АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 5 МАЙ, 1969 ВЫПУСК 2

К НЕЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ

Р. С. ВАРДАНЯН, Н. Б. ЕНГИБАРЯН

Поступила 11 июня 1968
Исправлена 3 октября 1968

В статье рассматривается нелинейная нестационарная задача переноса излучения в плоскопараллельном слое и в одномерной среде, состоящих из атомов с двумя энергетическими уровнями. Рассеяние считается либо когерентным, либо полностью некогерентным. Решение задачи получается в виде разложения по степеням времени.

Некоторые нелинейные нестационарные задачи переноса излучения были рассмотрены в связи с теорией лазеров (см., например, [1]), а также в статье авторов [2] в случае очень больших плотностей излучения.

В настоящей статье будут рассматриваться трехмерная и одномерная нелинейные нестационарные задачи переноса в спектральной линии при учете только времени нахождения квантов в поглощенном состоянии. Причем в разделе 1 рассматривается задача монохроматического рассеяния, а в разделе 2 принимается, что рассеяние кванта происходит с полным перераспределением по частотам.

1. *Монохроматическое рассеяние.* Пусть изотермический плоскопараллельный слой с геометрической толщиной z_0 равномерно заполнен атомами одного типа с двумя энергетическими уровнями. Обозначим через n и n_e концентрацию атомов и свободных электронов соответственно.

Пусть среда сверху освещена излучением с резонансной частотой ν_0 (соответствующей переходу атомов между состояниями $1 \leftrightarrow 2$), распределение которого по направлениям в момент времени t описывается интенсивностью $\bar{I}_0(t, \eta)$, где η — косинус угла падения.

Тогда в каждой внутренней точке среды z создается определенное поле излучения $\bar{I}(z, t, \eta)$ и распределение атомов по уровням.

Обозначим через $n_k = n_k(z, t)$ $(k = 1, 2)$ число атомов в 1 $см^3$ на глубине z в момент времени t.

$$n_1 + n_2 = n = \text{const}. \tag{1}$$

Уравнение переноса имеет следующий вид:

$$\eta \frac{\partial \bar{I}}{\partial z} = -\frac{h\nu_0 B_{12}}{c}\left(n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2\right)\bar{I} + \frac{h\nu_0 A_{21}}{4\pi} n_2 \tag{2}$$

с условиями

$$\bar{I}(0, t, \eta) = \bar{I}_0(t, \eta) \text{ при } \eta > 0 \text{ и } \bar{I}(z_0, t, \eta) = 0 \text{ при } \eta < 0. \tag{3}$$

Изменение населенности возбужденного состояния со временем описывается следующим уравнением:

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = -\frac{2\pi}{c}\bar{S} B_{12}\left(n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2\right) + a_{12} n_1 - (a_{21} + A_{21}) n_2, \tag{4}$$

с условием

$$n_2(z, 0) = n_2^0(z), \tag{5}$$

где

$$\bar{S} = \bar{S}(z, t) = \int_{-1}^{1} \bar{I}(z, t, \eta)\, d\eta. \tag{6}$$

B_{12}, A_{21} — суть эйнштейновские коэффициенты переходов; g_1 и g_2 — статистические веса соответствующих состояний; $a_{12} = n_e q_{12}$ и $a_{21} = n_e q_{21}$ — коэффициенты электронных ударов первого и второго родов соответственно.

Введем следующие обозначения:

$$\tau = \frac{h\nu_0 B_{12} n}{c} z, \qquad \tau_0 = \frac{h\nu_0 B_{12} n}{c} z_0. \tag{7}$$

τ — предельная оптическая глубина точки (определение см. в [4]) с геометрической глубиной z.

$$T = A_{21} t. \tag{8}$$

$$I(\tau, t, \eta) = \left(1 + \frac{g_1}{g_2}\right)\frac{2\pi}{c}\frac{B_{12}}{A_{21}}\bar{I}(z, t, \eta) + \frac{1}{2}. \tag{9}$$

$$S(\tau, T) = \int_{-1}^{1} I(\tau, T, \eta)\, d\eta. \tag{10}$$

$$q(\tau, T) = \frac{n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2}{n}. \tag{11}$$

