АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 5 МАЙ, 1969 ВЫПУСК 2

# МОДЕЛИ СКОПЛЕНИЙ ТОЧЕЧНЫХ МАСС С БОЛЬШИМ КРАСНЫМ СМЕЩЕНИЕМ В ЦЕНТРЕ

Г. С. БИСНОВАТЫЙ-КОГАН, Я. Б. ЗЕЛЬДОВИЧ

Поступила 8 декабря 1968

В ньютоновском случае получено изотропное автомодельное решение кинетического уравнения с самосогласованным полем тяжести для произвольного степенного распределения плотности $\rho=\beta r^{-s}$, $s<3$.

В случае $\rho=\beta r^{-2}$ аналогичное самосогласованное решение получено для анизотропной функции распределения, как в ньютоновском случае, так и в ОТО.

Найденные решения в ОТО с $\rho=\beta r^{-2}$ имеют красные смещения, неограниченно возрастающие при приближении к центру по закону $1+z \sim r^{-1/\alpha}$. В изотропном случае они, по-видимому, устойчивы, когда средние скорости движения много меньше скорости света, $\bar{u}<0.2c$, $\alpha>21$.

Получено гидродинамическое решение в ОТО для идеального газа с постоянной температурой, имеющее $z\to\infty$ при $r\to 0$.

1. *Введение.* Для объяснения природы красного смещения квазаров иногда привлекается идея гравитационного смещения частоты [1]. Особенную популярность эта идея приобрела после появления гипотезы Бербиджа [2] о стандартном спектре квазара с линиями поглощения при $z=1.95$ [3]. Хотя вопрос не получил еще окончательного решения, возможность построения равновесных моделей с большим красным смещением представляется интересной, тем более, что по данному вопросу в литературе имеются предрассудки. Отметим, что авторы не принадлежат к сторонникам гравитационной природы красного смещения квазаров.

Известны два частных решения задачи о движении точечных масс в самосогласованном поле тяготения: а) для ступенчатой функции распределения масс по энергиям, по типу Ферми газа [4] и б) для максвелловского распределения (но без частиц с положительной энергией) [5].

Важной характеристикой является энергия связи решения. В ньютоновском приближении по теореме вириала очевидно, что любое стационарное решение имеет энергию связи, равную кинетической энергии, то есть существенно положительную; по крайней мере по отношению к полному распаду на отдельные частицы стационарная система всегда устойчива. Однако в общей теории относительности (ОТО) ситуация меняется, существуют стационарные решения с отрицательной энергией связи $B$, способные распадаться на отдельные частицы [5—7].

Устойчивость этих решений относительно малых возмущений до сих пор не выяснена*, однако во всяком случае такие решения не могли возникнуть эволюционно. Численные расчеты показывают, что $B = 0$ достигается при $z_c = 1.2$ в случае а) и при $z_c \sim 1$ в случае б).

Возникает подозрение, что в ОТО для непатологических моделей существует некоторая верхняя граница $z_c$, подобно верхней границе $z_s$, найденной Бонди [12]**. Рассмотренные выше случаи а), б) отличаются изотропным локальным распределением частиц по скоростям в каждой точке; другими словами, в решениях представлен полный набор орбит круговых вытянутых (типа незамкнутых розеток, заменяющих кеплеровские эллипсы) и радиальных.

Известно, что система круговых орбит позволяет получить любые $z_c$, при положительной энергии связи. Для того, чтобы скорость была постоянна на круговых орбитах, нужно задаться степенной зависимостью $g_{00}$ от радиуса, что соответствует плотности $\rho \sim r^{-2}$. Однако это решение, вероятно, неустойчиво в силу существенной анизотропии функции распределения. Возникает вопрос, является ли неизбежным появление той или иной неустойчивости в решениях с большими $z$.

В настоящей заметке показано, что в действительности существуют автомодельные решения с $\rho \sim r^{-2}$ и изотропным распределением частиц в каждой точке. В ньютоновской задаче получено аналогичное семейство точных автомодельных решений кинетического уравнения как при $\rho \sim r^{-2}$, так и с произвольной степенью $\rho \sim r^{-k}$. Решения в ОТО имеют немаксвелловскую функцию распределения по энергиям. Самосогласованные решения кинетического уравнения в ОТО рассматривались также в работе [13].

