АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 5 МАЙ, 1969 ВЫПУСК 2

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НИЗКОЧАСТОТНОГО РАДИАЛЬНОГО И ВЫСОКОЧАСТОТНОГО КОЛЕБАНИЙ ЗВЕЗД

Ю. В. ВАНДАКУРОВ, Я. Б. ЗЕЛЬДОВИЧ

Поступила 22 июля 1968

Рассматривается нелинейное взаимодействие двух адиабатических колебаний, одно из которых является радиальным и имеет близкую к нулю частоту, а частота второго много больше первого. Для краткости они будут называться *Hr* и *br* колебаниями. Показано, что наличие *br* движений является стабилизирующим фактором для *Hr* пульсации, что следует из теоремы вириала и теории адиабатических инвариантов. Вывод критерия устойчивости производится для случая радиального *br* колебания. Обсуждается вопрос о среднем по времени уравнении равновесия в присутствии *br* пульсации. При несоблюдении баланса сил в величинах порядка квадрата относительной амплитуды *br* колебания происходит возбуждение *Hr* пульсации большой амплитуды.

1. *Качественное рассмотрение.* Для многих задач теории колебаний существенное значение имеют нелинейные эффекты взаимодействия различных мод. Рассмотрим звезду, у которой наинизшая (основная) частота радиальной пульсации σ_0 близка к нулю. Это условие выполняется у сверхмассивных звезд или у звезд умеренной массы, находящихся на поздней стадии эволюции. Так как равновесие близко к безразличному (потеря устойчивости происходит при среднем показателе адиабаты $\gamma = 4/3$), то существенное значение приобретают различные малые возмущающие силы, такие, как вращение, турбулентность и т. п. (теория вопроса со ссылками на оригинальную литературу см. [1]). В настоящей работе будет изучаться стабилизация звезды при наличии некоторого колебания (*br* колебания), происходящего на частоте σ_s, где $|\sigma_s^2/\sigma_0^2| \gg 1$*. То, что эффект является стабилизирующим, можно показать различными способами.

* Если *br* пульсация является радиальной, то частота σ_s — порядка произведения числа узлов s ($s=1, 2,...$) на отношение средней скорости звука к радиусу звезды R.

Первый способ заключается в прямом применении теоремы вириала: высокочастотные пульсации сопровождаются движением вещества; кинетическая энергия этого движения, усредненная по времени, должна входить в уравнение вириала так же, как кинетическая энергия классических частиц, имеющих показатель адиабаты $\gamma = 5/3$. Этот аргумент можно рассматривать как наводящее соображение*. Более строгий подход заключается в применении теории адиабатических инвариантов.

Рассмотрим звезду, внутренняя структура которой является политропной с индексом $n = 3$, соответствующим $\gamma = 4/3 = 1 + 1/n$. Выразим энергию br колебаний E_q через полную энтропию S и плотность в центре ρ_c. При любых медленных смещениях из положения равновесия E_q меняется пропорционально частоте, которая имеет порядок $(p/\rho R^2)^{1/2} \sim F(S)\rho_c^{1/2}$. Тепловая и гравитационная энергии пропорциональны $\rho_c^{1/3}$. Качественно ситуация такая же, как в случае вращающейся звезды, кинетическая энергия которой вместо $\rho_c^{1/3}$ содержит множитель $\rho_c^{2/3}$. Вращение, как известно, является стабилизирующим фактором. Такую же роль играют и br колебания; стабилизация есть следствие того, что показатели ρ_c (2/3 и 1/2) больше показателя в гравитационной энергии (1/3). Детальное математическое исследование устойчивости Hr движений при наличии радиальной br пульсации будет дано в следующем разделе.

2. *Исследование взаимодействия радиальных Hr и br колебаний*. Проведенное качественное рассмотрение справедливо для произвольных br пульсаций. Однако математическое исследование нерадиальных колебаний в нелинейном приближении очень громоздко (см., например, работу [2], в которой рассматривается более простая задача возбуждения нерадиальных колебаний в радиально пульсирующей звезде). В дальнейшем ограничимся случаем сферически симметричных движений.

