АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 5 МАЙ, 1969 ВЫПУСК 2

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ИНТЕНСИВНОСТЯХ ВОДОРОДНЫХ ЛИНИЙ В СПЕКТРАХ ТУМАННОСТЕЙ

В. П. ГРИНИН

Поступила 15 октября 1968

Составлены уравнения, определяющие населенности возбужденных уровней водорода с учетом частичной непрозрачности в линиях лаймановской серии для плоской геометрии. Принято во внимание перераспределение излучения между линиями и по частотам внутри линии.

Уравнения решены численно для ряда оптических толщин в линии L_α и электронной температуры $T_e = 10\,000^\circ$. Найдены лаймановский и бальмеровский декременты с учетом самопоглощения в линиях лаймановской серии. Показано, что предположение о полной непрозрачности в лаймановских линиях, используемое в теории бальмеровского декремента (случай B), выполняется с достаточной для приложений точностью при $\tau_{L_\alpha} \gg 10^2$.

Введение. В оптически тонкой плазме интенсивности эмиссионных линий пропорциональны населенностям соответствующих уровней, которые могут быть найдены путем решения системы уравнений стационарности. Имеется большое количество работ, в которых интенсивности эмиссионных линий находятся при различных предположениях о механизмах заселения уровней. Мы не будем перечислять эти работы, так как достаточно полную библиографию по этому вопросу можно найти, например, в [1]. Отметим лишь, что при вычислении бальмеровского декремента обычно рассматриваются так называемые случаи A и B, введенные Д. Мензелом и Дж. Бэкером [2]. Случай A соответствует плазме, оптически тонкой во всех линиях. В случае B плазма полностью непрозрачна в линиях лаймановской серии и прозрачна в линиях субординатных серий.

При решении системы уравнений стационарности, соответствующей какому-либо из этих двух случаев, не возникает никаких принципиальных трудностей. Например, если спонтанные переходы не прерываются, то решение задачи сводится к вычислению элементов каскадной матрицы Ситона [3].

Иначе обстоит дело, когда плазма частично непрозрачна в линиях лаймановской серии, так как в этом случае приходится решать систему уравнений стационарности совместно с системой уравнений переноса. По этой причине населенности возбужденных уровней, а следовательно и интенсивности выходящего излучения будут зависеть не только от электронной температуры и концентрации, но также от геометрической модели излучающего газа, типа рассеяния квантов и т. д. Решение такой задачи и является целью настоящей статьи.

1. *Основные уравнения.* Будем считать, что водородная плазма, прозрачная в лаймановском континууме и в линиях субординатных серий, представляет собой плоскопараллельный изотермический слой газа постоянной плотности, характеризуемый малой плотностью вещества и излучения. Предполагается, что населенности подуровней пропорциональны их статистическим весам. Тогда для рекомбинационного механизма заселения уровней систему уравнений стационарности можно записать следующим образом:

$$n_i \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} = n_1 B_{1i} \rho_{1i} + n_e n^+ C_i + \sum_{k=i+1}^{\infty} n_k A_{ki}, \; (i=2, 3, \ldots), \tag{1}$$

где n_i — населенность i-того уровня, n_e, n^+ — концентрация электронов и ионов соответственно, A_{ki}, B_{1i} — эйнштейновские коэффициенты вероятностей переходов, C_i — коэффициент рекомбинации на i-тый уровень, ρ_{1i} — плотность излучения в линии $1 \to i$ (взвешенная по профилю линии).

