

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ЗВЕЗДНЫХ СИСТЕМ ПРИ
ПОМОЩИ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Т. А. АГЕКЯН, А. С. БАРАНОВ

Поступила 22 июля 1968

Предлагается метод построения моделей звездных систем при помощи численного эксперимента.

Метод использован для изучения распределений звездной плотности, потенциала и дисперсий скоростей в радиальном и трансверсальном направлениях в сферически симметричной квазистационарной системе пяти тел равных масс.

1. *Постановка задачи.* Несмотря на значительные успехи, достигнутые в последние годы, проблема построения теоретических моделей звездных систем еще не решена. Даже для простейших систем — сферических построенные теоретические модели [1—23] потребовали введения некоторых предположений о законе распределения скоростей или зависимости фазовой плотности от интегралов движения. С ними в одних случаях трудно согласиться, в других же случаях, хотя они и приемлемы в том смысле, что не могут существенно исказить получаемые распределения физических характеристик, их правильность не очевидна. Кроме того, в большинстве исследований до сих пор не учитывается зависимость состояния системы от ее стадии динамической эволюции.

Что касается теоретических моделей вращающихся звездных систем, то их построение только начато [24, 25].

В настоящей работе предлагается способ построения теоретических моделей звездных систем, основанный на методе численного эксперимента.

Хотя численные методы уже широко применялись для решения задачи n тел, максимально возможное значение n в выполненных ра-

ботах все еще не превосходит нескольких сот, и этого при обычном подходе недостаточно для построения модели даже простейшей сферической системы со звездами равных масс.

В основе предлагаемого метода лежит некоторое обобщение понятий распределения звездной плотности, распределения скоростей центроидов, распределения дисперсий остаточных скоростей звезд, распределения потенциала.

Рассмотрим некоторый малый объем V звездной системы. Звездной плотностью в этом объеме называется величина

$$D = \frac{n}{V}, \quad (1)$$

где n — число звезд в объеме V .

Компонентом скорости центроида по некоторому направлению называется величина

$$q_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_i, \quad (2)$$

где q_i — соответствующие компоненты скоростей звезд, и соответствующей дисперсией остаточных скоростей —

$$\sigma_q^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (q_i - q_0)^2. \quad (3)$$

В реальной звездной системе эти величины все время меняются. Если система стационарна, они являются случайными стационарными функциями. Поэтому при нахождении распределений физических характеристик в модели звездной системы плотностью, компонентами скорости центроида и дисперсиями остаточных скоростей данного объема следует называть соответствующие средние значения случайных функций (1), (2) и (3).

Легко видеть, что эти средние значения можно получать следующим образом. Будем следить за выделенным объемом и отмечать время t_k пребывания в нем звезд. Тогда звездной плотностью объема назовем величину

$$D = \frac{1}{TV} \sum_{k=1}^m t_k. \quad (4)$$

Одна и та же звезда может много раз побывать в объеме V , величина t_k есть время одного пребывания звезды в объеме, так что m равно числу пересечений звездами объема V за время T .

Аналогично, компонентом скорости центроида по направлению q назовем величину

$$q_0 = \frac{1}{TVD} \sum_{k=1}^m q_k t_k, \quad (5)$$

а дисперсией остаточных скоростей звезд по этому направлению

$$\sigma_q^2 = \frac{1}{TVD} \sum_{k=1}^m (q_k - q_0)^2 t_k = \frac{1}{TVD} \sum_{k=1}^m q_k^2 t_k - q_0^2, \quad (6)$$

где q_k — компонент скорости звезды при пересечении объема.

Время T необходимо брать таким, чтобы m было достаточно велико. Вместе с тем T должно быть мало в сравнении со временем перехода системы из данной эволюционной стадии в следующую. Если, например, звездная система находится в состоянии, стационарном в регулярном поле, но нестационарном в иррегулярном поле, то T должно быть мало в сравнении со временем релаксации.

