемлемым механизмом затухания осцилляций [1]. Высвобожденную при этом энергию можно интерпретировать как энергию, выделяющуюся при вспышках сверхновых [2].

В недавних работах [3] предложен метод и рассчитаны интегральные характеристики вращающихся белых карликов и нейтронных звезд на основе теории тяготения Ньютона. Однако ясно, что для рассматриваемых объектов релятивистские эффекты играют существенную роль, поэтому решение задачи необходимо проводить в рамках

теории Эйнштейна. В работах [4, 5] разработан метод расчета характеристик вращающихся релятивистских конфигураций во втором по угловой скорости $\Omega = d\varphi/dt$ приближении. Приближение малых угловых скоростей является вполне удовлетворительным для астрофизических объектов. Действительно, использование этого приближения вплоть до максимально возможных значений угловой скорости, без истечения вещества с экватора конфигурации, приводит к незначительным изменениям ее внутренней структуры.

В настоящей работе рассмотрено вращение белых карликов и барионных звезд в первом по Ω приближении. Определено распределение недиагональной компоненты метрики, релятивистского момента инерции вдоль радиуса звезды, оценена величина энергии вращения. Важно подчеркнуть, что полученные результаты не меняются во втором по Ω приближении [5].

Аналогичные расчеты на основе другого метода были сделаны в работе [12]. В этой работе в качестве уравнений состояния брались уравнения состояния [13] и [14]. Ниже мы рассмотрим задачу для уравнения состояния, полученного в работах [8, 9].

2. В рассматриваемом приближении метрика гравитационного поля, созданного равновесным распределением масс, вращающихся как твердое тело, имеет вид

$$-ds^2 = e^\lambda dR^2 + R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + 2\omega R^2 \sin^2 \theta d\varphi dt - e^\nu dt^2. \quad (1)$$

Соответствующие этой метрике уравнения Эйнштейна внутри конфигурации

$$\frac{dm}{dR} = 4\pi\rho R^2, \quad (2)$$

$$\frac{dP}{dR} = -F(R) \left(P + \frac{m}{4\pi R^3} \right), \quad (3)$$

$$\frac{dq}{dR} = \chi, \quad (4)$$

$$\frac{d\chi}{dR} = \left[F(R) - \frac{4}{R} \right] \chi + \frac{4F(R)}{R} q. \quad (5)$$

Здесь

$$F(R) = \frac{4\pi R^2 (P + \rho)}{R - 2m}; \quad q = \frac{\omega + \Omega}{D\sqrt{\beta}}; \quad \beta = \frac{\Omega^2}{8\pi\rho_c}; \quad (6)$$

$m(R)$ — масса, заключенная в сфере радиуса R , ρ — плотность энергии, P — давление вещества, D — некоторая постоянная. Принята система единиц, в которой $k = c = 1$, $m_n^4 c^5 / 32 \pi^2 \hbar^3 = 1/4 \pi$ [6].

Последние два уравнения системы (2)–(5) позволяют определить функцию $q = q(R)$ с точностью до постоянной D , значение которой определяется из требования непрерывности $g_{t\varphi} = \omega R^2 \sin^2 \theta$ и ее производной на границе конфигурации. Из (4)–(6) легко получить уравнение

$$\frac{d^2 \omega^{\text{BH}}}{dR^2} + \frac{4}{R} \frac{d\omega^{\text{BH}}}{dR} = 0, \quad (7)$$

которому удовлетворяет ω вне распределения масс. Решение этого уравнения $\omega^{\text{BH}} = C_0 + C/R^3$ должно обращаться в нуль на бесконечности, поэтому необходимо принять $C_0 = 0$. Условия сшивки приводят к следующим значениям произвольных постоянных C и D

$$D = \frac{3 \sqrt{8 \pi \rho_c}}{3 q(R_0) + R_0 \chi(R_0)}, \quad (8)$$

$$C = - \frac{D \chi(R_0) R_0^3}{3}. \quad (9)$$

R_0 — координатный радиус звезды, определенный как корень уравнения $P(R_0) = 0$. Сравнивая полученное для недиагональной компоненты метрики выражение с внешним решением Папапетру [7] $g_{t\varphi} = (-2J\Omega/R) \sin^2 \theta$, для полного релятивистского момента инерции конфигурации имеем

$$J(R_0) = \frac{1}{2} \frac{R_0^4 \chi(R_0)}{3 q(R_0) + R_0 \chi(R_0)} = - \frac{C}{2 \sqrt{8 \pi \rho_c}}, \quad (10)$$