Чтобы найти явное выражение для числа фотовозбуждений, мы примем, что коэффициент поглощения в линиях целиком определяется эффектом Допплера, а элементарный акт рассеяния фотонов происходит с полным перераспределением по частоте внутри линии. Тогда, следуя [4], нетрудно показать, что

$$n_1 B_{1i} \rho_{1i} = \frac{1}{2} A_{i1} \int_0^{\tau_0} K_i(|\tau - \tau'|) \, n_i(\tau') \, d\tau', \tag{2}$$

где

$$K_i(p) = d_i K(p d_i), \tag{3}$$

$$K(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2} E_1\left(p \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\right) dx, \tag{4}$$

$E_1(t)$ — первая интегральная показательная функция, d_i — отношение коэффициентов поглощения в центрах линии $1 \to i$ и линии L_α, то есть $d_i = k_{1i}/k_{12}$, τ — оптическая глубина в линии L_α, усредненная по профилю линии

$$\tau = \sqrt{\pi} \int_0^z n_1 k_{12}\, dz,$$

τ_0 — оптическая толщина слоя: $\tau_0 = \tau(z_0)$.

Выражая населенности уровней в долях термодинамически равновесных, соответствующих данной электронной температуре и концентрации, то есть полагая

$$n_i(\tau) = b_i^1(\tau)\, n_e n^+ \frac{h^3 i^2}{(2\pi mkT_e)^{3/2}}\, e^{X_i} \tag{5}$$

и подставляя (2) и (5) в уравнение (1), после простых преобразований получаем систему интегральных уравнений для определения мензеловских параметров $b_i(\tau)$:

$$b_i(\tau) = \frac{\lambda_i}{2} \int_0^{\tau_0} K_i(|\tau - \tau'|)\, b_i(\tau')\, d\tau' + q_i + \sum_{k=i+1}^{\infty} b_k(\tau)\, \sigma_{ki} \tag{6}$$

$$(i = 2,\ 3 \ldots)$$

где

$$\lambda_i = \frac{A_{i1}}{\sum\limits_{j=1}^{i-1} A_{ij}} = \frac{g_{i1}}{(i^2 - 1)}\, t_i, \tag{7}$$

$$q_i = \frac{1}{2} \frac{1}{i^2} E_1(X_i)\, \bar{g}_i t_i, \tag{8}$$

$$\sigma_{ki} = \frac{g_{ki}}{(k^2 - i^2)\, k_i^2}\, e^{X_k - X_i}\, t_i, \tag{9}$$

$$t_i = \left[\sum_{j=1}^{i-1} \frac{g_{ij}}{(i^2 - j^2)\, j} \right]^{-1}. \tag{10}$$

Здесь $X_i = \chi_i/kT_e$, где χ_i — энергия ионизации с i-того уровня, g_{ik}, $\bar{g}_i$ — гаунтовские множители для соответствующих переходов, остальные обозначения обычные. Отметим, что λ_i есть вероятность выживания кванта в линии $1 \to i$ при элементарном акте рассеяния, обусловленная механизмом дробления квантов.

При переходе к системе (6) мы использовали предположение о постоянстве электронной температуры и концентрации. При этом функции $b_i(\tau)$ должны быть симметричны относительно $\tau_0/2$. С точностью до постоянного множителя $b_i(\tau)$ равны соответствующим функциям источника.

После того, как найдено решение системы интегральных уравнений (6), вычисление относительных интенсивностей лаймановских и бальмеровских линий не представляет большого труда. Действительно, энергия, выходящая за единицу времени через единичную площадку в линии $1 \to i$, равна

$$F_i = \frac{1}{2} A_{i1} \frac{h\nu_{i1}}{n_1 k_{12} \sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\tau_0} n_i(\tau)\, L_i(\tau)\, d\tau, \qquad (i=3, 4, \ldots) \tag{11}$$

где $1/2\ L_i(\tau)$ — вероятность того, что квант, излученный в линии $1 \to i$ на глубине τ, выйдет из среды без последующих рассеяний. Как известно (см., например, [4]),

$$L_i(\tau) = \int\limits_{\tau}^{\infty} K_i(p)\, dp. \tag{12}$$

Учитывая, что в условиях нашей задачи вероятность выживания кванта, соответствующего переходу $1 \to 2$, равна единице ($\lambda_2 = 1$), поток излучения в этой линии можно найти, не решая уравнения стационарности для второго уровня. Воспользуемся для этого следующими соображениями: за единицу времени в 1 $см^3$ на второй уровень происходит

$$N(\tau) = \sum_{i=3}^{\infty} n_i(\tau)\, A_{i2} + n_e n^+ C_2 \tag{13}$$

переходов. Каждый такой переход приводит к появлению L_α — кванта, который, диффундируя в плазме, обязательно ($\lambda_2 = 1$) выйдет из нее. Следовательно, в силу условия стационарности

$$F_2 = \frac{1}{2} \frac{h\nu_{12}}{n_1 k_{12} \sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\tau_0} N(\tau)\, d\tau. \tag{14}$$

