АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
АСТРОФИЗИКА
ТОМ 5 АВГУСТ, 1969 ВЫПУСК 3

ПОЛИХРОМАТИЧЕСКОЕ РАССЕЯНИЕ СВЕТА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

В. Ю. ТЕРЕБИЖ

Поступила 6 декабря 1968

Рассматривается чистое рассеяние излучения в плоском слое газа, освещенном внешними источниками излучения. Предполагается, что а) газ состоит из атомов, обладающих тремя энергетическими уровнями; б) оптические толщины среды бесконечно велики во всех частотах; в) коэффициент поглощения в линии имеет прямоугольный контур. Решение задачи получено в приближении Шварцшильда—Шустера. Приводится физическая интерпретация результатов.

Известно, что для решения целого ряда астрофизических вопросов применяемое часто в теории переноса излучения приближение, основанное на рассмотрении атомов лишь с двумя уровнями, является недостаточным. К таким вопросам относятся, например, задача о взаимодействии излучения в непрерывном спектре и в спектральных линиях в звездных атмосферах и расчет степени ионизации в протяженных оболочках звезд. Эти задачи требуют рассмотрения атомов, обладающих, по крайней мере, тремя уровнями энергии.

Вместе с тем, проблема полихроматического лучистого равновесия сталкивается с трудностями, которые обусловлены существенной нелинейностью уравнений переноса излучения. Если для атомов с двумя уровнями сравнительно широкий класс задач удается решить в линейном приближении (для этого достаточно, чтобы плотность энергии излучения была мала), то в случае многоуровенных атомов нелинейность характерна для самой постановки задачи и лишь в исключительных случаях проблема сводится к решению линейных уравнений.

Строгое исследование нелинейных задач теории диффузии излучения было начато в работах В. А. Амбарцумяна [1—3], где было сделано соответствующее обобщение принципа инвариантности и предложен метод самосогласованных оптических глубин. В дальнейшем

А. Г. Никогосян [4], применив принцип инвариантности, рассмотрел задачу о диффузном отражении света от одномерной бесконечно глубокой среды, состоящей из атомов с тремя уровнями.

В настоящей работе исследуется поле излучения внутри плоского слоя газа, состоящего из трехуровенных атомов и освещенного извне заданными отличными от нуля потоками излучения. Оптические толщины среды во всех трех частотах считаются бесконечно большими. Мы предполагаем также, что переходами под действием электронных ударов можно пренебречь и что коэффициент поглощения в линии имеет прямоугольный контур*. При решении уравнений переноса используется метод Шварцшильда-Шустера усреднения интенсивности излучения по углам. Конечно, внеся небольшие изменения, можно получить решение и в приближении Эддингтона.

1. Обозначим через z расстояние, отсчитанное от границы среды, через I'_{ik} и I^{*}_{ik} — средние интенсивности излучения в частоте ν_{ik}, идущего соответственно в сторону возрастающих и в сторону убывающих глубин. Уравнения переноса излучения в приближении Шварцшильда-Шустера имеют вид

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{dI'_{ik}}{dz} &= -\frac{h\nu_{ik}B_{ik}}{c\,\Delta\nu_{ik}}\left(n_i-\frac{g_i}{g_k}n_k\right)I'_{ik}+n_kA_{ki}\frac{h\nu_{ik}}{4\pi\Delta\nu_{ik}},\\ -\frac{1}{2}\frac{dI^{*}_{ik}}{dz} &= -\frac{h\nu_{ik}B_{ik}}{c\,\Delta\nu_{ik}}\left(n_i-\frac{g_i}{g_k}n_k\right)I^{*}_{ik}+n_kA_{ki}\frac{h\nu_{ik}}{4\pi\Delta\nu_{ik}}, \end{aligned}\right. \tag{1}$$

где $i,\ k=1, 2, 3;\ i<k$. Запишем также условия стационарности

$$\left\{\begin{aligned} n_3(A_{31}+B_{31}\rho_{13})+n_2(A_{21}+B_{21}\rho_{12}) &= n_1(B_{12}\rho_{12}+B_{13}\rho_{13}),\\ n_3(A_{31}+B_{31}\rho_{13}+A_{32}+B_{32}\rho_{23}) &= n_1B_{13}\rho_{13}+n_2B_{23}\rho_{23}, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

где

$$\rho_{ik}=\frac{2\pi}{c}\left(I'_{ik}+I^{*}_{ik}\right) \tag{3}$$

есть плотность излучения в частоте ν_{ik}.