Очевидно, что в системе с очень большим числом звезд (так что малый объем V содержит внутри себя достаточно много звезд) величины (4), (5) и (6) совпадают с обычно понимаемыми звездной плотностью, компонентом скорости центроида и дисперсией скоростей звезд. Но если число звезд в системе мало, то понятия распределений звездной плотности, скоростей центроидов и дисперсий остаточных скоростей в старом понимании не существовали. В обобщенных же формулировках (4), (5) и (6) они столь же определены для систем с малым n (вплоть до $n = 3$), как и для систем с очень большим n .

Распределение величин (4), (5) и (6) в звездной системе с небольшим числом членов удобно получать, решая численно систему уравнений движения

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= G \sum_{j \neq i} m_j \frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3}, \\ \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= G \sum_{j \neq i} m_j \frac{y_j - y_i}{r_{ij}^3}, \\ \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= G \sum_{j \neq i} m_j \frac{z_j - z_i}{r_{ij}^3}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, n),$$

где r_{ij} — взаимные расстояния, G — постоянная тяготения, m_i — массы звезд.

При интегрировании (7) в объемчиках, на которые разбито пространство системы, должны непрерывно фиксироваться и суммироваться величины t_k , $q_k t_k$ и $q_k^2 t_k$.

Можно также, не выполняя суммирования, находить распределение $q_k - q_0$ для каждого малого объема. При этом величины t_k будут иметь смысл весов.

Далее, в ходе решения уравнений движения в каждой точке системы может фиксироваться значение потенциала гравитационного поля

$$\Phi = G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\rho_i}, \quad (8)$$

где ρ_i — расстояние i -го компонента системы от рассматриваемой точки. Непрерывно суммируя значения потенциала для многих точек и определяя их средние значения Φ_r в каждой точке за время T , можно построить поле гравитационного потенциала системы. Очевидно, что это будет *регулярное поле* системы.

Для получения характеристик иррегулярного поля необходимо, чтобы фиксировался в каждый момент t потенциал в данной точке Φ_t и определялись средние по времени произведения $(\Phi_t - \Phi_r) \times (\Phi_{t+\tau} - \Phi_r)$, где τ — некоторый промежуток времени.

Это определит корреляционную функцию $H(\tau)$ по времени иррегулярного потенциала в разных точках системы. Аналогично можно вычислить корреляционную функцию $H(\varphi)$ по расстоянию иррегулярного потенциала, находя среднее значение величины

$$(\Phi - \Phi_r) (\Phi_\varphi - \Phi_r),$$

где Φ и Φ_φ — мгновенные потенциалы в точках с одинаковым регулярным потенциалом на расстоянии φ друг от друга.

Представляют интерес и средние по времени значения скорости изменения потенциала

$$\frac{d\Phi}{dt} = G \sum_{i=1}^n m_i \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i^2} \quad (9)$$

в разных точках системы и соответствующие корреляционные функции.

Можно также проследить изменение момента инерции системы

$$I = \frac{1}{M} \sum_{i+j} m_i m_j r_{ij}^2, \quad (9')$$

где M — масса всей системы.

Можно, наконец, получить статистические расстояния звезд каждой массы соответственно от центра инерции системы и ее геометрического центра.

Интересно разрешить следующие вопросы:

1) В какой мере распределение плотности и других характеристик зависит от числа тел n ?

2) Совпадает ли распределение потенциала, найденное по распределению плотности, с непосредственно определяемым регулярным потенциалом системы?