Нет оснований фетишизировать максвелловскую функцию распределения. В бесстолкновительной задаче равноценны все решения с падающей зависимостью плотности в фазовом пространстве от энергии.

---

* Отметим, что необходимо исследование устойчивости в рамках кинетического бесстолкновительного уравнения; исследования в этом направлении см. [8—11]. Более простая задача об устойчивости в гидродинамическом приближении решена [7]. Показано, что устойчивость теряется еще раньше, при меньшем $z$, чем достигается $B = 0$.

** Обозначения: $z_c$ — красное смещение для луча, выходящего из центра, $z_s$ — то же для луча с поверхности.

Максвелловское распределение выделено тем, что оно сохраняется и при наличии упругих столкновений. Однако в реальной задаче при движении звезд с большими скоростями вследствие неупругих столкновений максвелловское распределение также не является стационарным.

Вопрос о возможности образования скопления звезд с большими красными смещениями в ходе эволюции здесь не рассматривается.

2. *Нерелятивистское рассмотрение.* В сферически симметричном случае с анизотропной функцией распределения $f(\vec{r}, \vec{p})$ при заданном гравитационном потенциале произвольная функция интегралов движения: энергии $E$ и квадрата момента $L^2$ является решением кинетического уравнения. При этом

$$E = \frac{m}{2}(v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2) + m\Phi = m\left(\frac{v^2}{2} + \Phi\right)$$
$$L^2 = m^2r^2(v_\theta^2 + v_\varphi^2) = m^2r^2v_t^2. \tag{1}$$

Здесь $v_r$, $v_\theta$, $v_\varphi$ — компоненты скорости в сферической системе координат, $\Phi$ — гравитационный потенциал, $m$ — масса частиц. Если $\rho = \beta r^{-2}$, то

$$\Phi = 4\pi G\beta \ln r + \text{const}. \tag{2}$$

Здесь $G$ — гравитационная постоянная. Зависимость $f(E, L^2)$ только от $L^2$, но не от вектора $\vec{L}$, обеспечивает сферическую симметрию общей плотности $\rho = m\int f d\vec{v}$. Исследование их устойчивости не проведено, однако простые критерии (энергия связи, локальная производная фазовой плотности по скорости) не противоречат предположению о существовании устойчивых решений со сколь угодно большими $z$. Теперь найдем вид $f$, который был бы самосогласован с заданным законом $\Phi(r)$ для гравитационного потенциала. Рассмотрим функцию распределения, зависящую от $E$ и $L^2$ следующим образом:

$$f = \frac{A}{L^2}\varphi\left(\frac{E/m - 2\pi G\beta \ln L^2}{\theta}\right). \tag{3}$$

Аргумент $\varphi(x)$ функции $x = (E/m - 2\pi G\beta\ln L^2)/\theta = (v^2 - 4\pi G\beta \ln v_t^2)/2\theta$ не зависит от $r$. Поэтому $\rho = m\int f d\vec{v} = \beta/r^2$, где

$$\beta = m\int \frac{A}{v_t^2}\varphi\left(\frac{v^2}{2\theta} - \frac{2\pi G\beta}{\theta}\ln v_t^2\right)d\vec{v}. \tag{4}$$

Уравнение (4) определяет $\beta(A, \theta)$ или $A(\beta, \theta)$. Зададим $\varphi(x) = e^{-x}$, тогда

$$f(\vec{v}) = \frac{A}{r^2} v_t^{2(4\pi G\beta/2\theta - 1)} e^{-v^2/2\theta}. \tag{5}$$

При $4\pi G\beta = 2\theta$ получаем максвелловское распределение. Для $\theta \to 0$ функция распределения стремится к $f_0$

$$f_0 = \frac{\beta}{\pi r^2 m} \delta(v_r) \delta(v_t^2 - v_0^2), \quad v_0^2 = 4\pi G\beta. \tag{6}$$

Решение (6) соответствует круговым орбитам. В случае круговых орбит можно написать самосогласованное решение для произвольного распределения плотности $\rho(r)$

$$f = \frac{\rho(r)}{m\pi} \delta(v_r) \delta(v_t^2 - v_0^2), \quad v_0^2 = \frac{1}{r}\int_0^r 4\pi G\rho r^2 dr, \quad \int f\, d\vec{v} = \frac{\rho}{m} = n. \tag{7}$$