а для распределений момента инерции и недиагональной компоненты метрики вдоль радиуса звезды

$$J(R) = \left[1 - \frac{3 q(R)}{3 q(R_0) + R_0 \chi(R_0)} \right] \frac{R^3}{2},$$

$$g_{t\varphi} = - \Omega R^2 \sin^2 \theta \left[1 - \frac{3 q(R)}{3 q(R_0) + R_0 \chi(R_0)} \right]. \quad (11)$$

Интегрирование системы уравнений (2)–(5) становится возможным, если добавить к ним уравнение состояния. Для белых карликов и оболочек барионных звезд применялось уравнение состояния, полу-

ченное в работе [8], а для газа взаимодействующих барионов, которые составляют ядро конфигурации—полученное в [9]. Система (2)—(5) проинтегрирована на ЭВМ „Наири“ со следующими начальными условиями: $m(0) = 0$, $P(0) = P_c$, $q(0) = 1$, $\chi(0) = 0$, для целого ряда значений центрального давления от $P_c = 7.41 \cdot 10^{32}$ эрг/см³; до $P_c = \infty$.

В случае гипотетической конфигурации с бесконечной плотностью в центре было принято предельное уравнение состояния $P = \rho$ [10] до значения $P = 1.02 \cdot 10^{38}$ эрг/см³. В области $1.02 \cdot 10^{38} < P < \infty$ система (2)—(5) допускает аналитическое решение. Действительно, если положить $P = \rho = a \cdot R^{-n}$, где a и n некоторые постоянные, то получим

$$P = \rho = \frac{1}{4R^2}; \quad m = \frac{R}{4}; \quad q = R^{(\sqrt{5}-1)}.$$

Найденные значения искомых функций использовались в качестве начальных условий для последующего численного интегрирования.

3. Результаты численного интегрирования представлены табл. 1 и рис. 1—4.

Затабулированы интегральные параметры вращающихся конфигураций. В первом столбце таблицы приводятся значения параметра $\eta = \text{artg } \lg(\rho_c/\rho_1)$, где $\rho_1 = 3.62 \cdot 10^{14}$ г/см³ — ядерная плотность. Интервалу $-1.45 < \eta < -1.27$ соответствует область белых карликов, $-1.27 < \eta < 0.367$ — область звезд с нуклонным ядром, в котором преобладают нейтроны, а при $\eta > 0.367$ в центральном ядре конфигурации создаются условия для стабильности гиперонов. Максимальное без истечения вещества, значение угловой скорости определялось условием $\Omega_{\max} = \sqrt{km(R_0)/R_0^3}$, максимальное значение энергии вращения оценено по формуле $E_{\text{вр.}}^{\max} = J(R_0) \cdot \Omega_{\max}^2/2$. Как видно из табл. 1, у белых карликов энергия вращения по сравнению с полной энергией составляет доли процента, тогда как в области максимального значения массы последовательности гиперонных звезд ее отношение к полной энергии порядка 30%. Это, по-видимому, связано с компактностью гиперонных конфигураций, которая приводит к увеличению $\Omega_{\max}$. Таким образом, отмеченное различие в величине энергии вращения в конечном счете связано с релятивистскими эффектами, поскольку в ньютоновском случае [3] этой разницы нет.