3) Удовлетворяются ли (с некоторой степенью приближенности) для найденных функций распределения гидродинамические уравнения: для стационарной сферической системы

$$-\frac{\partial}{\partial r}(D\bar{\pi}^2) - D\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{D}{r}(2\bar{\pi}^2 - \bar{\theta}^2) = 0,$$

где r — расстояние от центра, π — радиальный, а θ — трансверсальный компоненты скорости звезды, и для стационарной вращающейся системы

$$-\frac{\partial(D\bar{x}^2)}{\partial R} - D\frac{\partial\Phi}{\partial R} + \frac{D}{R}(\bar{x}^2 - \bar{y}^2) = 0$$

$$\frac{\partial(\Gamma\bar{\gamma}^2)}{\partial z} - D\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0,$$

где R — расстояние от оси симметрии, z — расстояние от плоскости симметрии, x — компонент скорости в направлении от оси симметрии, y — компонент скорости в направлении вращения, γ — компонент скорости в направлении от плоскости симметрии.

Если n мало (составляет несколько единиц), то, как известно, иррегулярные силы действуют не медленнее регулярных, система сразу же переходит в квазистационарное в целом состояние, не побывав в состоянии, стационарном в регулярном поле, но нестационарном в иррегулярном поле.

Поэтому, выполняя вычисления при малом n , можно получить только распределения, соответствующие квазистационарному в целом состоянию. Совпадают ли получаемые при этом распределения с распределениями, устанавливающимися при достижении квазистационарного состояния в системах с большим значением n ? Уравнения, описывающие распределения характеристик в теоретических моделях квазистационарных систем от числа тел не зависят, если фиксированы генеральные характеристики системы. Однако возможно, что это свойство есть результат молчаливого предположения, что n велико,

и, следовательно, допустимо использование распределения потенциала системы, соответствующего получаемому распределению плотности. Возможно, что распределение характеристик в квазистационарной системе не зависит от l только в том случае, когда l велико.

Очевидно, что в предлагаемом методе ответ на поставленный вопрос можно получить, рассматривая и сравнивая между собой системы с различным значением l .

2. *Численный эксперимент.* Для оценки возможностей предлагаемого метода была выполнена работа по сокращенной программе, предусматривающей получение результатов по части поставленных задач. Рассматривалась сферическая система пяти тел одинаковых масс. Массы тел приняты равными единице. Начальные координаты и их первые производные должны удовлетворять девяти условиям, обеспечивающим совпадение с началом координат центра инерции системы, неподвижность центра инерции и равенство нулю полного момента количества движения системы. Оставшиеся свободными начальные координаты и компоненты скоростей определялись как случайные числа в промежутке $(0, 1)$. После этого все компоненты скоростей умножались на коэффициент, такой, чтобы выполнялась в целом теорема вириала, и кроме того для каждого компонента проверялось условие — полная энергия компонента должна быть отрицательной.

Когда начальные условия получены, определяются энергия системы

$$E = -\frac{G}{2} \sum_{i+j} \sum_{rij} \frac{1}{r_{ij}}, \quad (12)$$

эффективный радиус системы

$$r_0 = \frac{5G}{-E}, \quad (13)$$

средняя квадратичная скорость компонентов системы

$$w = \sqrt{\frac{-E}{5}} \quad (14)$$

и физическая единица времени в системе, равная среднему времени пересечения компонентом системы по диаметру

$$\tau_0 = \frac{2r_0}{w} = 10\sqrt{5} G(-E)^{-1/2}. \quad (15)$$

Уравнения движения решались численно. Контролем служило постоянство интегралов задачи. В тех случаях, когда одно из взаимных расстояний между компонентами становилось меньше 10^{-3} , вычисления производились по регуляризованной системе уравнений движения (см., например, [26]).

Вычисление D , согласно выражению (4), и дисперсий скоростей в радиальном и трансверсальном направлениях начиналось по истечении промежутка времени $3\tau_0$ от начала движения, чтобы можно было считать, что произошло перераспределение координат и их производных под действием иррегулярных сил, и система пришла в квазистационарное состояние.