При $\theta \to \infty$ имеем решение с чисто радиальным движением

$$f = \frac{\beta}{\sqrt{4\pi G\beta}\, \pi^{3/2} r^2 m} \delta(v_t^2)\, e^{-\frac{v_r^2}{4\pi G\beta}}. \tag{8}$$

В промежуточном случае $0 < \theta < \infty$ траектории частиц незамкнуты и представляют собой розетки. Для модели с круговыми орбитами одномерная функция распределения $f_\varphi = \int f dv_r dv_\theta$ равна

$$f_\varphi = \frac{\rho}{\pi} \frac{1}{\sqrt{v_0^2 - v_\varphi^2}}. \tag{9}$$

Производная $\partial f_\varphi / \partial v_\varphi$ положительна при $v_\varphi > 0$. В плазме подобное решение неустойчиво из-за механизма Ландау [14]. В модели с круговыми орбитами также может иметь место неустойчивость Ландау. В случае общего анизотропного решения (5) производная $\partial f_\varphi / \partial v_\varphi > 0$ при $v_\varphi > 0$ в окрестности $v_\varphi = 0$ для $\theta < 2\pi G\beta$. Однако здесь нельзя утверждать о наличии неустойчивости на основании аналогии с плазмой, так как кинетическая неустойчивость в гравитирующей среде не совсем аналогична плазменной из-за отсутствия квазинейтральности в гравитации, см., например, [11]. Приведем пример самосогласованного изотропного точного решения для произвольной степенной зависимости плотности от радиуса

$$\Phi = -Dr^{-k}, \quad k < 1, \quad k \neq 0, \quad \rho = \frac{Dk(1-k)}{4\pi G} r^{-k-2}$$

$$\mu = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr = \frac{Dk}{G} r^{1-k}, \qquad f = \frac{k(1-k)\,\Gamma\left(\frac{2}{k}+2\right)(Dr^{-k}-v^2)^{\frac{2}{k}-\frac{1}{2}}}{8\pi^2 G D^{2/k}\,\Gamma(3/2)\,\Gamma(2/k+1/2)}$$

$$v^2 < Dr^{-k},$$

$$0 \qquad v^2 > Dr^{-k},$$

где $\mu$ — масса внутри данного лагранжевого радиуса. Последнее решение не обобщается на релятивистский случай в отличие от ньютоновского решения с $\Phi \sim \ln r$, $\rho \sim r^{-2}$.

3. *Общерелятивистский случай.* Найдем точное решение задачи в ОТО, заимствуя из ньютоновского решения предположение $\rho \sim r^{-2}$, так как именно в этом случае средняя кинетическая энергия частиц не зависит от радиуса. Очевидно, что при этом все компоненты тензора $T_i^k$ также $\sim r^{-2}$ и (в обозначениях Ландау и Лифшица [15]) из уравнений (9.74)—(9.77) стр. 338 видно, что нужно искать решение с $\lambda = \text{const}$, $\nu = \text{const} \ln r$, так что получится $g_{00} \sim r^{k}$, $(1+z) \sim r^{-k/2}$. Степенная зависимость $g_{00}$ от $r$ соответствует логарифмической зависимости ньютоновского потенциала.

В релятивистской задаче необходимо пользоваться импульсом, а не скоростью; импульс обозначен строчным $p$, в отличие от тензора давления, обозначенного прописным $P$ с двумя индексами ($P_{rr}$), или скаляра $P$ без индексов.

Интегралами кинетического уравнения в случае ОТО являются

$$E_1 = E\sqrt{g_{00}} = \sqrt{(p^2c^2 + m^2c^4)\,g_{00}}, \quad p^2 = p_r^2 + p_\theta^2 + p_\varphi^2 = p_r^2 + p_t^2$$
$$L^2 = p_t^2 r^2. \tag{10}$$

Компоненты тензора энергии-импульса выражаются через интегралы от функции распределения

$$T_0^0 = -\varepsilon = -\int f\,(p^2c^2 + m^2c^4)^{1/2}\, d\vec{p}$$

$$T_1^1 = P_{rr} = \int f\,p_r^2 c^2 (p^2c^2 + m^2c^4)^{-1/2}\, d\vec{p} \tag{11}$$

$$T_2^2 = T_3^3 = P_{\theta\theta} = P_{\varphi\varphi} = P_t = \frac{1}{2}\int f p_t^2 c^2 (p^2c^2 + m^2c^4)^{-1/2}\, d\vec{p}.$$

Плотность числа барионов есть

$$n = \int f\,d\vec{p}. \tag{12}$$

В равновесии компоненты $T_i^k$ связаны уравнением, которое получается из уравнений поля [15].

$$\frac{dP_{rr}}{dr} + \frac{2}{r}(P_{rr} - P_t) + \frac{\nu'}{2}(P_{rr} + E) = 0 \tag{13}$$

$$\nu' = \frac{2G\mu}{c^2r^2}\,\frac{1 + 4\pi r^3 P_{rr}/\mu c^2}{1 - 2G\mu/c^2 r}.$$

В изотропном случае $P_{rr} = P_t = P$.