Так как мы предполагаем, что плазма полностью прозрачна в линиях субординатных серий, бальмеровский декремент находится по формуле

$$\frac{H_i}{H_4} = \frac{\overline{b}_i}{\overline{b}_4}\, e^{X_i - X_4} \left(\frac{4}{i}\right)^3 \frac{g_{i2}}{g_{42}}, \qquad (i = 3, 4, \ldots) \tag{15}$$

где

$$\overline{b}_i = \frac{1}{\tau_0}\int_0^{\tau_0} b_i(\tau)\,d\tau. \tag{16}$$

2. *Результаты расчетов.* Для решения системы интегральных уравнений (6) была использована ядерная аппроксимация, предложенная Ю. Эвреттом и Д. Хаммером [5]

$$K_i(p) \approx 2\sum_{k=1}^{32} a_k d_i e^{-b_k d_i p}, \tag{17}$$

где a_k и b_k — постоянные, табулированные в [5]. Для этой аппроксимации

$$\left| K(p) - 2\sum_{k=1}^{32} a_k e^{-b_k p} \right| < 0.01\, K(p) \tag{18}$$

для всех $p \in [10^{-4}, 10^{8}]$. Очевидно, что при $p = 0$ аппроксимация экспонентами не годится, так как $K(0) = \infty$, поэтому нижняя граница выбрана так, чтобы обеспечить достаточную точность при вычислении интегралов, содержащих ядро $K(p)$.

При вычислениях мы ограничились двадцатью уровнями и приняли, что $b_{20} = 1$. Система (6) распадается на „цепочку" интегральных уравнений с известными свободными членами, которая решалась путем последовательного перехода от высоких уровней к более низким. Каждое интегральное уравнение решалось методом последовательных приближений. Этот метод применительно к нашей задаче имеет простой физический смысл: каждое приближение соответствует учету одного акта рассеяния фотона, а так как последний, диффундируя в плазме, совершает в среднем небольшое число рассеяний (соответствующие вероятности выживания λ_i малы), итерации сходятся достаточно быстро. При этом точность получаемых значений $b_i(\tau)$ зависит от оптических толщин в соответствующих линиях и значений λ_i. Анализ показывает, что максимальная ошибка (при $\tau_0 = 10^3$ и $i = 3$) не превышает нескольких процентов, точность же интегральных величин, таких как $\overline{b}_i$ и F_i, должна быть несколько выше.

При вычислении коэффициентов q_i мы приняли $\overline{g}_i = 1$. Гаунтовские множители для спонтанных переходов брались из работы Д. Мензела и Дж. Бэкера [2].

Система интегральных уравнений (6) при $i = 3, 4, \ldots 19$ была решена для $\tau_0 = 0$, 50, 10^2 и 10^3 и электронной температуры $T_e = 10^4$.

Вычисления велись на ЭВМ М-20 и БЭСМ-3М Вычислительного центра Ленинградского университета.

На рис. 1 приведены для нескольких нижних уровней функции $b_i(\tau)$ при $\tau_0 = 10^2$, 10^3 и значения b_i, соответствующие случаю B. Как и следовало ожидать, с увеличением оптической толщины $b_i(\tau_0/2) \to b_i(\infty)$. (Мензеловский параметр $b_3(\tau)$ при $\tau_0 = 10^3$ в центре слоя несколько выше соответствующего предельного значения из-за погрешностей использованного численного метода решения).