---

* Нахождение решения задачи с учетом перераспределения излучения по частоте, представляющего, несомненно, больший интерес для практических применений, требует использования значительно более сложного аппарата и сталкивается в настоящее время с рядом трудностей.

В дальнейшем удобно перейти в уравнениях переноса к оптической глубине τ в частоте ν_{13}, которая определяется соотношением

$$\tau = \frac{h\nu_{13}B_{13}}{c\,\Delta\nu_{13}}\int\limits_0^z\left(n_1 - \frac{g_1}{g_3}\,n_3\right)dz. \tag{4}$$

Вводя также обозначения

$$\begin{gathered} \sigma_{ik} = \frac{8\pi h\nu_{ik}^3}{c^3}, \qquad \bar{\rho}_{ik} = \frac{\rho_{ik}}{\sigma_{ik}}, \\ H_{ik} = \frac{\pi}{c\,\sigma_{ik}}\,(I_{ik}' - I_{ik}''), \qquad C_{ik} = \frac{1}{\dfrac{g_k}{g_i}\dfrac{n_i}{n_k} - 1}, \end{gathered} \tag{5}$$

получаем из (1):

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{4}\frac{d\bar{\rho}_{13}}{d\tau} = -H_{13}, && \frac{dH_{13}}{d\tau} = C_{13} - \bar{\rho}_{13}, \\ &\frac{1}{4}\frac{d\bar{\rho}_{12}}{d\tau} = -\frac{1}{q}\left(1 - \frac{C_{13}}{C_{23}}\right)H_{12}, && \frac{dH_{12}}{d\tau} = \frac{1}{q}\left(1 - \frac{C_{13}}{C_{23}}\right)(C_{12} - \bar{\rho}_{12}), \\ &\frac{1}{4}\frac{d\bar{\rho}_{23}}{d\tau} = -s\,\frac{C_{13}}{G_{23}}\,H_{23}, && \frac{dH_{23}}{d\tau} = s\,\frac{C_{13}}{C_{23}}\,(C_{23} - \bar{\rho}_{23}), \end{aligned}\right. \tag{6}$$

где постоянные

$$q = \frac{B_{13}\nu_{13}\Delta\nu_{12}}{B_{12}\nu_{12}\Delta\nu_{13}}, \qquad s = \frac{g_2B_{23}\nu_{23}\Delta\nu_{13}}{g_1B_{13}\nu_{13}\Delta\nu_{23}}. \tag{7}$$

Условия стационарности в обозначениях (5) принимают вид

$$\left\{\begin{aligned} &C_{13} - \bar{\rho}_{13} + k\left(1 - \frac{C_{13}}{C_{23}}\right)(C_{12} - \bar{\rho}_{12}) = 0, \\ &C_{13} - \bar{\rho}_{13} + \varkappa\,\frac{C_{13}}{C_{23}}\,(C_{23} - \bar{\rho}_{23}) = 0, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

где

$$k = \frac{g_2A_{21}}{g_3A_{31}}, \qquad \varkappa = \frac{A_{32}}{A_{31}}. \tag{9}$$

Кроме того, непосредственно из определения функций C_{ik} следует тождество

$$\frac{C_{13}}{1+C_{13}}=\frac{C_{12}}{1+C_{12}}\,\frac{C_{23}}{1+C_{23}}. \tag{10}$$

Рассмотрим граничные условия, которые необходимо поставить в данном случае. Прежде всего, нам заданы потоки падающего на среду излучения во всех частотах

$$F_{ik}=\frac{\pi}{c\alpha_{ik}}\,I'_{ik}(0), \tag{11}$$

поэтому три граничных условия при $\tau=0$ имеют вид

$$[\bar{\rho}_{ik}+2H_{ik}]_{\tau=0}=4F_{ik}. \tag{12}$$

Далее, потребуем, чтобы $\bar{\rho}_{ik}$ были положительны и ограничены при $\tau\to\infty$. Тогда уравнения (6) показывают, что

$$\lim_{\tau\to\infty} H_{ik}=0. \tag{13}$$

Эти соотношения можно рассматривать как граничные условия на бесконечности. Они означают, что мы исключаем наличие источников квантов на бесконечной глубине.

