АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 5 МАЙ, 1969 ВЫПУСК 2

ПЕРЕНОС РЕЗОНАНСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Ю. Ю. АБРАМОВ, А. П. НАПАРТОВИЧ

Поступила 16 июля 1968

При решении задач о переносе разонансного излучения в полупространстве, как правило, ограничиваются рассмотрением плоских источников; в этом случае все величины можно считать зависящими от одной координаты. В предлагаемой статье рассмотрен случай, когда на границе среда—вакуум расположен точечный источник, при этом, очевидно, возникает добавочная неоднородность в плоскости, параллельной поверхности. Получены точные формулы для плотности возбужденных атомов в среде и интенсивности выходящего излучения. Проводится подробное исследование этих формул; при этом удается установить некоторые простые закономерности в асимптотическом поведении плотности возбужденных атомов на больших расстояниях от источника.

Показано, что форма линии выходящего из среды излучения имеет характерный „двугорбый" вид с максимумами на частотах таких, что $k_\nu R \sim 1$, где R — расстояние до источника. Проводится обсуждение результатов.

1. *Введение.* В последние годы удалось найти точные решения ряда задач теории переноса резонансного излучения в полуограниченной среде. В частности, была решена проблема Милна (задача с источником на бесконечности), а также подробно исследованы многие задачи (стационарные и временные) с плоским источником, когда все величины можно считать зависящими от одной координаты x, перпендикулярной границе раздела среда—вакуум (см., например, [1—7]).

Важным результатом, следующим из этих работ, является то, что ответ всегда может быть выражен через две хорошо изученные функции — ядро интегрального уравнения и решение проблемы Милна. При этом асимптотическое поведение плотности возбужденных атомов известно для любой линии поглощения [5].

Ценность задач, допускающих точное решение, заключается в возможности оценки погрешности различных приближенных методов.

Кроме того, подробное исследование этих задач позволяет сделать некоторые заключения о характере решения в более сложных случаях.

В этом смысле представляет интерес задача о резонансном рассеянии излучения от точечного источника, поскольку она содержит явную неоднородность в плоскости, параллельной поверхности. Настоящая работа посвящена решению этой задачи.

Во втором разделе выводится точная формула, которая подробно исследуется в следующих разделах. Асимптотическое поведение решения, как и в задачах с плоской геометрией, выражается через асимптотику ядра и решение проблемы Милна. Аналогичная задача для рассеяния нейтронов в непоглощающей среде была решена Эллиотом [8].

2. *Формальное решение.* Как известно [1—6], перенос резонансного излучения в однородной среде описывается следующим интегральным уравнением для плотности возбужденных атомов $n(\vec{r})$:

$$n(\vec{r}) = \int K_0(|\vec{r} - \vec{r}'|)\, n(\vec{r}')\, d\vec{r}' + F(\vec{r}). \tag{1}$$

Интегрирование производится по всей среде (в данном случае — по полупространству), функция $F(\vec{r})$ описывает распределение источников и

$$K_0(r) = \frac{\lambda}{4\pi\bar{k}} \int_0^\infty d\nu\, k_\nu^2 \frac{e^{-k_\nu r}}{r^2}. \tag{2}$$

Здесь λ — вероятность выживания фотона при рассеянии, k_ν — нормированный коэффициент поглощения (в центре линии $k_{\nu_0} = 1$),

$$\bar{k} = \int_0^\infty k_\nu d\nu, \quad |\vec{r}| = r.$$

Единицей измерения расстояния является длина поглощения в центре линии, а частоты — характерная ширина линии. Если рассеивающая среда занимает все пространство, уравнение (1) легко решается применением трехмерного преобразования Фурье. В случае полуограниченной среды задача существенно усложняется в силу наличия явной неоднородности по одному направлению (x). Однако в плоскости, параллельной границе, среда остается однородной, что позволяет с помощью преобразования Фурье по y и z свести задачу к хорошо изученной плоской. Заметим вначале, что интегрированием по координатам y, z уравнение (1) переходит в уравнение для плоской геометрии:

$$\bar{n}(x) = \int_0^\infty \bar{K}(|x - x'|)\,\bar{n}(x')\,dx' + \bar{F}(x), \tag{1a}$$

где $\bar{n}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} n(\vec{r})\,dy\,dz$ и аналогично для $\bar{K}(x)$ и $\bar{F}(x)$ (укажем простую связь между ядрами $K_0(x)$ и $\bar{K}(x)$: $K_0(x) = -\frac{1}{2\pi x}\frac{\partial \bar{K}(x)}{\partial x}$).