Вычисление с данными начальными условиями прекращалось, если один из компонентов удалялся на расстояние от центра инерции, большее $10r_0$, или если накапливающаяся ошибка в E делала вычисления очень замедленными. Тогда задавались новые начальные условия так, чтобы интегралы задачи были в точности равны их значениям в предыдущих начальных условиях, и по истечении времени $3\tau_0$ суммирование фиксированных величин продолжалось нарастающим итогом. Всего было использовано 12 комбинаций начальных условий. Энергия не отклонялась от своего постоянного значения E , определяемого через (13), больше, чем на $10^{-3}E$.

Проведем из центра системы сферические поверхности, так, чтобы радиус $r_{(i+1)}$ каждой сферы был связан с радиусом $r_{(i)}$ предыдущей сферы соотношением:

$$r_{(i+1)} = r_{(i)} + 0.1 \quad (i = 1, 2, \dots, 42; r_{(1)} = 0.1; r_{(42)} = 10r_0 = 42).$$

Тогда рассмотренное пространство системы разобьется на 42 объема, для каждого из которых определялась плотность D согласно выражению (4).

Кроме того, на расстояниях $r_0, 2r_0, \dots, 10r_0$ от центра системы вычислялись дисперсии скоростей в радиальном и трансверсальном направлениях. Работа производилась до тех пор, пока влияние случайных флуктуаций звездной плотности не стало малым. После того, как получена функция D , можно определить потенциал Φ регулярного гравитационного поля сферической системы, решая численно уравнение Пуассона

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = -4\pi G D. \quad (16)$$

В табл. 1 приведены результаты численного эксперимента, суммарные по использованным комбинациям начальных условий.

Таблица 1

N	$D \cdot 10^5$	$\bar{D} \cdot 10^5$	$\Phi \cdot 10^5$	$\bar{\Phi} \cdot 10^5$
1	100000	100000	100000	100000
2	97834	96605	89424	89521
3	65698	70795	72227	72657
4	44898	44668	55766	55579
5	29391	27542	42062	41650
6	15296	16218	31279	31316
7	9668.4	9772.4	23920	24059
8	6249.7	6456.5	19021	19083
9	4356.1	4518.6	15646	15560
10	3077.6	3162.3	12975	12951
11	2325.4	2317.4	11010	10922
12	1698.1	1678.8	9456.0	9357.2
13	1342.7	1333.5	8215.7	8125.1
14	1085.2	1071.5	7203.4	7127.5
15	951.86	870.96	6350.8	6389.7
16	684.22	707.95	5601.6	5573.8
17	574.53	562.34	4961.0	4957.7
18	455.48	467.74	4423.1	4430.4
19	371.72	398.11	3964.4	3980.2
20	338.68	338.84	3673.9	3587.2
21	315.77	302.00	3229.4	3237.6
22	287.47	269.15	2910.8	2922.0
23	242.69	239.88	2610.0	2632.5
24	229.24	208.93	2331.0	2365.0
25	173.20	181.97	2071.3	2118.6
26	147.95	158.49	1836.2	1893.3
27	125.96	138.04	1630.4	1688.1
28	114.14	120.23	1449.1	1501.6
29	105.24	107.15	1266.9	1332.6
30	97.673	97.724	1138.3	1178.7
31	91.811	87.096	999.72	1037.2
32	80.583	77.625	868.57	906.35
33	70.223	69.183	745.02	795.52
34	61.970	60.954	630.52	674.98
35	51.462	53.703	525.32	571.61
36	48.221	48.863	429.97	477.77
37	41.990	43.652	343.36	391.88
38	30.608	38.905	264.12	312.86
39	27.821	35.481	193.93	239.96
40	23.238	31.623	132.72	172.57
41	13.135	24.547	76.911	110.23
42	3.2895	21.878	33.838	52.735

Графы дают D — полученную звездную плотность в относительных единицах, \bar{D} — сглаженную звездную плотность, потенциал Φ — решение уравнения Пуассона (16) для полученной звездной плотности, $\bar{\Phi}$ — решение уравнения Пуассона для сглаженной звездной плотности. Значения потенциалов приведены для r , делящих сферические слои на два равновеликих объема.