Уравнения (6), (8) и (10) вместе с граничными условиями (12) и (13) должны служить для нахождения функций $\bar{\rho}_{ik}$, H_{ik} и C_{ik}.

Сопоставляя (6) и (8), а также учитывая (13), получаем два первых интеграла

$$\begin{aligned} &H_{13}+qkH_{12}=0,\\ &H_{13}+\frac{\varkappa}{s}\,H_{23}=0, \end{aligned} \tag{14}$$

которые выражают собой закон сохранения чисел квантов в сериях, сформулированный в общем виде Л. Хеньи [5] и В. А. Амбарцумяном [6].

Заметим, что в том случае, когда среда обладает конечными оптическими толщинами во всех частотах, в правых частях соотношений (14) должны стоять постоянные A_1 и A_2, не равные нулю.

При помощи соотношений (14) можно исключить потоки H_{ik} из уравнений (6). Имеем:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{4}\frac{d^2\bar{\rho}_{13}}{d\tau^2} = \bar{\rho}_{13} - C_{13}, \\ &\frac{d\bar{\rho}_{12}}{d\tau} = -\frac{1}{q^2k}\frac{d\bar{\rho}_{13}}{d\tau}\left(1 - \frac{C_{13}}{C_{23}}\right), \\ &\frac{d\bar{\rho}_{23}}{d\tau} = -\frac{s^2}{\varkappa}\frac{d\bar{\rho}_{13}}{d\tau}\frac{C_{13}}{C_{23}}. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Разрешая, далее, систему уравнений (8) и (10) относительно C_{ik}, находим

$$\begin{aligned} &C_{13} = \frac{k\bar{\rho}_{13}(1+\bar{\rho}_{12}) + \varkappa\bar{\rho}_{23}(\bar{\rho}_{13} + k\bar{\rho}_{12})}{\varkappa(1+k)\bar{\rho}_{23} + k(1+\varkappa)(1+\bar{\rho}_{12})}, \\ &\frac{C_{13}}{C_{23}} = \frac{(\varkappa - k)\bar{\rho}_{13} + k(1+\varkappa)\bar{\rho}_{12}}{\varkappa(1+k)\bar{\rho}_{23} + k(1+\varkappa)(1+\bar{\rho}_{12})}. \end{aligned} \tag{16}$$

Подстановка (16) в (15) приводит к следующей системе уравнений, в которые входят только $\bar{\rho}_{ik}$:

$$\frac{1}{4}\frac{d^2\bar{\rho}_{13}}{d\tau^2} = \varkappa k\frac{\bar{\rho}_{13}(1+\bar{\rho}_{12}+\bar{\rho}_{23}) - \bar{\rho}_{12}\bar{\rho}_{23}}{\varkappa(1+k)\bar{\rho}_{23} + k(1+\varkappa)(1+\bar{\rho}_{12})}, \tag{17}$$

$$\frac{d\bar{\rho}_{12}}{d\tau} = -\frac{1}{q^2k}\frac{d\bar{\rho}_{13}}{d\tau}\left[1 - \frac{(\varkappa - k)\bar{\rho}_{13} + k(1+\varkappa)\bar{\rho}_{12}}{\varkappa(1+k)\bar{\rho}_{23} + k(1+\varkappa)(1+\bar{\rho}_{12})}\right], \tag{18}$$

$$\frac{d\bar{\rho}_{23}}{d\tau} = -\frac{s^2}{\varkappa}\frac{d\bar{\rho}_{13}}{d\tau}\,\frac{(\varkappa - k)\bar{\rho}_{13} + k(1+\varkappa)\bar{\rho}_{12}}{\varkappa(1+k)\bar{\rho}_{23} + k(1+\varkappa)(1+\bar{\rho}_{12})}. \tag{19}$$

Аналогичная система уравнений для $\bar{\rho}_{ik}$ получается и при рассмотрении среды с конечными оптическими толщинами во всех частотах. В этом случае величина $d\bar{\rho}_{13}/d\tau$ в (18) и (19) заменяется соответственно на $d\bar{\rho}_{13}/d\tau + 4A_1$ и $d\bar{\rho}_{13}/d\tau + 4A_2$.