Резольвентная функция этого уравнения изучена для ядер довольно широкого класса [5] (некоторые сведения собраны в приложении 1 к настоящей статье). Таким образом, количество возбужденных атомов в слое dx ($\bar{n}(x)\,dx$) можно считать известным, и речь идет о нахождении распределения их в этом слое в зависимости от координат y, z. Предположим, что $F(\vec{r}) = F(x, R)$, где $R = \sqrt{y^2 + z^2}$, тогда $n(\vec{r}) = n(x, R)$ и двухмерное преобразование Фурье по y, z сводится к преобразованию Ганкеля.

Применяя его к уравнению (1), получаем:

$$n(x, q) = \int_0^\infty K_0(|x - x'|, q)\,n(x', q)\,dx' + F(x, q), \tag{3}$$

где $n(x, q) = 2\pi \int\limits_0^\infty R I_0(qR)\,n(x, R)\,R\,dR$ и аналогичная формула справедлива для $K_0(|x|, q)$ и $F(x, q)$ ($I_0(qR)$ — функция Бесселя нулевого порядка). Уравнение (3) достаточно решить для положительных q, так как обратное преобразование Ганкеля производится по формуле

$$n(x, R) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty q I_0(qR)\,n(x, q)\,dq.$$

Поскольку уравнение (3) формально эквивалентно уравнению (1а), его решение можно получить обычным образом [1—3, 5, 6]. Выберем для определенности источник в виде δ — функции $(F(\vec{r}) = \delta(\vec{r}))$.

Тогда

$$\overline{n(p,\ q)} = \frac{1}{G^{+}(p,\ q)}, \tag{4}$$

где $\overline{n(p,\ q)}$ — односторонний образ Фурье функции $n(x,\ q)$. При этом $G^{+}(p,q)$ аналитична в верхней полуплоскости p и удовлетворяет функциональному уравнению (1)

$$G^{+}(p,\ q)\, G^{+}(-p,\ q) = G_0(p,\ q), \tag{5}$$

где

$$G_0(p,\ q) \equiv 1 - \overline{K_0(p,\ q)}, \quad \text{а} \quad \overline{K_0(p,\ q)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} K_0(|x|,\ q)\, dx.$$

Таким образом, задача сводится к исследованию аналитических свойств функции $G_0(p,\ q)$.

Заметим, что поскольку $K_0(r)$—сферически симметричная функция, то и $\overline{K_0(p,\ q)}$ зависит только от модуля трехмерного вектора Фурье. Используя это замечание, можно показать, что $\overline{K_0(p,\ q)} = \overline{K(\sqrt{p^2+q^2})}$, где $\overline{K(p)}$ — двухсторонний образ Фурье ядра уравнения плоской геометрии (1а). Необходимые сведения о нем изложены в приложении 1, и мы можем ими воспользоваться. Из них, в частности, следует, что $G_0(p,\ q) = G(\sqrt{p^2+q^2})$ аналитична в плоскости p с разрезом вдоль мнимой оси от $-iq$ до $+iq$ через бесконечность. $G^{+}(p,\ q)$ соответственно аналитична в плоскости p с разрезом от $-iq$ до $-i\infty$ вдоль отрицательной мнимой полуоси. Сводя интеграл обратного преобразования Фурье по p к берегам этого разреза, находим $(p = -is)$:

$$n(x,\ R) = \delta(\vec{r}) + \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^{\infty} qI_0(qR)\, dq \int\limits_q^{\infty} e^{-sx}\, \frac{G^{+}(is,\ q)\, \operatorname{Im} G(\sqrt{q^2-s^2}-0)\, ds}{|G(\sqrt{q^2-s^2})|^2}. \tag{6}$$

Здесь $|G(\sqrt{q^2-s^2})|$ и $\operatorname{Im} G(\sqrt{q^2-s^2}-0)$ соответственно модуль и мнимая часть функции $G(\sqrt{q^2+p^2})$ на разрезе. В следующих разделах мы перейдем к исследованию этого выражения на больших расстояниях от источника.

3. *Асимптотическое поведение вдали от границы.* Рассмотрим вначале случай $x \gg 1$, R произвольно. При этом, как следует из (6), основной вклад в интеграл дают $s, q \ll 1$. Исследуем подынтегральную функцию в этой области.

Как легко видеть, $G(0) = 1 - \lambda$, а из (5) получаем значение $G^+(0, 0)$, равное $\sqrt{1-\lambda}$. Если $\lambda \neq 1$, то при $x \gg 1$ достаточно вычислить следующий интеграл $\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_q^\infty qI_0(qR)\,dq\int\limits_q^\infty e^{-sx}\,\mathrm{Im}\,G(\sqrt{q^2-s^2}-0)ds$, который, как можно показать, совпадает с $K_0(r)$.

Таким образом, при $\lambda \neq 1$, $x \gg 1$

$$n(x, R) \simeq (1-\lambda)^{-3/2}K_0(r), \qquad r = \sqrt{R^2+x^2}, \tag{7}$$

то есть на больших расстояниях от поверхности $n(r)$ является сферически симметричной функцией. Интегрированием по y и z получается асимптотическое выражение решения для плоской геометрии (формула (1.7) приложения I).