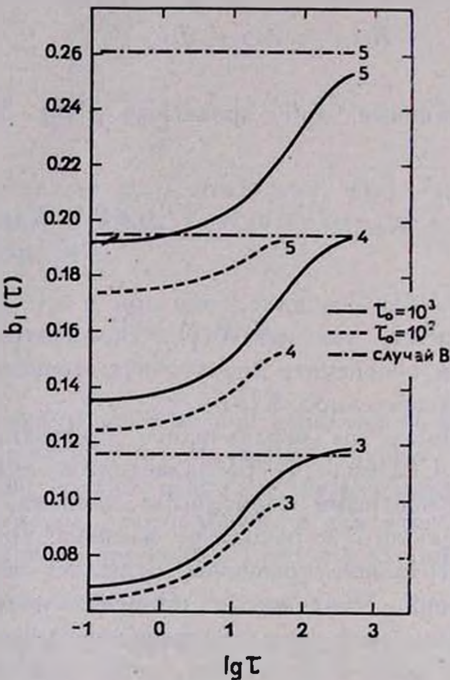

Рис. 1. Мензеловские параметры $b_i(\tau)$.

На рис. 2 приведены относительные интенсивности лаймановских линий. Мы видим, что с увеличением оптической толщины τ_0 перераспределение излучения между линиями, происходящее при диффузии квантов, приводит к существенному изменению лаймановского декремента. Особенно чувствительно к изменениям величины τ_0 отношение F_2/F_4.

Напомним, что все результаты, относящиеся к линии L_α, получены в предположении о чистом рассеянии в этой линии. Что касается вопроса о применимости этого приближения, то здесь можно сослаться на работу Д. Хаммера [6], где достаточно подробно рассмотрены физические процессы, приводящие к гибели L_α-квантов.

В табл. 1 мы даем усредненные по всему слою значения мензеловских параметров, определяемые формулой (16). Величины, приведенные в столбце $\tau_0 = 0$, соответствуют случаю A, в столбце $\tau_0 = \infty$ — случаю B.

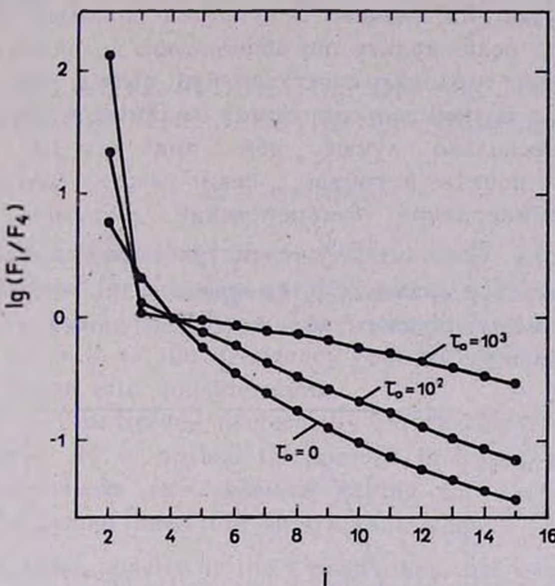

Рис. 2. Относительные интенсивности лаймановских линий.

Таблица 1

СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ МЕНЗЕЛОВСКИХ ПАРАМЕТРОВ $\overline{b}_i$

$T_e = 10\,000°$

i \ τ_0	0	50	10^2	10^3	∞
3	$0.375 \cdot 10^{-1}$	$0.777 \cdot 10^{-1}$	$0.905 \cdot 10^{-1}$	0.115	0.115
4	$0.902 \cdot 10^{-1}$	0.129	0.145	0.185	0.195
5	0.141	0.172	0.188	0.243	0.262
6	0.184	0.207	0.220	0.282	0.312
7	0.221	0.241	0.253	0.316	0.355
8	0.251	0.266	0.276	0.355	0.386
9	0.276	0.287	0.295	0.350	0.410
10	0.296	0.305	0.311	0.361	0.428
11	0.312	0.320	0.325	0.369	0.442
12	0.326	0.333	0.337	0.375	0.452
13	0.338	0.343	0.346	0.381	0.460
14	0.346	0.351	0.352	0.383	0.465
15	0.355	0.359	0.360	0.387	0.469