Отметим, что уравнение (13) является следствием кинетического уравнения, поэтому функция, являющаяся решением кинетического уравнения, тождественно удовлетворяет соотношениям (11)—(13). Для распределения $\rho = \beta r^{-2}$ из (11) имеем

$$\varepsilon = \frac{\beta c^2}{r^2} I_E, \quad P_{rr} = \frac{\beta c^2}{r^2} I_{rr}, \quad P_t = \frac{\beta c^2}{r^2} I_t. \tag{14}$$

Функция распределения выбирается так, чтобы безразмерные величины $I_E$, $I_{rr}$, $I_t$ не зависели от радиуса $r$. Из (13)—(14) получаем

$$\frac{4I_t}{I_{rr} + I_E} = \frac{r_g}{r}\,\frac{1 + I_{rr}/I_E}{1 - r_g/r} = a \tag{15}$$

$$g_{00} = e^{\nu} = \lambda r^{a} \tag{16}$$

$$\frac{r_g}{r} = -\frac{8\pi G}{c^4 r}\int_0^r T_0^0 r^2 dr = \frac{8\pi G\beta}{c^2} I_E = \frac{4I_t I_E}{4I_t I_E + (I_{rr} + I_E)^2}. \tag{17}$$

Подставляя (16) в (10), получим

$$E_1 = \sqrt{\lambda}\, r^{a/2}(p^2c^2 + m^2c^4)^{1/2}. \tag{18}$$

Тогда функция распределения, удовлетворяющая кинетическому уравнению и дающая закон спадания плотности $\sim r^{-2}$, имеет вид

$$f = AL^{-2}\varphi(E_1 L^{-a/2}), \qquad \int f\,d\vec{p} = \frac{\beta}{mr^2} = n. \tag{19}$$

Красное смещение $z$ определяется следующим образом:

$$1 + z = e^{-\nu/2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\, r^{-a/2}. \tag{20}$$

Энергия связи $B$ модели с распределением плотности $\sim r^{-2}$

$$B=(M_0-M)c^2,\quad M_0=m\int\frac{4\pi nr^2dr}{(1-r_g/r)^{1/2}}\tag{21}$$

$$M=\frac{1}{c^2}\int 4\pi\varepsilon r^2dr,\qquad \frac{B}{Mc^2}=\left[\frac{4I_tI_E+(I_E+I_{rr})^2}{I_E^2(I_E+I_{rr})^2}\right]^{1/2}-1.$$

Рассмотрим функцию распределения

$$f=\frac{A}{r^2p_t^2}\left(\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}\;p_t^{-a\,2}\right)^{-k}.\tag{22}$$

В распределении (22) произвольными являются две величины из трех ($\beta$, $A$, $k$). Третья определяется из условия нормировки. При $k=4a^{-1}$ получаем изотропную функцию распределения

$$f=\frac{A}{r^2}\left(p^2c^2+m^2c^4\right)^{-2/a}.\tag{23}$$

Решение (23) изотропно и есть функция только модуля скорости, поэтому по общей теории в плазме такое решение кинетически устойчиво. Того же можно ждать и в гравитации. При малых гравитационных потенциалах решение (23) переходит в максвелловское. Действительно, при $a\to 0$ имеем, используя (15)—(17),

$$f=\frac{A}{r^2}\left(1+\frac{p^2}{m^2c^2}\right)^{-\frac{m^2c^2}{p^2}\frac{p^2}{4\pi G\beta m^2}}\to\frac{A}{r^2}e^{-\frac{p^2}{4\pi G\beta m^2}}.\tag{24}$$

Вводя температуру $\theta$ соотношением $4\pi G\beta m^2=2\theta m$, получаем максвелловское распределение. Таким образом, для моделей с $\rho=\beta r^{-2}$ функция (23) действительно является релятивистским обобщением изотропного максвелловского распределения и переходит в него при медленно меняющемся потенциале. Как и в нерелятивистском случае средняя кинетическая энергия частиц не зависит от радиуса. В ОТО такое условие необходимо для автомодельности решения, поскольку существует масштаб скорости $c$, энергии $mc^2$, чего нет в ньютоновской теории, допускающей решение с $\Phi\sim r^{-k}$, $u\sim r^{-k/2}$.