Пусть теперь $\lambda = 1$. В этом случае $G(\sqrt{q^2-s^2})$ обращается в нуль в точке $s = q$. Асимптотическое поведение выражения (6) зависит от поведения функции $G(\sqrt{q^2-s^2})$ в малой окрестности точки $s \simeq q \ll 1$.

Во всех исследованных до сих пор задачах теории переноса для $G(p)$ справедливо следующее предельное выражение при $p \to 0$*:

$$G(p) \simeq p^{2\gamma}f(p^2), \quad \lambda = 1, \tag{8}$$

где $f(p^2)$—медленная функция, то есть $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(ts)}{f(t)} = 1$. (Удобство в использовании медленной функции состоит в том, что при нахождении асимптотик ее можно выносить из-под знака операций дифференцирования и интегрирования, действующих на произведение медленной функции со степенной). Укажем, например, что для переноса с упругим рассеянием $\gamma = 1$, $f = 1/3$, а для переноса излучения в линии $\gamma_\text{Л} = 1/4$, $f_\text{Л} = \sqrt{2}/3$ и $\gamma_D = 1/2$, $f_D = \sqrt{\pi}/4(1/2\ln 1/z^2)^{-1/2}$ соответственно для лоренцевой и доплеровой линий. Используя результаты работы [5], можно выразить γ и f через характеристики произвольной линии поглощения.

* На возможность такого подхода нам указал В. В. Иванов.

Так как область аналитичности функции $G(p)$ имеет разрез вдоль мнимой оси, то, продолжая выражение (8) на этот разрез, получим при $s \ll 1$

$$G(is) \simeq e^{i\pi\gamma} G(s), \quad (\gamma \neq 1); \tag{9}$$

здесь s вещественно. Это равенство следует из того, что в основном порядке $f(-s^2) \simeq f(s^2)$.

В формуле (6) осталась еще неизвестной функция $G^+(is, q)$ при $s, q \ll 1$. Используем соотношение (5). Как видно из него, $G^+(is, q)$ можно представить в виде:

$$G^+(is, q) \simeq (s+q)^\gamma \varphi(s, q). \tag{10}$$

При этом $\varphi(s, q)\, \varphi(-s, q) \simeq f(s^2 - q^2)$, откуда следует, в частности, что $\varphi(s, q)$ является медленной функцией от обоих своих аргументов. Учитывая соотношения (9) и (10), получаем из (6)

$$n(x, R) \simeq \frac{\sin \pi\gamma}{2\pi^2} \int\limits_0^\infty q I_0(qR)\, dq \int\limits_q^\infty e^{-sx} \frac{\varphi(s, q)\, ds}{(s-q)^\gamma f(s^2 - q^2)}.$$

Производя замену переменных $s = t_1/x$, $q = t_2/x$, используем медленность функций $\varphi(s, q)$ и $f(s^2 - q^2)$, положив под знаком интеграла $f[1/x^2(t_1^2 - t_2^2)] \simeq f(1/x^2)$ и

$$\varphi\left(\frac{t_1}{x}, \frac{t_2}{x}\right) \simeq \varphi\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{x}\right) = \sqrt{f\left(\frac{1}{x^2}\right)},$$

после чего находим окончательный ответ:

$$n(x, R) \simeq \frac{x^\gamma}{2\pi\Gamma(\gamma)\, r^3} \left[f\left(\frac{1}{x^2}\right) \right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

Здесь $\Gamma(\gamma)$ — гамма-функция, а $r^2 = R^2 + x^2$. (При $\gamma = 1$, $f = 1/3$ (11) переходит в ответ Эллиота [8]).

Сравнивая формулу (11) с формулами (1.8) и (1.10) приложения I, получаем еще две эквивалентные записи асимптотического выражения (11):

$$n(x, R) \simeq \frac{\Pi(x)}{2\pi r^2} \frac{x}{r}, \tag{12}$$

$$n(x, R) = \frac{\gamma S(x)}{2\pi r^3} \tag{13}$$

Здесь $\Pi(x)\,dx$ — число возбужденных атомов в слое dx, $S(x)$ — решение задачи с источником на бесконечности.

Исследуем распределение возбужденных атомов в плоскости $x = \text{const} \gg 1$ в зависимости от $R = \sqrt{y^2 + z^2}$. Введем величину

$\Pi(x, R)\,dx = \left[2\pi \int\limits_0^R n(x, R)\,R\,dR\right] dx$, равную числу частиц в цилиндрическом слое радиуса R и толщины dx. С помощью (12) легко находим, что $\Pi(x, R) = \Pi(x)(1 - x/r)$, то есть плотность частиц на плоскости $x = \text{const}$ пропорциональна телесному углу, под которым виден данный участок плоскости из начала координат. Этот результат универсален, не зависит от типа рассеяния (при отсутствии гибели частиц) и справедлив даже, если частицы вовсе не рассеиваются.