На рис. 1 показана зависимость $g_{\text{тф}}/\Omega \sin^2 \theta$ от радиуса. Внутри конфигурации недиагональная компонента метрики растет от нуля, достигает максимума, затем убывает до значения $2J\Omega/R^3$. Отметим,

Таблица 1

η	$\rho_c (г/см^3)$	$M/M_\odot$	$R_0 (км)$	$J (г/см^2)$	$\Omega_{\max} (1/сек)$	$E_{вр.}^{\max} (эрг)$
-1.45	$1.978 \cdot 10^8$	0.5005	$9.615 \cdot 10^3$	$1.679 \cdot 10^{50}$	0.2727	$6.244 \cdot 10^{48}$
-1.43	$5.407 \cdot 10^7$	1.056	$4.935 \cdot 10^3$	$7.872 \cdot 10^{49}$	1.077	$4.565 \cdot 10^{49}$
-1.39	$7.042 \cdot 10^8$	1.255	$2.701 \cdot 10^3$	$2.211 \cdot 10^{49}$	2.901	$9.304 \cdot 10^{49}$
-1.38	$2.092 \cdot 10^9$	1.269	$2.046 \cdot 10^3$	$1.146 \cdot 10^{49}$	4.424	$1.122 \cdot 10^{50}$
-1.36	$7.29 \cdot 10^9$	1.247	$1.471 \cdot 10^3$	$5.145 \cdot 10^{48}$	7.193	$1.331 \cdot 10^{50}$
-1.33	$3.602 \cdot 10^{10}$	1.165	$9.581 \cdot 10^2$	$1.709 \cdot 10^{48}$	10.15	$1.474 \cdot 10^{50}$
-1.29	$1.062 \cdot 10^{11}$	1.077	$7.24 \cdot 10^2$	$7.934 \cdot 10^{47}$	19.36	$1.487 \cdot 10^{50}$
-1.27	$2.447 \cdot 10^{11}$	0.9928	$5.944 \cdot 10^2$	$4.383 \cdot 10^{47}$	24.99	$1.368 \cdot 10^{50}$
-1.15	$2.11 \cdot 10^{12}$	0.951	$6.60 \cdot 10^2$	$4.997 \cdot 10^{47}$	20.92	$1.093 \cdot 10^{50}$
-0.85	$2.63 \cdot 10^{13}$	0.899	$1.410 \cdot 10^3$	$2.320 \cdot 10^{48}$	6.508	$4.914 \cdot 10^{49}$
-0.67	$5.97 \cdot 10^{13}$	0.733	$3.840 \cdot 10^3$	$1.915 \cdot 10^{49}$	1.308	$1.638 \cdot 10^{49}$
-0.62	$7.10 \cdot 10^{13}$	0.236	$4.500 \cdot 10^3$	$8.082 \cdot 10^{48}$	0.5849	$1.383 \cdot 10^{48}$
-0.555	$8.69 \cdot 10^{13}$	0.125	$2.630 \cdot 10^3$	$5.496 \cdot 10^{44}$	30.13	$2.495 \cdot 10^{47}$
-0.105	$2.84 \cdot 10^{14}$	0.259	17.7	$1.684 \cdot 10^{44}$	$2.483 \cdot 10^3$	$5.192 \cdot 10^{50}$
0.18	$5.51 \cdot 10^{14}$	0.639	13.0	$4.923 \cdot 10^{44}$	$6.197 \cdot 10^3$	$9.45 \cdot 10^{52}$
0.367	$8.78 \cdot 10^{14}$	0.984	12.1	$8.138 \cdot 10^{44}$	$8.564 \cdot 10^3$	$2.984 \cdot 10^{52}$
0.462	$1.14 \cdot 10^{15}$	1.18	11.8	$9.854 \cdot 10^{44}$	$9.738 \cdot 10^3$	$4.672 \cdot 10^{52}$
0.582	$1.65 \cdot 10^{15}$	1.39	10.9	$1.121 \cdot 10^{45}$	$1.191 \cdot 10^4$	$7.94 \cdot 10^{53}$
0.692	$2.44 \cdot 10^{15}$	1.51	10.2	$1.114 \cdot 10^{45}$	$1.371 \cdot 10^4$	$1.047 \cdot 10^{53}$
0.984	$1.16 \cdot 10^{16}$	1.39	7.37	$5.712 \cdot 10^{44}$	$2.141 \cdot 10^4$	$1.309 \cdot 10^{53}$
1.105	$3.53 \cdot 10^{16}$	1.17	6.51	$3.297 \cdot 10^{44}$	$2.367 \cdot 10^4$	$9.236 \cdot 10^{51}$
1.156	$6.80 \cdot 10^{16}$	1.08	6.38	$2.689 \cdot 10^{44}$	$2.344 \cdot 10^4$	$7.387 \cdot 10^{52}$
1.193	$1.21 \cdot 10^{17}$	1.04	6.43	$2.489 \cdot 10^{44}$	$2.273 \cdot 10^4$	$6.431 \cdot 10^{52}$
1.227	$2.27 \cdot 10^{17}$	1.03	6.63	$2.471 \cdot 10^{44}$	$2.160 \cdot 10^4$	$5.764 \cdot 10^{52}$
1.266	$5.47 \cdot 10^{17}$	1.05	6.87	$2.712 \cdot 10^{44}$	$2.068 \cdot 10^4$	$5.800 \cdot 10^{52}$
1.303	$1.61 \cdot 10^{18}$	1.08	7.00	$2.995 \cdot 10^{44}$	$2.039 \cdot 10^4$	$6.226 \cdot 10^{52}$
1.368	$2.70 \cdot 10^{18}$	1.10	6.92	$3.010 \cdot 10^{44}$	$2.094 \cdot 10^4$	$6.598 \cdot 10^{52}$
1.402	$2.70 \cdot 10^{20}$	1.09	6.93	$2.971 \cdot 10^{44}$	$2.08 \cdot 10^4$	$6.426 \cdot 10^{52}$
1.433	$5.68 \cdot 10^{20}$	1.09	6.94	$2.983 \cdot 10^{44}$	$2.08 \cdot 10^4$	$6.424 \cdot 10^{52}$
1.57	∞	1.09	6.89	$2.997 \cdot 10^{44}$	$2.098 \cdot 10^4$	$6.596 \cdot 10^{52}$