Подробный обзор исследований взаимодействия двух радиальных колебаний приведен в работе [3]. Интересно, что основные уравнения колебаний, рассматривавшиеся в этой работе, содержат лишь квадратичные по амплитудам члены, а такие уравнения недостаточны для описания стабилизирующего эффекта, который определяется слагаемыми, пропорциональными кубу амплитуд.

---

* Br колебания сверхмассивных звезд применительно к квазарам упомянуты в [4].

Уравнение произвольного адиабатического радиального движения после перехода от эйлеровых координат r, t к лагранжевым $r_0=(r)_{t=0}$, t будет*

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}+\frac{r^2}{r_0^2\rho_0}\frac{\partial p}{\partial r_0}+\frac{4\pi G}{r^2}\int_0^{r_0}\rho r^2 dr=0, \tag{1}$$

где $r=r(r_0, t)$, $\rho_0=(\rho)_{t=0}$, $\rho=\rho_0 r_0^2/r^2(\partial r/\partial r_0)$. Функция $p(r_0, t)$ с учетом постоянства энтропии s и молекулярного веса μ вдоль траектории элементарного объема определяется уравнением

$$\frac{\partial \ln p}{\partial t}=\gamma\frac{\partial \ln \rho}{\partial t}, \qquad \gamma=\left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho}\right)_{s,\,\mu=\mathrm{const}}. \tag{2}$$

Для полностью ионизованной нерелятивистской плазмы с излучением

$$\gamma=\frac{4}{3}+\frac{\beta(4-3\beta)}{3(8-7\beta)},$$

где β — отношение газового давления к полному. Вывод уравнений (1), (2) имеется в обзорной работе [3].

Будем искать решение системы (1), (2) в виде ряда по собственным функциям уравнения колебаний линейного приближения

$$r(r_0, t)=r_0+r_0\sum_{i=0}^{\infty} q_i(t)\,\xi_i(r_0), \tag{3}$$

$$[\gamma p_0(r_0\xi_i'+3\xi_i)]'-(4p_0'-\sigma_i^2 r_0\rho_0)\,\xi_i=0, \tag{4}$$

где q_i — некоторые функции от t, а штрих обозначает производную по r_0. По условию задачи ряд (3) в линейном приближении содержит только члены с q_0 и q_s, причем $s\neq 0$, $|\sigma_0^2|\ll\sigma_s^2$ (σ_0 — либо действительная, либо мнимая величина). Положим, что функции $\xi_i(r_0)$ порядка единицы, или точнее

$$N_i\sim\int_0^R \rho\, r^4 dr, \qquad N_i=\int_0^R \xi_i^2\rho\, r^4 dr.$$

Все q_i, кроме q_0, будем считать малыми. Очевидно, что q_i при $i\neq 0, s$ будут порядка q_s^2 или более высокого.

* Индекс 0 у ρ_0, r_0 и др. в подынтегральных выражениях везде опущен.

Основная собственная функция $\xi_0(r_0)$ приблизительно равна единице. С учетом поправки, полученной при помощи разложения уравнения (4) по малому параметру $\gamma - 4/3$, будет

$$\xi_0(r_0) = 1 - \frac{3}{4}\int_0^{r_0} \frac{1}{pr^4}\left\{\sigma_0^2 \int_0^r \rho r^4 dr + \int_0^r [(3\gamma - 4)p]' r^3 dr\right\} dr$$

$$\sigma_0^2 \int_0^R \rho r^4 dr = 3\int_0^R (3\gamma - 4) pr^2 dr. \tag{5}$$

Эта формула находится в соответствии с результатом, вытекающим из теоремы вириала [3]. Для определенности примем, что σ_0^2 по порядку не больше $\sigma_s^2 q_s^2$. Именно в этом интервале значений σ_0 возможна стабилизация динамической неустойчивости.

Ряд (3) можно переписать в виде

$$r = r_0(1 + q_0)(1 + \delta), \qquad \delta = \frac{1}{1+q_0}\left[\xi_s q_s + (\xi_0 - 1) q_0 + \sum_{t \neq 0, s} \xi_t q_t\right]. \tag{6}$$

Параметр δ мал, так как $|q_s| \ll 1$, а $\xi_0 - 1 \sim q_s^2$. Подставим ряд (6) в систему (1), (2) и произведем разложение по δ, отбрасывая поправки порядка q_s^3. В коэффициентах при q_s, q_1, $q_2, \ldots$, q_s^2 вместо ξ_0 можно, очевидно, подставить единицу. Заметим еще, что в рассматриваемом приближении показатель адиабаты γ не зависит от t.