Если $1 - \lambda \ll 1$, формулы (11)—(13) остаются справедливыми, но возникают ограничения на область их применимости. Эти ограничения легко установить из предыдущего вывода:

$$1 - \lambda \ll \frac{f(1/x^2)}{x^{2\gamma}} \sim xK(x) \sim \int\limits_x^\infty K(t)\,dt, \quad x \gg 1.$$

Если использовать понятие длины термализации [1], то можно сказать, что асимптотическое выражение (11) справедливо на расстояниях, много бо́льших длины поглощения в центре линии и много меньших длины термализации.

4. *Асимптотическое поведение вдали от источника.* Перейдем к изучению асимптотического поведения $n(x, R)$ вблизи поверхности на больших расстояниях от источника ($R \gg 1$, $R \gg x$). В этой области возбуждение атомов осуществляется в основном многократно рассеянным излучением, идущим из глубины среды. Эта ситуация аналогична случаю, когда источник помещен внутри среды. Поскольку в задаче переноса резонансного излучения отсутствует характерный размер, можно ожидать, что зависимость от x будет описываться решением для источника, помещенного на бесконечности (проблема Милна), то есть

$$n(x, R) \simeq S(x)\,\psi(R), \tag{14}$$

где $\psi(R)$ — неизвестная функция. В случае переноса нейтронов, например, решение имеет такой вид с функцией $\psi(R) = 1/2\pi R^3$ [8].

Для нахождения $\psi(R)$ воспользуемся тем, что рассматриваемая область $R \gg 1$, x перекрывается с областью $x \gg 1$, где справедливы ранее найденные выражения (7) и (13). Следовательно, при $\lambda \neq 1$ и $R \gg x \gg 1$ формулы (7) и (14) должны переходить друг в друга, откуда при учете (1.9) получаем, что $\psi(R) \simeq K_0(R)/1-\lambda$. Таким образом, вблизи поверхности и вдали от источника имеем

$$n(x, R) \simeq \frac{S(x)}{1-\lambda} K_0(R). \tag{15}$$

Сравнивая (7) и (15) видим, что формула

$$n(x, R) \simeq \frac{S(x)}{1-\lambda} K_0(r) \tag{16}$$

описывает асимптотическое поведение $n(x, R)$ всюду на больших расстояниях от источника $(r = \sqrt{R^2 + x^2} \gg 1)$.

При $\lambda = 1$ из сравнения (13) и (14) непосредственно находим, что $\psi(R) \simeq \gamma/2\pi R^3$, а формула (13) справедлива всюду на больших расстояниях от источника.

Если $1 - \lambda \ll 1$, то на очень больших расстояниях применимо выражение (16), а на промежуточных — (13). Можно определить расстояние, на котором они переходят друг в друга, если поставить между (13) и (16) знак равенства: $K_0(r_T)/1-\lambda = \gamma/2\pi r_T^3$. Нетрудно видеть, что размер, находимый из этого равенства, совпадает с длиной термализации [1]. При $r \ll r_T$ справедлив асимптотический закон (13), а при $r \gg r_T$ — (16). Таким образом, параметр, появляющийся в задаче с точечным источником, совпадает с известным ранее параметром [1] теории переноса резонансного излучения в плоской геометрии.

Более строгий вывод асимптотических выражений в области $R \gg 1$, x производится в приложении II с использованием интегрального представления для функции $G^+(p, q)$.

5. *Излучение на выходе из среды.* Измерение плотности возбужденных атомов в данной точке является очень сложной экспериментальной задачей. Обычно на опыте наблюдают излучение, выходящее из среды. Для облегчения сравнения теории с экспериментом необходимо исследовать спектр и угловую зависимость выходящего излучения и попытаться найти простые закономерности, легко наблюдаемые на опыте.

Характеризуем излучение на выходе из среды частотой (ν) и единичным вектором в направлении луча $e(e_1, e_2, e_3)$. Поскольку вероятность излучения атомом в интервал телесного угла $d\Omega$ и частоты $d\nu$

равна $(\lambda/4\pi)\,k_\nu\,d\nu\,d\Omega$, а вероятность выйти без поглощения равна $\exp(-k_\nu r)$, где r — расстояние от точки среды до данной точки поверхности, то легко получить формулу, связывающую излучение на выходе с плотностью возбужденных атомов внутри среды:

$$I_\nu(\vec{e}, \vec{R}) = \frac{\lambda}{4\pi} k_\nu \int_0^\infty e^{-k_\nu t} n(e_1, t, y - e_2 t, z - e_3 t)\, dt. \tag{17}$$

Здесь обозначения те же, что в формуле (2) и $\vec{R}(y, z)$ — точка поверхности, из которой выходит излучение. Интегрирование в (17) производится вдоль прямой в направлении луча света. Если эта прямая проходит на большом расстоянии от полусферы $|\vec{r}| = 1$, где $|\vec{r}|$ — расстояние до источника, то мы можем при вычислении интеграла использовать для $n(x, R)$ асимптотические выражения вместо точного (6).