что чем плотнее конфигурация, тем ближе к ее границе $g_{cr}/\Omega \sin^2 \theta$ принимает максимальное значение. С величиной g_{cr} связано релятивистское вовлечение во вращение частицы, свободно падающей из бесконечности в точку (R, θ) (эффект Лензе-Тирринга). В нашем случае угловая скорость частицы, свободно падающей из бесконечности в гравитационном поле вращающегося тела, с точки зрения не-

подвижного наблюдателя есть $-\omega = g_{t\varphi}/g_{\varphi\varphi}$. Нетрудно видеть, что $-\omega$ всегда меньше Ω , максимально в центре, монотонно убывает с ростом R и обращается в нуль на бесконечности.

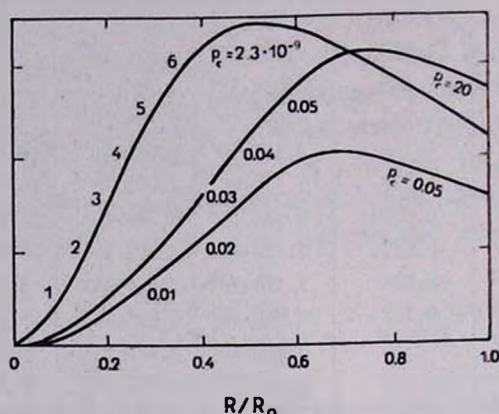


Рис. 1. Распределение величины $g_{t\varphi}/\Omega \sin^2 \theta$ внутри следующих конфигураций: белого карлика ($P_c = 2.3 \cdot 10^{-9}$), звезды с нуклонным ядром и оболочкой ($P_c = 0.05$) и гиперонной звезды ($P_c = 20$). P_c измерено в единицах Оппенгеймера-Волкова, R_0 — координатный радиус звезды.