В этих обозначениях уравнения (2) и (4) примут вид

$$\eta \frac{\partial I}{\partial \tau} = -Iq + \frac{1}{2} \tag{12}$$

$$\frac{\partial q}{\partial T} = -Sq + \alpha - \beta q \tag{13}$$

с условиями

$$I(0, T, \eta) = I_0(T, \eta) = \left(1 + \frac{g_1}{g_2}\right) \frac{2\pi}{c} \frac{B_{12}}{A_{21}} \bar{I}_0\left(\frac{7}{A_{21}}, \eta\right) + \frac{1}{2} \tag{14}$$

при $\eta > 0$

и
$$I(\tau_0, T, \eta) = \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad \eta < 0 \tag{15}$$

$$q(\tau, 0) = q_0(\tau) = 1 - \left(1 + \frac{g_1}{g_2}\right) \frac{n_2^0\left(\frac{\tau c}{h\nu_0 B_{12} n}\right)}{n}, \tag{16}$$

где

$$\alpha = \frac{2\pi}{c} \frac{B_{12}}{A_{21}} \left(a_{21} - \frac{g_1}{g_2} a_{12}\right) + 1, \tag{17}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{c} \frac{B_{12}}{A_{21}} (a_{12} + a_{21}). \tag{18}$$

Займемся решением системы (12—13) с условиями (14—16). Обозначим

$$Q(\tau, T) = \int_0^{\tau} q(\tau, T)\, d\tau. \tag{19}$$

$Q(\tau, T)$ представляет собой реальную оптическую глубину точки с предельной глубиной τ в момент T.

Уравнение (12) с условиями (14—15) эквивалентно следующему уравнению:

$$S(\tau, T)=\int_0^1\left[I_0(T,\eta)e^{-\frac{Q(\tau,T)}{\eta}}+\frac{1}{2}e^{-\frac{Q(\tau_0,T)-Q(\tau,T)}{\eta}}\right]d\eta+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{\tau_0}E_1\left|Q(\tau,T)-Q(x,T)\right|dx. \tag{20}$$

Как обычно,

$$E_n(x)=\int_0^1 e^{-\frac{x}{\eta}}\eta^{n-2}d\eta.$$

Интегрируя обе части уравнения (13) по τ от 0 до τ, получим

$$\frac{\partial Q}{\partial T}=-\int_0^{\tau}Sqd\tau+\alpha\tau-\beta Q. \tag{21}$$

Умножая (20) на $q(\tau, T)$ и интегрируя по τ от 0 до τ (с учетом соотношения $dQ=qd\tau$), после некоторых преобразований получим выражения для $\int_0^{\tau}Sqd\tau$ через Q, подставляя которое в (21) получим следующее нелинейное интегро-дифференциальное уравнение относительно функции $Q(\tau, T)$:

$$\frac{\partial Q}{\partial T}=-\int_0^1\eta I_0(T,\eta)\left[1-e^{-\frac{Q(\tau,T)}{\eta}}\right]d\eta-$$
$$-\frac{1}{2}E_3\left[Q(\tau_0,T)-Q(\tau,T)\right]+\frac{1}{2}E_3\left[Q(\tau_0,T)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{\tau_0}E_3\left[Q(x,T)\right]dx+\frac{1}{2}\int_0^{\tau}E_2\left[Q(\tau,T)-Q(x\,T)\right]dx- \tag{22}$$
$$-\frac{1}{2}\int_{\tau}^{\tau_0}E_2\left[Q(x,T)-Q(\tau,T)\right]dx+(\alpha-1)\tau-\beta\,Q(\tau,T),$$

с условием

$$Q(\tau, 0) = Q_0(\tau) = \int_0^{\tau} q_0(\tau)\, d\tau. \tag{23}$$

Таким образом, полное решение задачи сводится к определению функции Q из (22) с условием (23).

Решение уравнения (22) в ряде случаев можно найти в виде ряда Тейлора по T. Так, например, в случае аналитичности функции $I_0(T, \eta)$, когда имеет место разложение

$$I_0(T, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(\eta)\, T^k, \qquad T > 0, \tag{24}$$

решение уравнения (22) можно искать в виде

$$Q(\tau, T) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(\tau)\, T^k. \tag{25}$$

Если ряд (24) сходится с факториальной скоростью, то с такой же скоростью будет сходиться ряд (25).