В случае $\lambda \neq 1$ имеем

$$I_\nu(\vec{e}, \vec{R}) \simeq \frac{\lambda}{4\pi(1-\lambda)} k_\nu \int_0^\infty e^{-k_\nu t} S(e_1, t)\, K_0\left(\sqrt{t^2 + R^2 - 2t(\vec{R}\cdot\vec{e}_\perp)}\right) dt, \tag{18}$$

где $\vec{e}_\perp(e_2, e_3)$ — проекция вектора $\vec{e}$ на плоскость $x=0$. Пусть $e_1 = \cos\theta$, где θ — угол между направлением вылета и осью x, тогда $\vec{e}_\perp \cdot \vec{R} = R\sin\theta\cdot\cos\varphi$, где φ — угол между $\vec{R}$ и $\vec{e}_\perp$. Перепишем формулу (18) с учетом этого замечания:

$$I_\nu(\theta, \varphi, R) = \frac{\lambda}{4\pi(1-\lambda)} k_\nu \int_0^\infty e^{-k_\nu t} S(t\cos\theta) \times \\ \times K_0\left(\sqrt{t^2 + R^2 - 2tR\sin\theta\cdot\cos\varphi}\right) dt. \tag{19}$$

Последняя формула применима при $1 - \sin^2\theta\cdot\cos^2\varphi \gg 1/R^2$ (это условие того, что линия интегрирования проходит далеко от начала координат).

Функция $K_0\left(\sqrt{t^2 + R^2 - 2tR\sin\theta\cdot\cos\varphi}\right)$ в подынтегральном выражении изменяется существенно на расстояниях $\sim R$, тогда как экспонента — на расстояниях $\sim 1/k_\nu$. При $k_\nu R \gg 1$ можно пренебречь изменением $K_0(\sqrt{t^2+R^2-2tR\sin\theta\cdot\cos\varphi})$ в существенной области интегрирования, в результате чего получаем:

$$I_\nu(\theta, \varphi, R) \simeq \frac{K_0(R)}{1-\lambda} I^s\left(\frac{k_\nu}{\cos\theta}\right) \tag{20}$$

(предполагалось, что $R\cos\theta \gg 1$), $I^s(k_\nu/\cos\theta)$ — описывает выход излучения в случае, когда источник помещен на бесконечности (см. приложение I). Как видим, в центре линии излучения появляется впадина. Пусть теперь $k_\nu R \ll 1$, то есть рассмотрим далекие крылья линии излучения. В этом случае можно пренебречь изменением экспоненты в существенной области интегрирования ($\sim R$) и воспользоваться асимптотическим выражением и для $S(t\cos\theta)$, и для

$$K_0(\sqrt{t^2+R^2-2tR\sin\theta\cdot\cos\varphi}).$$

Последнее получается применением формулы $K_0(r) = -1/2\pi r\, \partial K(r)/\partial r$ и формулы (1.5) приложения I.

В результате находим:

$$\begin{aligned} I_\nu(\theta, \varphi, R) \simeq k_\nu \cdot \frac{\lambda\cdot 2^\gamma\,\Gamma(2+\gamma)\,R\,K_0(R)}{4\pi(1-\lambda)^{3/2}(1+\gamma)}\,|1-\sin\theta\cdot\cos\varphi|^{\frac{1+\gamma}{2}} \times \\ \times \left|P_{-1-\gamma}^{-1-\gamma}(-\sin\theta\cdot\cos\varphi)\right|, \end{aligned} \tag{21}$$

где $P_{-1-\gamma}^{-1-\gamma}(-\sin\theta\cdot\cos\varphi)$ — шаровая функция первого рода. Угловая зависимость в этом случае, как и следовало ожидать, описывается довольно сложной функцией. Края линии излучения оказываются неискаженными, такими же, как для отдельного атома ($\sim k_\nu$).