Рис. 2 показывает распределение релятивистского момента инерции $J(R)$ внутри конфигурации. Легко видеть, что насыщение $J(R)$ у менее плотных конфигураций происходит в более глубоких областях звезды. Как показывает расчет, у гипотетической конфигурации с бесконечной плотностью в центре $J(R)$ растет вплоть до самой границы.

Рис. 3 представляет зависимость полного релятивистского момента инерции (10) от центральной плотности. В области белых карликов и метастабильных звезд с небольшим нуклонным ядром (до значений $\rho_c \sim 7 \cdot 10^{13}$ г/см³) релятивистские поправки дают незначительный вклад в величину $J(R_0)$. Действительно, если учесть, что указанные конфигурации имеют массы одинакового порядка, то из табл. 1 и кривой на рис. 3 видно, что, как и в ньютоновской теории, $J(R_0)$ ведет себя аналогично R_0 . Дальнейшее увеличение центральных плотностей делает более ощутимым вклад релятивистских членов в $J(R_0)$. В области гиперонных звезд поведение $J(R_0)$ аналогично поведению полной релятивистской массы конфигурации. И, наконец, при сверхвысоких плотностях $J(R_0)$ осциллирует, что является сугубо релятивистским эффектом.

На рис. 4 приведена зависимость $J(R_0)$ от полного числа барионов N . При $1.29 \cdot 10^{57} < N < 2.12 \cdot 10^{57}$ одному и тому же числу барионов соответствуют две звезды с разными $m(R_0)$ и $J(R_0)$, а при $1.16 \cdot 10^{57} < N < 1.29 \cdot 10^{57}$ — три и более. Согласно результатам работы [11] верхняя ветвь на рис. 4 соответствует стабильным конфигурациям. Энергетически более выгодным является состояние на

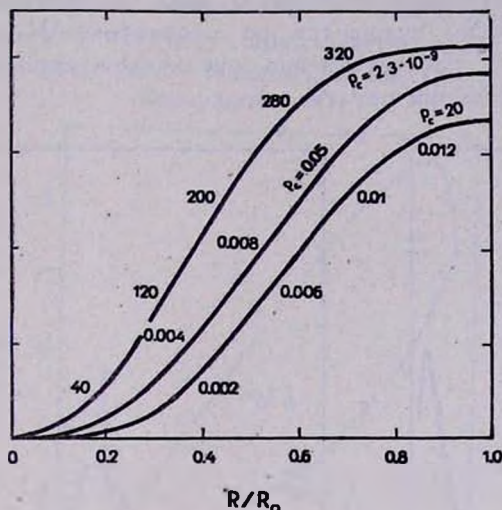


Рис. 2. Распределение релятивистского момента инерции $J(R)$ внутри следующих конфигураций: белого карлика ($P_c = 2.3 \cdot 10^{-9}$), звезды с нуклонным ядром и оболочкой ($P_c = 0.05$) и гипернонной звезды ($P_c = 20$). P_c и $J(R)$ измерены в единицах Оппенгеймера-Волкова. R_0 — координатный радиус звезды.

верхней ветви (на кривой $m(R_0)$ от N работы [11] соответственно на нижней ветви), поэтому логично рассматривать переходы между статическими состояниями на рис. 4 при фиксированном числе барионов. Пусть в метастабильном состоянии конфигурация вращается с максимально возможной скоростью $\Omega_{\max}$. Если считать, что при переходе в стабильное состояние сохраняется момент импульса, то расчет показывает, что при двойных ($N = 1.4 \cdot 10^{57}$) и тройных ($N = 1.25 \cdot 10^{57}$) переходах за счет уменьшения энергии вращения высвобождается энергия порядка 10^{52} эрг.

Вероятно, что эта энергия может быть израсходована на раскачку пульсаций конфигурации. Механизм преобразования энергии вращения в энергию колебаний является предметом специального исследования. Однако укажем здесь, что такой энергии соответствуют пульсации с периодом порядка 10^{-4} сек.