Обратимся к решению полученных уравнений. Как легко видеть, из (18) и (19) следует

$$\bar{\rho}_{13} + q^2k\bar{\rho}_{12} + \frac{\varkappa}{s^2}\bar{\rho}_{23} = A_3. \tag{20}$$

Перепишем теперь (19) в виде

$$
\begin{aligned}
&[\varkappa(1+k)\bar{\rho}_{23} + k(1+\varkappa)(1+\bar{\rho}_{12})]\frac{d\bar{\rho}_{23}}{d\tau} + \\
&+ \frac{s^2}{\varkappa}[(\varkappa - k)\bar{\rho}_{13} + k(1+\varkappa)\bar{\rho}_{12}]\frac{d\bar{\rho}_{13}}{d\tau} = 0.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Подставляя сюда $\bar{\rho}_{12}$ из (20), находим следующий первый интеграл

$$
\bar{\rho}_{23}^2 + 2(\alpha_1 - \alpha_2\bar{\rho}_{13})\bar{\rho}_{23} + \alpha_3\bar{\rho}_{13}^2 + \alpha_4\bar{\rho}_{13} = A_4, \tag{22}
$$

где постоянные

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{s^2(1+\varkappa)}{\varkappa}\,\frac{A_3 + q^2k}{(1+k)s^2q^2 - 1 - \varkappa}, \\
\alpha_2 &= \frac{s^2(1+\varkappa)}{\varkappa}\,\frac{1}{+k)s^2q^2 - 1 - \varkappa}, \\
\alpha_3 &= \frac{s^4}{\varkappa^2}\,\frac{(\varkappa - k)q^2 - 1 - \varkappa}{(1+k)s^2q^2 - 1 - \varkappa}, \\
\alpha_4 &= \frac{2s^4A_3(1+\varkappa)}{\varkappa^2}\,\frac{1}{(1+k)s^2q^2 - 1 - \varkappa}.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Далее, сравнение (17) и (19) показывает, что

$$
\bar{\rho}_{23}\frac{d\bar{\rho}_{23}}{d\tau} = -\frac{s^2}{\varkappa}\frac{d\bar{\rho}_{13}}{d\tau}\left(\bar{\rho}_{13} - \frac{1+\varkappa}{4\varkappa}\frac{d^2\bar{\rho}_{13}}{d\tau^2}\right), \tag{24}
$$

откуда

$$
\left(\frac{d\bar{\rho}_{13}}{d\tau}\right)^2 = \frac{4\varkappa^2}{s^2(1+\varkappa)}\left(\frac{s^2}{\varkappa}\bar{\rho}_{13}^3 + \bar{\rho}_{23}^3\right) + A_5. \tag{25}
$$

Таким образом, остается найти один интеграл. Это нетрудно сделать, поскольку из (22) следует

$$
\bar{\rho}_{23} = \alpha_2\bar{\rho}_{13} - \alpha_1 + \sqrt{(\alpha_2^2 - \alpha_3)\bar{\rho}_{13}^2 - (\alpha_4 + 2\alpha_1\alpha_2)\bar{\rho}_{13} + \alpha_1^2 + A_4}\,. \tag{26}
$$

Подставляя выражение (26) для $\bar{\rho}_{23}$ в (25), перепишем это уравнение в виде

$$
\left(\frac{d\bar{\rho}_{13}}{d\tau}\right)^2 = g(\bar{\rho}_{13}) + A_5, \tag{27}
$$

где функция $g(x)$ определяется соотношением

$$g(x) = a_0 x^2 - a_1 x + a_2 + 2(a_3 x - a_4)\sqrt{a_5 x^2 - a_6 x + a_7}, \tag{28}$$