Пусть теперь $\lambda = 1$. В этом случае с использованием (13) находим

$$I_\nu(\theta, \varphi, R) \simeq \frac{\gamma k_\nu}{8\pi^2}\int\limits_0^\infty e^{-k_\nu t}\frac{S(t\cos\theta)\,dt}{(t^2+R^2-2tR\sin\theta\cdot\cos\varphi)^{3/2}}. \tag{22}$$

Исследование этого выражения полностью аналогично предыдущему. В результате получаем:

$$I_\nu(\theta, \varphi, R) \simeq \frac{\gamma}{2\pi R^3} I^s\left(\frac{k_\nu}{\cos\theta}\right), \quad k_\nu R \gg 1, \quad R\cos\theta \gg 1, \tag{23}$$

$$\begin{aligned} I_\nu(\theta, \varphi, R) \simeq k_\nu \cdot \frac{\Gamma(1-\gamma)}{8\pi}\cdot\frac{R^{\gamma-2}}{\sqrt{f(1/R^2)}}(\cos\theta)^\gamma(1-\sin\theta\cdot\cos\varphi)^{3/2} \times \\ \times \left|\frac{dP_{\gamma-1}(\cos\xi)}{d\xi}\right|_{\cos\xi=-\sin\theta\cdot\cos\varphi}; \quad k_\nu R \ll 1, \quad R\cos\theta \gg 1. \end{aligned} \tag{24}$$

Здесь $P_{1-\gamma}(\cos\xi)$ — шаровая функция первого рода, а $I^s(k_\nu/\cos\theta)$ определяется формулой (1.11) приложения I. В центре линии имеется провал, края линии спадают пропорционально k_ν. Форма линии—характерная для многократного рассеяния [3]—двугорбая с положением горбов на частотах, определяемых из соотношения $k_\nu R \sim 1$.

При $1-\lambda \ll 1$ существуют две области ($r \gg r_T$, $r \ll r_T$), в которых асимптотики имеют разный вид. Область $r \sim r_T$ не описывается какими-либо простыми формулами. Поэтому, если эта область дает значительный вклад в излучение, простых выражений, подобных (20)—(24) написать уже не удается, следует прибегать к численному счету.

6. *Заключение.* Исследование, произведенное в предыдущих разделах, показало наличие простых и общих закономерностей в задаче о переносе резонансного излучения от точечного источника. Из полученных нами формул (при $x \gg 1$) следуют асимптотические формулы для плоской геометрии. На больших расстояниях от источника решение выражается через решение проблемы Милна и ядро интегрального уравнения (1). В отсутствие гибели частиц ($\lambda = 1$) распределение возбужденных атомов в плоскости $x = \text{const} \gg 1$ оказывается не зависящим от характера рассеяния (от ядра $K_0(r)$). Число возбужденных атомов на участке плоскости пропорционально телесному углу, под которым виден этот участок из начала координат. Асимптотическое поведение плотности возбужденных атомов зависит от одного параметра—длины термализации (r_T). Форма линии выходящего излучения имеет двугорбый вид с провалом в центре и максимумами на частотах, для которых $k_\nu R \sim 1$ при $R \gg 1$, R — расстояние от источника до точки поверхности, из которой выходит излучение. Вблизи центра линии зависимость от частоты и углов такая же, как в случае источника на бесконечности. Края линии ($k_\nu R \ll 1$) пропорциональны k_ν. Выходящее излучение на этих частотах обладает довольно сложной угловой зависимостью.

Приложение I

Приведем для справок в наших обозначениях основные формулы теории переноса резонансного излучения в полупространстве при наличии плоских источников. Исходное интегральное уравнение в этом случае имеет вид (см. Ia):

$$\tilde{n}(x) = \int\limits_0^\infty K(|x - x'|)\,\tilde{n}(x')\,dx' + \delta(x). \qquad (I.1)$$

Различными способами [1—3, 5, 6] можно получить для одностороннего образа Фурье решения $\tilde{n}(x)$ следующее соотношение:

$$\overline{\tilde{n}(p)} = \frac{1}{G^+(p)} = \left(H\left(\frac{1}{p}\right)\right). \qquad (I.2)$$

В скобках указано обозначение, употребляемое обычно группой ленинградских теоретиков [1—3, 6, 7]. Функция $G^+(p)$ является аналитической в верхней полуплоскости и удовлетворяет уравнению

$$G^+(p)\,G^+(-p) = G(p), \qquad (I.3)$$

где $G(p) = 1 - \overline{K(p)} = 1 - \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} K(|x|)\,dx$, определяется этим равенством для действительных p и аналитически продолжается на комплексные p. Ввиду четности $G(p)$ ее достаточно продолжить в правую полуплоскость. Имеющиеся точки ветвления удобно соединить разрезом вдоль мнимой оси. Из-за четности $G(p)$ при этом оказывается вырезанной вся мнимая ось. При $\lambda \neq 1$ $G(p) \neq 0$ во всей плоскости p. При $\lambda = 1$ $G(p)$ обращается в нуль в одной точке $p = 0$. Во всех исследованных до настоящего времени задачах переноса для $G(p)$ при $|p| \ll 1$ справедливо следующее предельное выражение:

$$G(p) \simeq 1 - \lambda + p^{2\gamma} f(p^2), \qquad (I.4)$$

где $0 < \gamma \leqslant 1$, а $f(p^2)$ — медленная функция (такая, что $\lim\limits_{t \to 0} f(ts)/f(t) = 1$). Формуле (1.4) соответствует асимптотическое поведение ядра

$$K(x) = \frac{\Gamma(1 + 2\gamma)\sin\pi\gamma}{\pi}\,\frac{f(1/x^2)}{x^{1+2\gamma}}, \quad (\gamma \neq 1), \qquad (I.5)$$