Энергию связи модели с распределением (23) получаем при

$$I_{rr}=I_t,\quad \alpha=(I_{rr}+I_E)/2I_{rr}=2/a,$$

используя (20), (21),

$$\frac{B}{Mc^2}=\frac{1}{\alpha I_E}\left(\alpha^2+2\alpha-1\right)^{1/2}-1,\qquad f=\frac{A}{r^2}\left(p^2c^2+m^2c^4\right)^{-\alpha}\tag{25}$$

$$1+z=r^{-1/a}/\sqrt{\lambda}.$$

Используя выражение для $I_E$ из (11), (14) и проведя интегрирование с функцией распределения (23), получим окончательно

$$\frac{B}{Mc^2} = \frac{(\alpha^2+2\alpha-1)^{1/2}}{\alpha}\frac{\Gamma(\alpha-3/2)\,\Gamma(\alpha-1/2)}{\Gamma(\alpha-2)\,\Gamma(\alpha)} - 1. \tag{26}$$

При $\alpha \to 2$ имеем $B/Mc^2 \to -1$ — ультрарелятивистский случай. Энергия связи обращается в нуль при $\alpha \approx 10$. Максимум энергии связи лежит при $\alpha \gg 1$. Разложение для этого случая имеет вид

$$\frac{B}{Mc^2} = \frac{1}{4\alpha} - \frac{83}{32}\frac{1}{\alpha^2}, \qquad \alpha \gg 1. \tag{27}$$

Максимум энергии связи равен $(B/Mc^2)_{\max} \simeq 0.006$, при этом $\alpha \simeq 21$, $1+z \sim r^{-1/20}$, $\overline{u^2}/c^2 = 1/\alpha$. Мы не имеем решения, которое плавно сопрягало бы автомодельное решение с пустым пространством. Приближенно, однако, можно предположить, что $z=2$ получится при $r/R \sim [(1+2)/(1+0.1)]^{20} = 10^{-9}$, $\rho/\bar{\rho} = 10^{18}$.

Таким образом, хотя формально и получено решение с неограниченно нарастающим $z$, фактически получение больших $z$ при максимуме энергии связи затруднительно.

При $k \to \infty$ в распределении (22) получаем модель с круговыми орбитами, полностью исследованную ранее Эйнштейном [16]

$$f = \frac{1}{\pi}\frac{\beta}{mr^2}\delta(p_r)\,\delta(p_t^2 - p_0^2). \tag{28}$$

Компоненты $T_i^k$ при этом равны

$$\varepsilon = mnc^2\sqrt{1+x^2}, \qquad P_{rr} = 0, \qquad P_t = \frac{1}{2}mnc^2\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{29}$$

Для $n = \beta/mr^2$ величина $x = p_0/mc = \text{const}$. Модель с круговыми орбитами можно построить для произвольного распределения плотности $n=n(r)$, тогда соотношения (29) остаются справедливыми, только $x = x(r)$. Из (13), (29) имеем

$$\begin{aligned} \mu &= 4\pi m\int_0^r n(r)\sqrt{1+x^2}\,r^2dr \\ \nu' &= \frac{2G\mu}{c^2r^2}(1-2G\mu/c^2r)^{-1} = \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned} \tag{30}$$

Задавая произвольную функцию $x(r)$, из (30) получаем $\mu(r)$, затем находим $n(r)$ по формуле $n(r) = \frac{1}{r^2\sqrt{1+x^2}}\frac{d}{dr}\left(\frac{\mu}{4\pi m}\right)$. Ограничение состоит в том, что $x(r)$ не должна убывать быстрее, чем $r^{-1}$.