причем постоянные

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{4\varkappa^2}{s^2(1+\varkappa)}\left(2\alpha_2^2 - \alpha_3 + \frac{s^2}{\varkappa}\right), & a_4 &= \frac{4\varkappa^2\alpha_1}{s^2(1+\varkappa)}, \\ a_1 &= \frac{4\varkappa^2}{s^2(1+\varkappa)}(\alpha_4 + 4\alpha_1\alpha_2), & a_5 &= \alpha_2^2 - \alpha_3, \\ a_2 &= \frac{4\varkappa^2}{s^2(1+\varkappa)}(2\alpha_1^2 + A_4), & a_6 &= \alpha_4 + 2\alpha_1\alpha_2, \\ a_3 &= \frac{4\varkappa^2\alpha_2}{s^2(1+\varkappa)}, & a_7 &= \alpha_1^2 + A_4. \end{aligned} \tag{29}$$

Из (27) находим последний интеграл

$$\tau = \int \frac{d\bar{\rho}_{13}}{\sqrt{g(\bar{\rho}_{13}) + A_5}} + A_6. \tag{30}$$

Вместо постоянной A_6 более удобно пользоваться величиной $u_0 = \bar{\rho}_{13}(0)$, поэтому перепишем решение в следующем окончательном виде

$$\tau = \left| \int_{u_0}^{\bar{\rho}_{13}} \frac{dx}{\sqrt{g(x) + A_5}} \right|. \tag{31}$$

Найдя из (31) функцию $\bar{\rho}_{13}(\tau)$, мы можем по формулам (22) и (20) вычислить значения $\bar{\rho}_{23}$ и $\bar{\rho}_{12}$, а затем по формулам (16) и (10) функции $C_{ik}(\tau)$.

Перейдем к нахождению постоянных A_3, A_4, A_5 и u_0. Пользуясь (6), перепишем необходимые нам граничные условия [три условия (12) и одно из (13)] в следующей форме:

$$\left[\bar{\rho}_{13} - \frac{1}{2}\frac{d\bar{\rho}_{13}}{d\tau}\right]_{\tau=0} = 4F_{13}, \tag{32}$$

$$\left[\bar{\rho}_{12} + \frac{1}{2qk}\frac{d\bar{\rho}_{13}}{d\tau}\right]_{\tau=0} = 4F_{12}, \tag{33}$$

$$\left[\bar{\rho}_{23} + \frac{s}{2\varkappa}\frac{d\bar{\rho}_{13}}{d\tau}\right]_{\tau=0} = 4F_{23}, \tag{34}$$

$$\left.\frac{d\bar{\rho}_{13}}{d\tau}\right|_{\tau=\infty} = 0. \tag{35}$$

При помощи граничных условий в $\tau = 0$ постоянные A_3, A_4 и A_5 можно выразить через F_{ik} и u_0. Подставим $\bar{\rho}_{ik}(0)$ из (32)—(34) в соотношение (20). Тогда получим

$$A_3 = 4F_{13} + q^2 k 4F_{12} + \frac{\varkappa}{s^2} 4F_{23} + \left(1 - q - \frac{1}{s}\right)(u_0 - 4F_{13}). \tag{36}$$

Полагая в соотношении (22) $\tau = 0$ и подставляя в него выражение для $\bar{\rho}_{23}(0)$, полученное при помощи (32) и (34), находим

$$\begin{gathered} A_4 = \left[4F_{23} - \frac{s}{\varkappa}(u_0 - 4F_{13})\right]^2 + \\ + 2(\alpha_1 - \alpha_2 u_0)\left[4F_{23} - \frac{s}{\varkappa}(u_0 - 4F_{13})\right] + \alpha_3 u_0^2 + \alpha_4 u_0. \end{gathered} \tag{37}$$

Здесь в α_1 и α_4 входит A_3, но эту постоянную мы уже выразили через u_0.

Наконец, из (27) и (32) следует

$$A_5 = 4(u_0 - 4F_{13})^2 - g(u_0). \tag{38}$$

Итак, остается найти u_0. Перейдем в (27) к пределу при $\tau \to \infty$ и воспользуемся условием (35). Учитывая (38), получаем

$$g(u_1) - g(u_0) + 4(u_0 - 4F_{13})^2 = 0, \tag{39}$$

где $u_1 = \bar{\rho}_{13}(\infty)$. С другой стороны, из (31) следует

$$\lim_{u \to u_1} \int_{u_0}^{u} \frac{dx}{\sqrt{g(x) + A_5}} = \infty. \tag{40}$$

Последние два уравнения и должны служить для нахождения постоянных u_0 и u_1. Вместо (40) можно воспользоваться условием

$$\lim_{u \to u_1} \frac{dg(u)}{du} = 0, \tag{41}$$

которое вытекает из расходимости интеграла в (40).