Из (22), учитывая (23), можно получить рекуррентные соотношения для коэффициентов $Q_k(\tau)$. Наличие в уравнении (22) членов, содержащих $Q(\tau_0, T)$, не усложняет нахождение коэффициентов $Q_k(\tau)$.

Рекуррентные соотношения для $Q_k(\tau)$ особенно просты при $q_0(\tau) = c = \mathrm{const}$, то есть когда $Q_0(\tau) = c\tau$. Так может быть в случае, когда при $T < 0$ среда находилась в состоянии термодинамического равновесия; тогда для коэффициента c получается следующее значение:

$$c = \frac{1 - e^{-\frac{h\nu_0}{kT}}}{1 + \frac{g_1}{g_2} e^{-\frac{h\nu_0}{kT}}}.$$

Решение одномерной задачи сводится к следующему уравнению, аналогичному уравнению (22),

$$\frac{\partial Q}{\partial T} = -I_0(T)\left[1 - e^{-Q(\tau, T)}\right] - \frac{1}{2} e^{-Q(\tau_0, T)}\left[e^{Q(\tau, T)} - 1\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{\tau} e^{-[Q(\tau, T) - Q(x, T)]}\, dx - \frac{1}{2}\int_{\tau}^{\tau_0} e^{-[Q(x, T) - Q(\tau, T)]}\, dx + \tag{26}$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{\tau_0} e^{-Q(x, T)}\, dx + (\alpha - 1)\,\tau - \beta Q;$$

с условием

$$Q(\tau, 0) = Q_0(\tau). \tag{27}$$

В случае $Q_0(\tau) = c\tau$ для $Q_1(\tau)$ и $Q_2(\tau)$ получаются следующие выражения:

$$Q_1(\tau) = \left[-\gamma_0 + \frac{1}{2c} + \frac{1}{2} e^{-c\tau_0} \left(1 - \frac{1}{c}\right) + (\alpha - 1 - c\beta)\tau + \right.$$

$$+ \left[\gamma_0 - \frac{1}{2c} \right] e^{-c\tau} + \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2c} \right] e^{-c(\tau_0 - \tau)}$$

$$Q_2(\tau) = \frac{\gamma_1}{2} - \frac{\gamma_1 + \gamma_0 Q_1(\tau)}{2} e^{-c\tau} +$$

$$+ \frac{1}{4} [Q_1(\tau_0) - Q_1(\tau)] e^{-c(\tau_0 - \tau)} - \frac{1}{4} Q_1(\tau_\eta) e^{-c\tau_0} -$$

$$- \frac{1}{4} \int_0^\tau [Q_1(\tau) - Q_1(x)] e^{-c(\tau - x)} dx - \frac{1}{4} \int_\tau^{\tau_0} [Q_1(x) - Q_1(\tau)] e^{-c(x - \tau)} dx -$$

$$- \frac{1}{4} \int_0^{\tau_0} Q_1(x) e^{-cx} dx + (\alpha - 1)\tau - \beta c Q_1(\tau),$$

где γ_k — коэффициенты разложения функции $I_0(\tau)$ в степенной ряд.

Можно убедиться, что при последовательном вычислении коэффициентов $Q_m(\tau)$ встречаются интегралы только вида

$$\int \tau^p e^{\pm cq\tau} d\tau \quad p \leqslant m - 1, \quad q \leqslant m$$

(p и q — целые положительные).

В случае кусочной аналитичности функции $I_0(T, \eta)$ по T (например, в случае прямоугольного входного импульса $I_0(T, \eta) = I_0(\eta)$ при $0 < T \leqslant T_1$ и $I_0(T, \eta) = 0$ при $T > T_1$) можно с помощью разложения (25) определить функцию $Q(\tau, T_1)$, где T_1 — первая точка нарушения аналитичности функции $I_0(T, \eta)$, после чего написать новое разложение по степеням $(T - T_1)$, принимая в качестве нового начального условия функцию $Q(\tau, T_1)$.

В том случае, если среда освещается мгновенным импульсом $I_0(T, \eta) = I_0(\eta)\delta(T)$, где $\delta(T)$ — функция Дирака, можно пользоваться ею заменой прямоугольным импульсом, но, вероятно, можно найти более эффективный метод рассмотрения этого случая.