($\Gamma(1 + 2\gamma)$ — гамма-функция). Как следует из свойств $G(p)$, $G^+(p)$ аналитична в плоскости p с вырезом вдоль отрицательной мнимой полуоси. Сводя к берегам этого разреза интеграл обратного преобразования Фурье от функции $1/G^+(p)$, получим

$$\tilde{n}(x) \equiv \delta(x) + \Pi(x) = \delta(x) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-sx}\,\frac{G^+(is)\,I_m\,G(-is-0)\,ds}{|G(-is)|^2}. \qquad (I.6)$$

($\Pi(x)$ — так называемая резольвентная функция [2, 3, 5, 6]). Здесь $i\,\mathrm{Im}\,G(-is-0) = 1/2\,[G(-is-0) - G(-is+0)]$ — полуразность значений функции $G(p)$ на берегах разреза $p = -is$. Из формулы (1.6) с использованием (1.4) при $x \gg 1$ получаем, что

$$\tilde{n}(x) = \Pi(x) \simeq (1-\lambda)^{-3/2} K(x), \quad \lambda \neq 1, \tag{I.7}$$

$$\tilde{n}(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \frac{x^{\gamma-1}}{\sqrt{f(1/x^2)}}, \quad \lambda = 1. \tag{I.8}$$

(В последней формуле $\Gamma(\gamma)$ — гамма-функция). Использовано также соотношение $G^{+}(is) \simeq \sqrt{G(s)}$, справедливое в главном порядке при $s \ll 1$. Решение проблемы Милна (задачи с источником на бесконечности) выражается через $\tilde{n}(x)$ следующим образом [5, 6]:

$$S(x) = 1 + \int_0^x \Pi(t)\,dt = \int_0^x \tilde{n}(t)\,dt,$$

откуда при $x \gg 1$ имеем:

$$S(x) \simeq (1-\lambda)^{-1/2} \left(1 - \frac{\int_x^\infty K(t)\,dt}{1-\lambda}\right), \quad \lambda \neq 1, \tag{I.9}$$

$$S(x) \simeq \frac{1}{\gamma\Gamma(\gamma)} \frac{x^{\gamma}}{\sqrt{f(1/x^2)}}, \quad \lambda = 1. \tag{I.10}$$

(Для образа Фурье, очевидно, справедливо равенство

$$\overline{S(p)} = \frac{i}{pG^{+}(p)}\Biggr).$$

Количество выходящего излучения легко выражается через плотность возбужденных атомов [3, 5]:

$$I_\nu(\mu) = \frac{\lambda k_\nu}{4\pi\mu} \int_0^\infty e^{-k_\nu x/\mu}\, \tilde{n}(x)\,dx,$$

где $\mu = \cos\theta$ задает направление выхода излучения. $I_\nu(\mu)$ — плотность выходящего излучения в зависимости от частоты и угла выхода (в остальном обозначения как в формуле (2) текста статьи). Если источник находится на бесконечности (проблема Милна), получаем

$$I_\nu(\mu) \equiv I^s\left(\frac{k_\nu}{\mu}\right) = \frac{\lambda}{4\pi}\,\frac{1}{G^+\left(i\,\dfrac{k_\nu}{\mu}\right)}. \tag{I.11}$$

Поскольку $G^+(is)$ является монотонной функцией при действительных $s > 0$, обращается в $\sqrt{1-\lambda}$ при $s = 0$ и в 1 при $s \to \infty$, то линия излучения будет иметь впадину в центре ($k_\nu = 1$), а на крыльях ($k_\nu \to 0$) плотность выходящего излучения стремится к величине $\lambda/4\pi(1-\lambda)^{-1/2}$.