Заметим, что в часто встречающемся случае, когда вынужденным излучением можно пренебречь (то есть когда $g_i/g_k(n_k/n_i) \ll 1$), полученное решение допускает некоторые упрощения. Мы не будем, однако, на этом останавливаться, поскольку указанные упрощения не очень значительны.

2. В настоящем разделе мы рассмотрим некоторые физические следствия, которые вытекают из полученного выше решения.

Прежде всего, очевидно, что отраженная от среды энергия во всех частотах за единицу времени должна быть равна падающей, то есть

$$\sum_{i<k} [I'_{ik}(0) - I''_{ik}(0)] \Delta\nu_{ik} = 0. \tag{42}$$

Действительно, нетрудно проверить, что соотношение (42) является следствием двух первых интегралов (14).

Далее, из формул (27) и (41) мы видим, что

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{d^2 \bar{\rho}_{13}}{d\tau^2} = 0. \tag{43}$$

В силу (15) и (8) это условие эквивалентно тому, что

$$\lim_{\tau \to \infty} (C_{ik} - \bar{\rho}_{ik}) = 0. \tag{44}$$

Таким образом, в достаточно глубоких слоях среды устанавливается детальное равновесие.

Сравнивая (44) и (10), мы заключаем также, что при $\tau \to \infty$ выполняется соотношение

$$\frac{\bar{\rho}_{13}}{1 + \bar{\rho}_{13}} = \frac{\bar{\rho}_{12}}{1 + \bar{\rho}_{12}} \cdot \frac{\bar{\rho}_{23}}{1 + \bar{\rho}_{23}}. \tag{45}$$

Физический смысл этого результата состоит в том, что в глубоких слоях среды число переходов типа 1—2—3—1 равно числу переходов типа 1—3—2—1. Естественно, что (45) является следствием того, что при $\tau \gg 1$ выполняется детальное равновесие. Однако представляет интерес то обстоятельство, что из (45) следуют условия детального равновесия. В самом деле, сравнение (45) с правой частью уравнения (17) приводит к (43) и, следовательно, к (44). Таким образом, формулы (44) и (45) эквивалентны.

Другая интерпретация формулы (45) состоит в следующем. Определим формально температуру $T_{ik}(\tau)$, соответствующую плотности излучения $\bar{\rho}_{ik}$ в частоте ν_{ik} на глубине τ, при помощи равенства

$$\bar{\rho}_{ik}(\tau) = \left[e^{\frac{h\nu_{ik}}{kT_{ik}(\tau)}} - 1 \right]^{-1}. \tag{46}$$

Тогда формула (45) показывает, что с увеличением оптической глубины температуры излучения в различных частотах все более выравниваются. Предельное значение температуры излучения $T(\infty)$, очевидно, следующим образом выражается через введенную выше величину u_1:

$$T(\infty)=\frac{h\nu_{13}}{k\ln\left(1+\frac{1}{u_1}\right)}. \tag{47}$$

Рассмотрим еще предельные значения населенностей уровней. Согласно (5),

$$\frac{n_k}{n_i}=\frac{g_k}{g_i}\frac{C_{ik}}{1+C_{ik}}. \tag{48}$$

Учитывая соотношения (44) и (46), получаем

$$\left(\frac{n_k}{n_i}\right)_{\tau=\infty}=\frac{g_k}{g_i}e^{-\frac{h\nu_{ik}}{kT(\infty)}}, \tag{49}$$

то есть и плотность излучения в различных частотах, и степень возбуждения атомов определяются в глубоких слоях среды одним параметром — $T(\infty)$. Разумеется, это не означает, что при $\tau\gg 1$ существует термодинамическое равновесие, так как распределение атомов по скоростям не зависит от величин T_{ik} (по предположению, в среде происходит чистое рассеяние излучения).