Умножая значения функции D на коэффициент $\mu = 1.2864$, мы найдем истинную звездную плотность, интегрируя которую по объему системы, получим число звезд всей системы $n = 5$.

Ход изменения логарифма звездной плотности и дисперсий компонентов скоростей показан также на рис. 1 и 2.

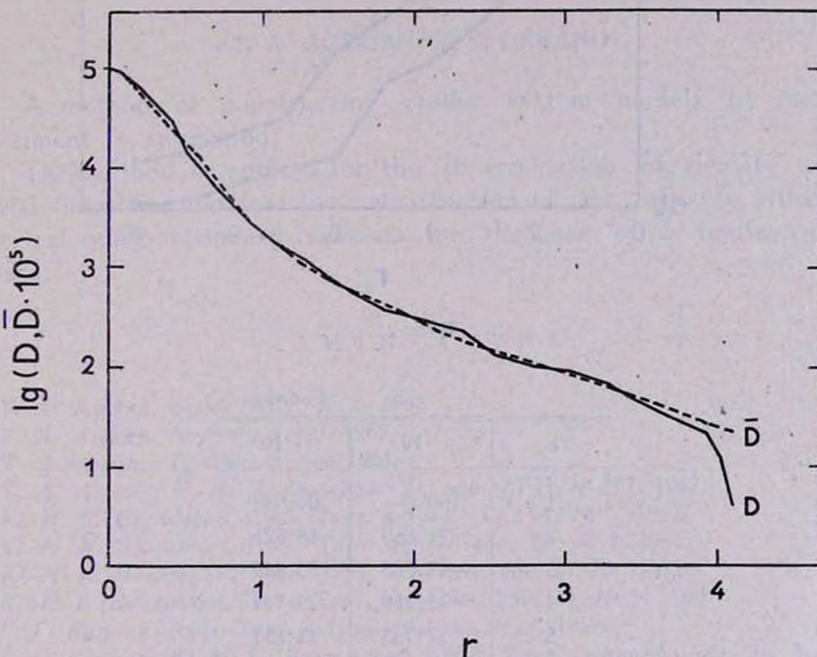


Рис. 1.

Как видно из рис. 1, кривая полученной звездной плотности почти не нуждалась в сглаживании.

Табл. 1 показывает, что вблизи центра звездная плотность почти не меняется, а затем резко падает к периферии. Вблизи границы заметно отклонение хода плотности от сглаженного общего закона. Это должно объясняться принятием конечной границы у системы, хотя в действительности в рассматриваемой автономной модели плотность должна спадать асимптотически.

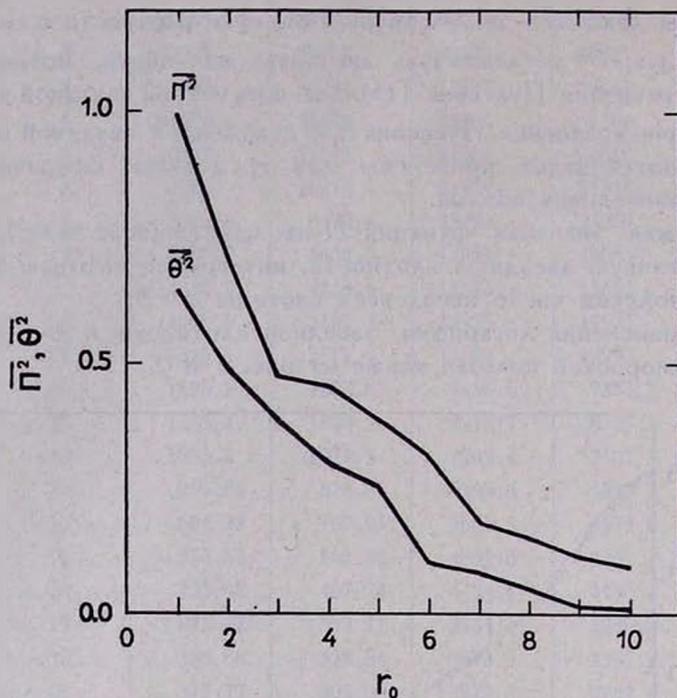


Рис. 2.