Приложение II

Как следует из формулы обращения преобразования Фурье

$$n(x, R) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^\infty qI_0(qR)\,dq \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx}\,\frac{1}{G^+(p, q)}\,dp, \tag{II.1}$$

при $R \gg 1$, x главный вклад в интеграл дает область $q \ll 1$, $|p|$. Исследуем $G^+(p, q)$ в этой области. Воспользуемся хорошо известным интегральным представлением [6], обобщенным на случай $q \neq 0$:

$$\ln G^+(ip, q) = \frac{p}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\ln G(\sqrt{z^2+q^2})}{z^2+p^2}\,dz. \tag{II.2}$$

Вычислим $\dfrac{\partial \ln G^+(ip, q)}{\partial q}$ при $q \ll 1$, $|p|$:

$$\frac{\partial \ln G^+(ip, q)}{\partial q} = \frac{q}{\pi p}\int\limits_0^\infty \frac{G'(\sqrt{z^2+p^2})}{G(\sqrt{z^2+q^2})}\,\frac{dz}{(z^2+p^2)(z^2+q^2)^{1/2}},$$

$$\left(G'(p) \equiv \frac{dG(p)}{dp}\right).$$

После замены переменного $z = qt$ получаем:

$$\frac{\partial \ln G^+(ip, q)}{\partial q} = \frac{q}{\pi p}\int\limits_0^\infty \frac{G'(q\sqrt{1+t^2})}{G(q\sqrt{1+t^2})}\,\frac{dt}{[1+(qt/p)^2](1+t^2)^{1/2}}. \tag{II.3}$$

При $q=0$ интеграл в (II.3) расходится. Поэтому для вычисления его при малых q можно воспользоваться выражением (I.4) для функции $G(q\sqrt{1+t^2})$ (в главном порядке по q):

$$G(q\sqrt{1+t^2}) \simeq 1-\lambda+q^{2\gamma}f(q^2)(1+t^2)^{\gamma}. \tag{II.4}$$

(Учтено, что $f(q^2)$ — медленная функция).

При $\lambda=1$ из (II.3) с учетом (II.4) легко получаем

$$\left.\frac{\partial \ln G^+(ip,q)}{\partial q}\right|_{q=0}=\frac{\gamma}{p},$$

откуда следует, что при $q\ll 1$, $|p|$ $G^+(p,q)\simeq G^+(p)(1+\gamma q/-ip)$. Подставляя это выражение в (II.1), находим

$$n(x,R)\simeq\frac{\gamma S(x)}{2\pi R^3},$$

что доказывает полученный в тексте вывод о применимости формулы (13) всюду при $r=\sqrt{R^2+x^2}\gg 1$.

При $\lambda\neq 1$ вычисление интеграла в (II.3) приводит к формуле

$$\frac{\partial \ln G^+(ip,q)}{\partial q}\simeq\frac{\gamma\Gamma(1/2-\gamma)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1-\gamma)}\cdot\frac{q^{2\gamma}f(q^2)}{(1-\lambda)p},$$

откуда получается

$$G^+(p,q)\simeq G^+(p)\left[1+\frac{i\gamma\Gamma(1/2-\gamma)}{\sqrt{\pi}\,(1+2\gamma)\Gamma(1-\gamma)}\cdot\frac{q^{1+2\gamma}f(q^2)}{(1-\lambda)p}\right]. \tag{II.5}$$

После вычисления интеграла в (II.1) при $R\gg 1$ для $n(x,R)$ находим выражение, совпадающее с формулой (15) текста:

$$n(x,R)\simeq\frac{S(x)}{1-\lambda}\cdot K_0(R). \tag{II.6}$$

Отметим, что формула (II.5) справедлива лишь при $0<\gamma<1/2$, однако можно ожидать, что окончательный ответ (II.6) остается справедливым при $0<\gamma<1$. Это следует из формул (1.5) и (1.9), с помощью которых легко убедиться, что при $x\gg 1$ и $R\gg 1$ $S(x)$ и $K_0(R)$, рассматриваемые как функции γ, регулярны в круге $|\gamma|<1$.

Институт атомной энергии
им. Курчатова

THE RESONANCE LINE RADIATION TRANSFER FROM POINT SOURCE IN SEMI-INFINITE MEDIUM

Y. Y. ABRAMOV, A. P. NAPARTOVICH

The case is considered when the point source is situated on the boundary of the halfspace. The complete redistribution assumption is used. The continuous absorption is neglected. Quite simple expressions are found for asymptotic behaviour of the degree of atom excitation on large distances from the source.

The spectral line of emergent radiation has two maximums located on frequencies determined by the equality $k_\nu R \sim 1$, where k_ν is the absorption coefficient and R is the distance from the origin.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория звездных спектров, Наука, М., 1966.
2. *В. В. Иванов*, Уч. зап. ЛГУ, Труды астрон. обсерв., 22, 44, 1965.
3. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.
4. *Л. М. Биберман*, ЖЭТФ, 17, 416, 1947.
5. *Ю. Ю. Абрамов, А. М. Дыхне, А. П. Напартович*, Астрофизика, 3, 459, 1967.
6. *В. В. Иванов*, Астрон. ж., 39, 1020, 1962.
7. *Д. И. Нагирнер*, Астрофизика 5, 31, 1969.
8. *J. P. Elliot*, Proc. R. Soc., 228 A, 424, 1955.