При сокращении не зависящих от времени слагаемых нужно учесть следующее обстоятельство. Наличие пульсации эквивалентно некоторому добавочному давлению, пропорциональному квадрату или более высокой степени амплитуды. Обычно это давление не учитывается (см., например, [3]), тогда пульсации происходят относительно некоторых смещенных точек. В общем случае уравнение равновесия можно записать в виде

$$\frac{1}{\rho_0} p_0' + \frac{4\pi G}{r_0^2}\int_0^{r_0} \rho r^2 dr = r_0 \sum_{t=0}^{\infty} K_t \xi_t, \tag{7}$$

где K_t — постоянные порядка $\sigma_s^2 q_s^2$ или более высокого.

Умножая теперь равенство (1) на $\xi_j \rho_0 r_0^3 dr_0$ и интегрируя от нуля до R, получим систему j уравнений для $q_j(t)$. При помощи интегрирования по частям уравнения $j = 0$ и $j = s$ можно привести к виду

$$\ddot{q}_0 + \frac{\sigma_0^2 \ln(1+q_0) + K_0}{(1+q_0)^2} - \frac{3N_s \sigma_s^2 q_s^2}{2N_0 (1+q_0)^4} = 0. \tag{8}$$

$$\ddot{q}_s + \frac{\sigma_s^2 q_s}{(1+q_0)^3} = 0, \qquad \dot{q} = \frac{dq}{dt}, \qquad N_i = \int\limits_0^R \xi_i^2 \rho r^4 dr. \tag{9}$$

Поправки в (8) имеют порядок σ_0^4/σ_s^2, $\sigma_s^2 q_s^3$, $K_s q_s$, а в (9) — $\sigma_s^2 q_s^2$, K_s, $K_0 q_s$, $\sigma_0^2 q_0^2$ и т. п. Видно, что K_0 и $K_s \sim \sigma_s^2 q_s^2$. Уравнения с $j \neq 0$, s аналогичны (9) и содержат члены вида $\sigma_s^2 q_s^2$, поэтому $(q_i)_{i \neq 0,\, s} \sim q_s^2$.

После умножения (8) на $N_0 \dot{q}_0$, (9) — на $N_s \dot{q}_s$ и суммирования, получим интеграл энергии

$$\frac{N_0}{2} \dot{q}_0^2 - \frac{N_0}{1+q_0} \{\sigma_0^2 [1 + \ln(1+q_0)] + K_0\} + \\ + \frac{1}{2} N_s \left[\dot{q}_s^2 + \frac{\sigma_s^2 q_s^2}{(1+q_0)^3} \right] = \text{const}. \tag{10}$$

Из уравнения (8) вытекает, что $|\dot{q}_0/q_0| \ll \sigma_s$ (если не рассматривать движений с большими начальными скоростями). Очевидно, что $q_0(t)$ может быть представлено в виде суммы Hr и br слагаемых, причем амплитуда второго слагаемого очень мала. Для нахождения частоты медленной пульсации нужно усреднить (8) по периоду $2\pi/\sigma_s$.

Решение уравнения (9) для $q_s(t)$ можно искать в виде гармонической функции с медленно меняющейся амплитудой и частотой. При условии $q_s(0) = 0$ найдем

$$q_s = Q_s (1+q_0)^{3/4} \sin\left\{ \sigma_s \int\limits_0^t (1+q_0)^{-3/2} dt \right\}, \qquad Q_s = \text{const}. \tag{11}$$

Поправки имеют порядок $\ddot{q}_0 q_s/\sigma_s^2$ или $\dot{q}_s^2 q_s/\sigma_s^2$. Если еще учесть ранее отброшенные в (9) члены, то справа в последней формуле появятся дополнительные слагаемые вида $Q_s^2 \cos 2\sigma_s t$. Они не оказывают влияния на усредненное уравнение (8). Формула (11) находится в согласии с теорией адиабатических инвариантов, по которой отношение энергии колебаний к частоте не должно зависеть от q_0.