Далее, на рис. 3 приведены величины Δ_i, представляющие собой отношение бальмеровского декремента H_i/H_4, вычисленного по формулам (15) и (16), к бальмеровскому декременту, соответствующему случаю B. Как следует из графика, бальмеровский декремент при переходе от случая A к случаю B меняется довольно сложным образом. Например, если судить по абсолютной величине отклонений Δ_i от единицы, то следовало бы сделать вывод, что при $\tau_0 = 10^2$ предположение о полной непрозрачности в лаймановских линиях ($i \leqslant 15$) выполняется несколько лучше, чем при $\tau_0 = 10^3$. Причину такого поведения понять нетрудно, если учесть, что при заданной электронной температуре бальмеровский декремент определяется отношением $\overline{b}_i/\overline{b}_4$. При $\tau_0 = 10^2$ вследствие выхода излучения в лаймановских линиях все значения $\overline{b}_i$ смещены так, что относительные интенсивности бальмеровских линий ($i \leqslant 15$) почти в точности соответствуют случаю B.

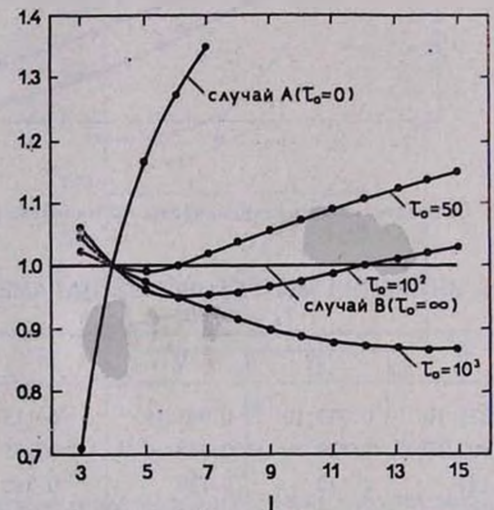

Рис. 3. Величины $\Delta_i = (H_i/H_4)/(H_i/H_4)_B$.

В заключение следует заметить, что, по-видимому, у большинства туманностей оптическая толщина в линии L_α по порядку величины равна $10^4 \div 10^5$, но даже в тех случаях, когда τ_0 порядка $10^2 \div 10^3$, предположение о полной непрозрачности в лаймановских линиях все еще является разумным приближением при вычислении бальмеровского декремента.

Автор выражает благодарность В. В. Иванову за постановку задачи и полезные советы, полученные в ходе выполнения работы.

Крымская астрофизическая
обсерватория

ON THE RELATIVE INTENSITIES OF THE HYDROGEN LINES IN THE SPECTRA OF NEBULAE

V. P. GRININ

The equations governing the populations of excited levels of hydrogen are derived for the plane-parallel geometry taking into account partial opacity in the Lyman lines. The redistribution of radiation between the lines as well as the frequency redistribution within the lines themselves are taken into consideration.

The equations are solved numerically for the electron temperature $T_e = 10^4$ and for a set of optical thicknesses in Lyman-α. The Lyman and Balmer decrements are obtained taking into account the self-absorbtion in the Lyman lines. It is shown that when $\tau_{L_\alpha} > 10^2$ the assumption of the total opacity in the Lyman lines, used in the theory of the Balmer decrement (the so called case B), holds within the accuracy sufficient for applications.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Боярчук*, Изв. КрАО, 35, 43, 1966.
2. *D. H. Menzel*, *J. D. Baker*, Ap. J., 86, 70, 1937.
3. *M. J. Seaton*, M. N., 119, 81, 1959.
4. *В. В. Иванов*, сб. „Теория звездных спектров", стр. 127, Наука, М., 1966.
5. *D. G. Hummer*, *E. H. Avrett*, M. N., 130, 295, 1965.
6. *D. G. Hummer*, Доклад на симпозиуме МАС по планетарным туманностям, Татранска Ломница, 1967.