Возможно также, что высвобожденная за счет вращения энергия каким-либо способом излучается с поверхности конфигурации. Если отождествить с рассмотренными здесь объектами сверхновую и учесть, что типичная мощность излучения остатка вспышки ее согласно наблюдательным данным 10^{36} эрг/сек, то выделяющаяся энергия вращения может обеспечить такую мощность в течение 10^5 лет. Отметим, что оценки сделаны в предположении о том, что в метастабильном состоянии конфигурация вращается со скоростью Ω_{max} . При меньших угловых скоростях соответственно увеличится период пульсаций и уменьшится время жизни остатка сверхновой.

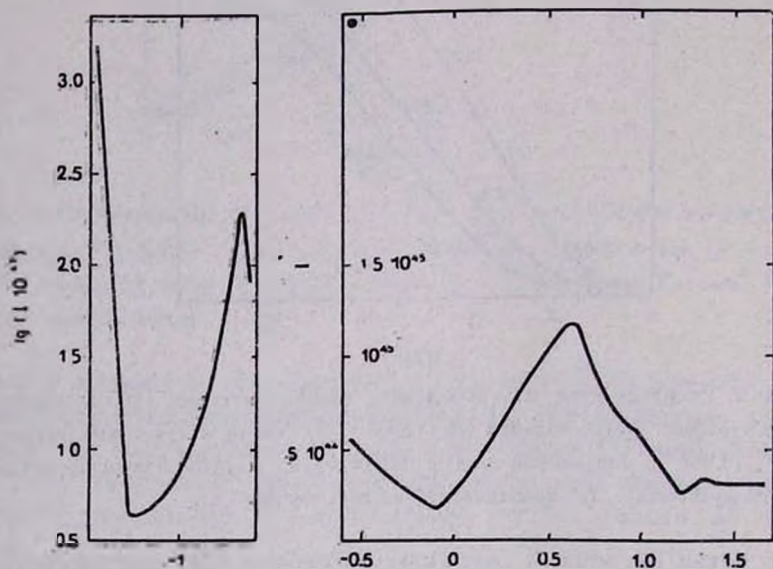


Рис. 3. Зависимость полного релятивистского момента инерции $J(R_0)$ от центральной плотности. $J(R_0)$ измерен в единицах CGS. На оси абсцисс отложены значения параметра $\eta = \text{arctg} \lg(\rho_c/\rho_1^4)$, где $\rho_1 = 3.62 \cdot 10^{14}$ г/см³ — ядерная плотность.

Недавно внутри Крабовидной туманности был обнаружен пульсар с периодом 0.033 секунды. Весьма заманчиво связать с ним изложенные выше соображения. Пусть метастабильная гиперонная звезда с центральной плотностью $3 \cdot 10^{16}$ г/см³ и полным числом барионов $N = 1.4 \cdot 10^{57}$, массу, радиус и момент инерции которой легко найти из табл. 1, вращается с угловой скоростью $\Omega < \Omega_{\text{max}}$. Скорость вращения этой звезды такова, что при переходе в стабильное состояние с тем же числом барионов и с сохранением полного момента импульса за счет энергии вращения высвободится 10^{48} эрг.

Если даже предположить, что при переходе в течение короткого промежутка времени будет высвечена разница в массах между этими состояниями, то есть 10^{32} эрг (вспышка сверхновой), то в остатке этой сверхновой, мощность которой согласно наблюдательным данным оценивается в 10^{38} эрг/сек, разница в энергиях вращения может быть преобразована в энергию колебаний. Тогда остаток будет пульсировать с периодом $3 \cdot 10^{-2}$ сек и излучать 10^{38} эрг/сек в течение 10^3 лет. Этот остаток в предлагаемой модели является (см. рис. 4 и табл. 1) стабильной гиперонной звездой с массой $\sim 1M_{\odot}$,