После подстановки (11) в уравнение (8) и усреднения найдем

$$\ddot{q}_0 + \frac{\sigma_0^2 \ln(1+q_0) + K_0}{(1+q_0)^2} - \frac{3 N_s \sigma_s^2 Q_s^2}{4N_0(1+q_0)^{7/3}} = 0. \tag{12}$$

Решение (12) может быть представлено в квадратурах.

Если принять, что q_0 мало и отбросить поправки q_0^2, то из уравнения (12) получим

$$\begin{gathered} q_0 = \frac{1}{\Omega_*^2}(2\Omega^2 - K_0)(1 - \cos\Omega_* t) + \mathrm{const}\cdot\sin\Omega_* t \\ \Omega_*^2 = \sigma_0^2 + \Omega^2 + 2(2\Omega^2 - K_0), \qquad \Omega^2 = \frac{3N_s}{8N_0}\sigma_s^2 Q_s^2. \end{gathered} \tag{13}$$

Видно, что условие равенства средних по времени сил удовлетворяется, если

$$K_0 = 2\,\Omega^2. \tag{14}$$

Критерий устойчивости такой равновесной системы будет

$$\sigma_0^2 + \Omega^2 \geqslant 0. \tag{15}$$

Наличие br колебаний является стабилизирующим фактором для Hr пульсации.

На этапах резкого возбуждения или торможения br колебаний равенство (14) может не удовлетворяться. Тогда из (13) вытекает, что $q_0 \sim 1$, и решение (13) оказывается непригодным. Численное интегрирование системы (8), (9) привело к следующим результатам. Критерий устойчивости Hr пульсации при любых K_0 дается формулой (15). Зависимость периода Hr колебаний $P_* = 2\pi/\Omega_*$ от отношения $\varkappa = K_0/2\Omega^2$ определялась при таких условиях: $\sigma_0^2 = \sigma_s^2/10^4$, $q_0(0) = 0$, $\dot{q}_0(0) \approx 0$, $q_s(0) = 0$, $\dot{q}_s(0) = \sigma_s/20$. Если $\varkappa = 1$, то $P_* \approx 195/\sigma_s$, что согласуется с формулой $P_* = 2\pi/\sqrt{\sigma_0^2 + \Omega^2}$. При $\varkappa = 1.33$, 0.976 и 0.888 период составляет соответственно 0.48, 1.08, 1.54 от $(P_*)_{\varkappa=1}$. Для тех же $\varkappa$ величина $1 + q_0$ в точке максимума $|q_0|$ равна 0.40, 1.09 и 1.59. Эти данные показывают, что при отсутствии Hr колебаний в начальный момент и при несоблюдении баланса средних по времени сил в величинах порядка q_s^2 происходит возбуждение Hr пульсаций с амплитудой порядка радиуса звезды. Энергия этих колебаний сравнима с полной энергией колебаний. Для более детального изучения процесса установления среднего по времени равновесного состояния нужно учесть процессы затухания и возбуждения колебаний.

Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе
АН СССР

Институт прикладной математики
АН СССР

THE INTERACTION BETWEEN LOW FREQUENCY AND HIGH FREQUENCY STELLAR PULSATIONS

Y. V. VANDAKUROV, Y. B. ZELDOVICH

The interaction between two adiabatic pulsations is considered. One of them is radial and has a frequency near zero, while the frequency of the second is much greater than the first. They will be called briefly as *Hr* and *br* pulsations. The stabilizing influence of *br* pulsation on the *Hr* pulsation is shown. The derivation of stability criterium is made for the case of radial *br* pulsation. The question of the mean equilibrium equation in the presence of *br* pulsation is discussed. The excitation of *Hr* pulsation of large amplitude occurs when the balance of forces in the quantities of the order of the square of relative amplitude of *br* pulsation is not present.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков*, Релятивистская астрофизика, Наука, М., 1967.
2. *Ю. В. Вандакуров*, Астрон. ж., 43, 1009, 1966.
3. *P. Ledoux Th. Walraven*, Variable stars, Handbuch der Physik, 51, 538, 1958.
4. *Л. М. Озерной*, Астрон. ж , 43, 300, 1966.