В случае $n = \beta/r^2 m$ при $x = x_0 = \text{const}$ из (30) получаем

$$\frac{r}{r_g} = \frac{2x_0^2}{1+3x_0^2}, \qquad 1+z = e^{-\nu/2} = \frac{1+3x_0^2}{1+x_0^2}\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{x_0^2}{1+x_0^2}}$$
$$\frac{B}{Mc^2} = \frac{(1+3x_0^2)^{1/2}}{1+x_0^2} - 1, \qquad \frac{8\pi G\beta}{c^2} = \frac{2x_0^2}{(1+3x_0^2)(1+x_0^2)^{1/2}}. \tag{31}$$

Энергия связи $B/Mc^2$ при $x_0 \to \infty$ стремится к $-1$, обращается в нуль при $x_0^2 = 1$ и достигает максимума [16], равного $\sqrt{9/8} - 1 = 0.06$ при $x_0^2 = 1/3$. Сравнение с (26), (27) показывает, что модель с круговыми орбитами имеет максимум энергии связи на порядок больший, чем у модели с изотропным распределением. При $x_0^2 = 1/3$ имеем $r_g/r = 1/3$, что соответствует границе устойчивости круговой орбиты [17], поэтому максимум энергии связи соответствует границе устойчивости относительно радиальных возмущений. Однако, по всей вероятности, модель с круговыми орбитами неустойчива в кинетическом смысле (пучковая неустойчивость), как и в ньютоновской теории*.

4. *Гидродинамическое решение.* В изотропном случае $P_{rr} = P_t = P$ с заданным уравнением состояния имеются решения уравнения равновесия, не удовлетворяющие бесстолкновительному кинетическому уравнению. Рассмотрим модель с локально изотропной максвелловской функцией распределения с постоянной температурой $\theta$.

$$f = \psi \exp\left[-\frac{1}{\theta}(p^2c^2 + m^2c^4)^{1/2}\right]. \tag{32}$$

Функция (32) не удовлетворяет кинетическому уравнению в ОТО, так как не является функцией интегралов движения. Как известно [13], в равновесном распределении постоянна величина $\theta\sqrt{g_{00}}$.

---

* Модель с круговыми орбитами устойчива относительно радиальных возмущений в ньютоновской теории [18] и в ОТО при $v < c/\sqrt{3}$.

Термодинамические величины имеют вид:

$$n = \int f d\vec{p} = 4\pi\psi\theta^3 I_1, \qquad I_1 = \int\limits_0^\infty \exp\left(-\sqrt{x^2 + m^2c^4/\theta^2}\right) x^2 dx,$$

$$P = n\theta, \qquad E = n\theta \frac{I_2}{I_1}, \tag{33}$$

$$I_2 = \int\limits_0^\infty \exp\left(-\sqrt{x^2 + m^2c^4/\theta^2}\right)\sqrt{x^2 + m^2c^4/\theta^2}\, x^2 dx.$$

Подставляя (33) в (15), при $P_{rr} = P_t = P$ получаем следующее решение:

$$n = \beta/mr^2, \qquad \beta = \frac{c^4/2\pi G\theta}{4 I_2/I_1 + (1 + I_2/I_1)^2}$$

$$\mu = 4\pi \frac{\theta}{c^2}\beta \frac{I_2}{I_1} r, \qquad \frac{r_g}{r} = \left|1 + \frac{I_1}{4I_2}\left(1 + \frac{I_2}{I_1}\right)^2\right|^{-1} \tag{34}$$

$$1 + z = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} r^{-a/2}, \qquad a = 4\left(\frac{I_2}{I_1} + 1\right)\left|4\frac{I_2}{I_1} + \left(1 + \frac{I_2}{I_1}\right)^2\right|^{-1},$$

$$\lambda = \left(\frac{4\pi\theta\beta}{\mu c^2}\frac{I_2}{I_1}\right)^a \left(1 - \frac{r_g}{r}\right).$$

При $\theta \to 0$ имеем $I_2/I_1 = mc^2/\theta$, $\beta = \theta/2\pi G m$ и совпадает с нерелятивистским пределом распределения (23). Энергия связи полученной модели есть

$$\frac{B}{Mc^2} = \frac{mc^2/\theta}{I_2/I_1}\left|\frac{4I_2/I_1}{(1 + I_2/I_1)^2} + 1\right|^{1/2} - 1. \tag{35}$$

Энергия связи обращается в нуль при $mc^2/\theta \simeq 22$. Максимум энергии связи лежит при $mc^2/\theta \gg 1$, разложение при этом имеет вид

$$\frac{B}{Mc^2} = \frac{1}{2}\frac{\theta}{mc^2} - \frac{699}{64}\left(\frac{\theta}{mc^2}\right)^2.$$

Максимум энергии связи равен $\sim 0.006$, соответствует $mc^2/\theta \simeq 44$ и приблизительно равен соответствующему максимуму для функции распределения (23), что естественно, так как функция распределения достаточно близка к максвелловской. При $\theta \ll mc^2$ имеем нерелятивистскую модель с $\gamma = 5/3$, которая устойчива.