Таблица 2

r_0	$\overline{\pi^2} \cdot 10^2$	$\overline{\theta^2} \cdot 10^2$
1	100.0	64.939
2	71.860	48.825
3	47.085	38.447
4	45.259	29.764
5	37.753	24.851
6	31.406	9.9911
7	18.438	8.4833
8	15.217	5.3489
9	11.386	1.4442
10	9.3538	1.1839

Табл. 2 показывает сильную вытянутость эллипсоида скоростей в радиальном направлении.

Нами построена модель системы простейшего типа — квазистационарной в целом, сферической и со звездами одинаковой массы. В настоящее время в Астрономической обсерватории Ленинградского университета ведется работа по построению аналогичных моделей сферических квазистационарных систем со звездами разных масс, а также моделей вращающихся квазистационарных систем.

Ленинградский Государственный
университет

THE CONSTRUCTION OF STELLAR SYSTEM MODELS BY NUMERICAL EXPERIMENT

T. A. AGEKIAN, A. S. BARANOV

A method of constructing stellar system models by numerical experiment is suggested.

The method is applied for the determination of density and potential functions and for the construction of the velocity ellipsoid in spherical quasi-stationary systems for the case of 5 bodies of equal masses.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Т. А. Агекян, Вестн. ЛГУ, № 1, 1962.
2. Т. А. Агекян, Астрон. ж., 40, 1963.
3. Т. А. Агекян, Астрон. ж., 41, 1964.
4. Т. А. Агекян, И. В. Петровская, Уч. зап. ЛГУ, № 307, 1962.
5. Ю.-И. К. Велтманн, Публ. Тарт. астрон. обс., 34, № 1, 1964.
6. Ю.-И. К. Велтманн, Публ. Тарт. астрон. обс., 34, № 2, 1964.
7. Ю.-И. К. Велтманн, Публ. Тарт. астрофиз. обс. 35, № 1, 1965.
8. Ю.-И. К. Велтманн, Публ. Тарт. астрофиз. обс. 35, № 5, 1966.
9. Г. Г. Кузмин, Публ. Тарт. астрон. обс., 33, № 2, 1957.
10. Г. Г. Кузмин, Ю.-И. К. Велтманн, Публ. Тарт. астрофиз. обс. 36, № 1, 1967.
11. К. Ф. Огородников, ДАН СССР, 116, № 2, 1957.
12. И. В. Петровская, Астрон. ж., 42, № 3, 1965.
13. И. В. Петровская, Астрофизика, 1, 4, 1965.
14. P. Bouvier, Arch. Sci. (Genève) 16, No. 2, 1963.
15. P. Bouvier, Publ. Observ. Genève, A, 71, 1965.
16. M. Hénon, Ann. astrophys., 22, No. 2, 1959.
17. M. Hénon, Ann. astrophys., 23, No. 3, 1960.
18. M. Hénon, Ann. astrophys., 24, No. 5, 1961.

19. *M. Hénon*, *Ann. astrophys.*, 27, 2, 1964.
20. *M. Hénon*, *Ann. astrophys.*, 28, 1, 1965.
21. *R. W. Michta*, *M. N.*, 3, 126, 1963.
22. *R. W. Michta*, *M. N.*, 126, 331, 1963.
23. *R. Wolley van der R.*, *Observatory*, № 924, 81, 1961.
24. *Т. А. Агекян*, *Астрон. ж.*, 2, 43, 1966.
25. *К. Ф. Огородников*, *Астрон. ж.*, 5, 34, 1957.
26. *Г. Н. Дубошин*, *Небесная механика. Аналитические и качественные методы*, Наука, М., 1964.