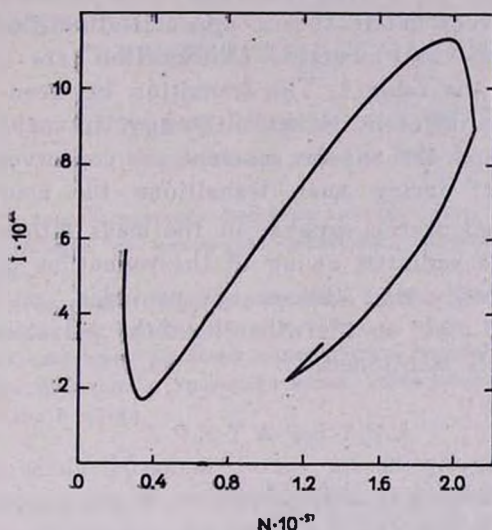


Рис. 4. Зависимость полного релятивистского момента инерции $J(R_0)$ от полного числа барионов конфигурации N . $J(R_0)$ измерен в единицах CGS.

радиусом ~ 10 км, моментом инерции $\sim 9 \cdot 10^{44}$ г/см² и со скоростью вращения на экваторе $2 \cdot 10^3$ км/сек. По-видимому, предыдущее может служить дополнительным аргументом в пользу отождествления пульсов с вращающимися гиперонными или нейтронными звездами.

В заключение выражаем благодарность профессору Г. С. Саакяну за обсуждения и А. В. Тербиж за помощь в проведении численных расчетов.

Ереванский Государственный
университет
Бюраканская астрофизическая
обсерватория

SLOW ROTATION OF WHITE DWARFS AND BARIONIC STARS

V. V. PAPOYAN, D. M. SEDRAKIAN, E. V. CHUBARIAN

The slow rotation of the white dwarfs and the barionic stars is considered in the first approximation, considering the angular velocity of the rotation Ω as a small parameter.

The distribution of the nondiagonal component of the metric and of the relativistic moment of inertia along the radius of the star is found. The rate of the energy of rotation is evaluated. The results obtained remain correct in the second approximation also.

The results of the numerical integration are represented in figures 1—4 and in the table 1. The transition between the states [of hyperonic stars with different values of energy is considered, when the number of barions and the angular moment are conserved.

It is shown that during such transitions the amount of energy $\sim 10^{52}$ erg is radiated at the expense of the mass difference. An energy of the same order is radiated owing to the reduction of the energy of rotation. The possibility that this energy provides, on one hand the observed luminosity and on the other hand the pulsation of the object under investigation is mentioned.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. K. Thorne, D. Meltzer, *Ap. J.*, 145, 514, 1966.
2. J. Wheeler, *Ann. Rev. Astr. Ap.*, 4, 1966.
3. В. В. Папоян, Д. М. Седракян, Э. В. Чубарян, *Сообщ. Бюр. обс.*, 39, 101; 40, 82, 1968.
4. J. B. Hartle, *Ap. J.*, 150, 1005, 1967.
5. Д. М. Седракян, Э. В. Чубарян, *Астрофизика*, 4, 239; 4, 481, 1968.
6. J. R. Oppenheimer, G. M. Volkoff, *Phys. Rev.*, 55, 374, 1939.
7. A. Papapetrou, *Proc. R. Ir. Acad.*, 52, 11, 1948.
8. Г. С. Саакян, Э. В. Чубарян, *Сообщ. Бюр. обс.*, 34, 99, 1963.
9. Г. С. Саакян, Ю. Л. Вартамян, *Сообщ. Бюр. обс.*, 33, 55, 1963.
10. Г. С. Саакян, *Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук*, 14, 117, 1961.
11. Г. С. Саакян, Ю. Л. Вартамян, *Астрон. ж.*, 41, 193, 1964.
12. J. B. Hartle, K. S. Thorne, *Ap. J.*, 153, 807, 1968.
13. B. K. Harrison, K. S. Thorne, H. Wakano, J. Wheeler, *Gravitational Theory and Gravitational Collapse*, 1965.
14. S. Tsuruta, A. G. W. Cameron, *Can. J. Phys.*, 44, 1895, 1966.