Предполагается применить полученные результаты к вспыхивающим звездам.

2. *Случай полного перераспределения по частотам внутри спектральной линии.* Будем считать, что рассеяние света в спектральной линии происходит с полным перераспределением по частотам. Это означает, что вероятность переизлучения кванта с частотой ν не зависит от частоты поглощенного кванта.

Нелинейная стационарная задача переноса в спектральной линии при таких предложениях рассмотрена в статье В. Ю. Теребижа [3].

Для нелинейной нестационарной задачи переноса (при учете только времени пребывания кванта в поглощенном состоянии) получаются следующие уравнения:

$$\eta \frac{dN_x}{d\tau} = -\alpha(x)\,q(\tau, T)\,N_x(\tau, T, \eta) + \frac{1}{2}\alpha(x) \tag{28}$$

с условиями

$$\begin{cases} N_x(0, T, \eta) = N^0(T, \eta) & \text{при} \quad \eta > 0 \\ N_x(\tau_0, T, \eta) = \dfrac{1}{2} & \text{при} \quad \eta < 0 \end{cases} \tag{29}$$

и

$$\frac{\partial q}{\partial T} = -Sq + \alpha - \beta q \tag{30}$$

с условием

$$q(\tau, 0) = q_0(\tau), \tag{31}$$

где

$$N_x = \frac{c^2}{4h\nu_0^3}\left(1 + \frac{g_1}{g_2}\right) I_\nu + \frac{1}{2}, \tag{32}$$

$x = (\nu - \nu_0)/\Delta\nu$; $\Delta\nu$ — ширина спектральной линии; $\alpha(x)$ — контур коэффициента поглощения; τ — предельная оптическая глубина в центре линии,

$$S(\tau, T) = \frac{1}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)\,dx} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)\,dx \int\limits_{-1}^{1} N_x(\tau, T, \eta)\,d\eta. \tag{33}$$

Для функции $Q(\tau, T)$ получается следующее уравнение:

$$\frac{\partial Q}{\partial T} = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_0^1 \eta N_x^0(T, \eta)\left[1 - e^{-\frac{\alpha(x)\, Q(\tau,\, T)}{\eta}}\right] d\eta -$$

$$-\frac{1}{2} K_3 [Q(\tau_0, T) - Q(\tau, T)] + \frac{1}{2} K_3 [Q(\tau_0, T)] +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau_0} K_2 [\, Q(\tau', T)\,]\, d\tau' + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau} K_2 [Q(\tau, T) - Q(\tau', T)]\, d\tau' - \tag{34}$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\tau}^{\tau_0} K_2 [Q(\tau', T) - Q(\tau, T)]\, d\tau' + (\alpha - 1)\,\tau - \beta\, Q(\tau, T),$$

с условием

$$Q(\tau, 0) = Q_0(\tau) = \int\limits_0^{\tau} q_0(\tau)\, d\tau, \tag{35}$$

где

$$K_n(\tau) = \frac{1}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)\, dx} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha^{3-n}(x)\, E_n[\alpha(x)\,\tau]\, dx \qquad (n = 1, 2, 3). \tag{36}$$

При решении уравнения (34) с условием (35) также можно пользоваться разложением функции $Q(\tau, T)$ в ряд по степеням T.

Институт физических исследований
АН АрмССР
Институт математики и механики
АН АрмССР

ON THE NONLINEAR NONSTATIONARY PROBLEM OF RADIATION TRANSFER IN SPECTRAL LINE

R. S. VARDANIAN, N. B. YENGIBARIAN

A nonlinear nonstationary problem of the radiation transfer in plane-parallel layers or in one-dimensional medium, consisting of two-level atoms is considered. The cases of monochromatic scattering and complete redistribution of frequencies are discussed. The solution of these problems are obtained as a power series of t.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Л. Микаелян, М. Л. Тер-Микаелян, Ю. Г. Турков*, Вопросы радиоэлектроники, 17, № 10, 32, 1964.
2. *Р. С. Варданян, Н. Б. Енгибарян*, Уч. зап. Ереван. Гос. ун-та, 3, 94, 1968.
3. *В. Ю. Теребиж*, Астрофизика, 3, 281, 1967.
4. *Н. Б. Енгибарян*, Астрофизика, 2, 31, 1966.