*Выводы*. В ньютоновском случае получено изотропное самосогласованное распределение гравитационно взаимодействующих точечных масс, удовлетворяющее кинетическому уравнению без столкновений и уравнению тяготения для произвольного степенного распределения плотности $\rho = \beta r^{-s}$, $s < 3$.

В случае $\rho = \beta r^{-2}$ аналогичное самосогласованное решение получено для анизотропной функции распределения как в ньютоновском случае, так и в ОТО.

Найденные решения в ОТО с $\rho = \beta r^{-2}$ имеют красные смещения в центре, неограниченно возрастающие при приближении к центру по закону $1 + z \sim r^{-1/\alpha}$. В изотропном случае они, по-видимому, устойчивы, когда средние скорости движения много меньше скорости света, $\bar{u} < 0.2\,c$, $\alpha > 21$.

Получено гидродинамическое решение в ОТО для идеального газа с постоянной температурой (но переменной $T' = T\sqrt{g_{00}}$) также имеющее $z \to \infty$ при $r \to 0$.

Пользуемся случаем выразить благодарность К. Торну, Л. Хазину и М. Подурцу за дискуссии и в частности Торну за сообщение о неопубликованных результатах американской группы, относящихся к круговым орбитам.

Институт прикладной математики
АН СССР

## MODELS OF CLUSTERS OF POINT MASSES WITH GREAT CENTRAL RED SHIFT

G. S. BISNOVATY-KOGAN, Y. B. ZELDOVICH

The isotropic self-similar solution of a kinetic equation with a self-consistent gravitational field is obtained in the case of Newtonian gravitation for power distribution of density $\rho = \beta r^{-s}$, $s < 3$.

An analogous self-consistent solution is obtained in case of $\rho = \beta r^{-2}$ for anisotropic distribution function either in Newtonian gravitation or general relativity.

The solutions in general relativity with $\rho = \beta r^{-2}$ have red shifts, infinitely increasing to the center according to the law $1 + z \sim r^{-1/\alpha}$. They are probably stable in the isotropic case, when the mean velocities are much smaller than light speed, $\bar{u} < 0.2\,c$, $\alpha > 21$.

The hydrodynamic solution in general relativity is obtained in the case of ideal gas with constant temperature, which also has $z \to \infty$ at $r \to 0$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *J. Greenstein, M. Schmidt*, Ap. J., 140, 1, 1964.
2. *G. Burbidge*, Ap. J., 147, 851, 1967.
3. *F. Hoyle, W. Fowler*, Nature, 213, 373, 1967.
4. *J. Oppenheimer, G. Volkoff*, Phys. Rev., 55, 374, 1939.
5. *Я. Б. Зельдович, М. А. Подурец*, Астрон. ж., 42, 963, 1965.
6. *Я. Б. Зельдович*, ЖЭТФ, 42, 1667, 1962.
7. *Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков*, Релятивистская астрофизика, Наука, 1967.
8. *В. А. Антонов*, Астрон. ж., 37, 918, 1960.
9. *М. А. Подурец*, Астрон. ж., 46, 129, 1969.
10. *J. Ipser, K. Thorne*, Ap. J., 154, 251, 1968.
11. *Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович, Р. З. Сагдеев, А. М. Фридман*, Ж. прикл. мех. и техн. физ., № 3, 1969.
12. *H. Bondi*, Proc. Roy. Soc., 281, 39, 1964.
13. *E. Fackerell*, Ap. J., 153, 643, 1968.
14. *Л. Д. Ландау*, ЖЭТФ, 16, 574, 1946.
15. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Теория поля, Физматгиз, 1962.
16. *A. Einstein*, Ann. Math., 40, 922, 1939. (Русск. перевод: А. Эйнштейн, собр. соч., 2, 514, Наука, 1966).
17. *С. А. Каплан*, ЖЭТФ, 19, 951, 1949.
18. *Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович, А. М. Фридман*, ДАН СССР, 184, 794, 1968.