Формула (45) позволяет также вывести одно интересное свойство отражения света от полубесконечной среды. Рассмотрим такой уровень τ_0 на достаточно большой оптической глубине, чтобы соотношение (45) выполнялось с большой степенью точности. В области $\tau\geqslant\tau_0$ приближенно соблюдается также детальное равновесие, так что $H_{ik}\approx 0$. Но область $\tau\geqslant\tau_0$ — тоже некоторая полубесконечная среда, поэтому на основании обобщенного принципа инвариантности В. А. Амбарцумяна можно утверждать, что в случае, когда полубесконечная среда освещена потоками, подчиняющимися условию

$$\frac{4F_{13}}{1+4F_{13}}=\frac{4F_{12}}{1+4F_{12}}\frac{4F_{23}}{1+4F_{23}}, \tag{50}$$

выходящее из среды излучение в каждой частоте равно падающему и в каждой точке среды выполняется детальное равновесие. Этот факт отмечается также в работе А. Г. Никогосяна [4].

Определим еще по аналогии с (46) температуру T_{ik}^{*} падающего излучения в частоте ν_{ik} согласно формуле

$$4F_{ik} = \left[e^{\frac{h\nu_{ik}}{kT_{ik}^{*}}} - 1 \right]^{-1}. \tag{51}$$

Тогда приведенное выше утверждение означает, что в случае, когда температуры падающего излучения во всех трех частотах равны, в среде выполняется детальное равновесие.

Следует отметить, что приведенные в данном разделе результаты не зависят, по-видимому, от предположения о форме контура коэффициента поглощения и допускают обобщение на случай атомов с большим числом уровней энергии.

3. Полученные формулы дают зависимость искомых функций от истинной оптической глубины τ в частоте ν_{13}. Однако оптическая глубина данного элемента объема не является наперед заданной величиной и зависит от падающих на среду потоков излучения. Согласно методу самосогласованных оптических глубин, эта зависимость может быть установлена после того, как найдена связь искомых функций с τ.

Введем, следуя [2], предельную оптическую глубину y в частоте ν_{13}, когда все атомы находятся в основном состоянии:

$$y = \frac{h\nu_{13}B_{13}}{c\Delta_{13}} \int_0^z (n_1 + n_2 + n_3)\, dz. \tag{52}$$

Поскольку концентрация атомов во всех состояниях должна быть задана, y является известной функцией z.

Сравнивая (52) с (4) и учитывая (48), находим

$$y = \int_0^{\tau} \frac{1 + \frac{n_2}{n_1} + \frac{n_3}{n_1}}{1 - \frac{g_1}{g_3}\frac{n_3}{n_1}}\, d\tau = \tau + \int_0^{\tau} \left[\left(1 + \frac{g_3}{g_1}\right) C_{13} + \frac{g_2}{g_1} C_{12} \frac{1 + C_{13}}{1 + C_{12}} \right] d\tau. \tag{53}$$

Преобразуя соотношение (53) при помощи (10), получаем окончательно

$$y = \tau + \int_0^{\tau} \left[1 + \frac{g_3}{g_1} + \frac{g_2}{g_1}\left(1 + \frac{1}{C_{32}}\right) \right] C_{13}\, d\tau. \tag{54}$$

Это уравнение и должно служить для нахождения зависимости $\tau = \tau(y, F_{ik})$.

Автор признателен академику В. А. Амбарцумяну за обсуждение полученных результатов и советы.

Бюраканская астрофизическая обсерватория

THE POLYCHROMATIC LIGHT SCATTERING IN A SEMI-INFINITE MEDIUM

V. Yu. TEREBIZH

A pure scattering of radiation in a plane-parallel layer of gas, illuminated by an external radiation is considered. It is assumed that: a) the gas consists of three-level atoms; b) the optical thickness is infinitely large for all frequencies; c) the absorption coefficient in the lines has a rectangular contour. The solution of the problem is found in Schwarzschild-Schuster approximation. The physical interpretation of the results is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян*, ДАН АрмССР, 38, 225, 1964.
2. *В. А. Амбарцумян*, ДАН АрмССР, 39, 159, 1964.
3. *В. А. Амбарцумян*, сб. „Теория звездных спектров", Наука, М., 1966
4. *А. Г. Никогосян*, Астрофизика, 1, 285, 1965.
5. *L. G. Henyey*, Ap. J., 88, 133, 1938.
6. *В. А. Амбарцумян*, Уч. зап. ЛГУ, № 31, 5, 1939.