НЕСТАЦИОНАРНОЕ ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНЫХ СРЕДАХ

Д. И. НАГИРНЕР

Поступила 5 мая 1968

Рассматривается нестационарное поле излучения в линии в стационарных бесконечной или полубесконечной средах. Считается, что однократное рассеяние происходит без изменения частоты или с полным перераспределением по частоте. Неизотропность рассеяния, а также конечность скорости света не учитываются, но принято во внимание поглощение в непрерывном спектре. Найдены точные выражения для резольвент основных интегральных уравнений и для интенсивности выходящего излучения. Из точных формул выведены асимптотики, отражающие поведение поля излучения в крыле линии и степени возбуждения атомов на далеких расстояниях от источников излучения и через большие промежутки времени после их действия.

1. *Введение.* Обычно в астрофизике изучаются процессы рассеяния, при которых оптические свойства среды, где распространяется излучение, и источники этого излучения можно считать стационарными. Но встречаются случаи, когда они меняются за время, сравнимое со временем установления лучистого равновесия, и тогда необходимо решать нестационарную задачу рассеяния. Мы не будем касаться рассеяния в изменяющейся со временем среде, в исследовании которого сделаны пока только первые шаги, то есть ограничимся рассмотрением нестационарного поля излучения в стационарной среде.

Изучение нестационарного поля излучения современными методами теории переноса было начато в работах В. В. Соболева [1, 2]. Им было подробно исследовано нестационарное монохроматическое рассеяние в одномерной среде. При этом был применен вероятностный метод, предложенный им ранее. Результаты В. В. Соболева были обобщены И. Н. Мининым [3]. Им же получены решения некоторых частных задач о свечении полубесконечного плоского слоя [4].

Математические вопросы, связанные с уравнениями нестационарной теории монохроматического рассеяния (спектр, полнота собственных функций), рассмотрены в книге Винга [5]. В книге [6] предлагается метод решения нестационарных задач путем нахождения преобразования Лапласа искомым функций и численного обращения его, а также приводится большой численный материал. В работе [7] численно найдены распределения, характеризующие распывание по времени выходящего из плоского слоя излучения, когда на границу перпендикулярно падает импульс параллельных лучей. В [6] и [7] рассматривалось рассеяние без изменения частоты, причем в [7] считалось, что квант все время проводит в пути, а рассеяние происходит мгновенно.

В последние годы большое распространение получил метод Кейса [8] решения задач переноса. Этим методом была решена нестационарная задача о диффузном отражении при монохроматическом рассеянии в трехмерной плоскопараллельной среде. Кушчер и Цвайфель [9] нашли представление в виде контурного интеграла для функции источника, а также выражение для интенсивности выходящего излучения и получили асимптотики для больших времен.

Теории нестационарного переноса резонансного излучения посвящено всего несколько работ. Холстейн [10] нашел асимптотическое поведение при больших временах поля излучения в плоском слое большой оптической толщины. В этой работе было сделано предположение о полном перераспределении по частоте при рассеянии. При том же предположении Б. А. Векленко [11] было найдено точное решение задачи о вспыхивающем точечном источнике в бесконечной среде, а В. В. Ивановым [12] о высвечивании равномерно возбужденной в начальный момент бесконечной среды. Недавно Ю. Ю. Абрамов и А. П. Напартович [13] изучили асимптотические свойства поля излучения в линии в бесконечной и полубесконечной средах и дали интересную физическую интерпретацию результатов.

В настоящей статье также рассматривается нестационарный перенос излучения в бесконечной и полубесконечной средах. Рассеяние может быть как монохроматическим, так и с полным перераспределением по частоте в линии. При этом при рассеянии в линии принято во внимание поглощение и в непрерывном спектре. Считается, что квант все время проводит в поглощенном состоянии, пролетая путь между двумя рассеяниями мгновенно. После постановки задачи следует несколько пунктов, имеющих чисто математический характер. В них находятся точные решения интегральных уравнений задачи. Затем получаются результаты, относящиеся непосредственно к нестационарному переносу излучения.

ционарному рассеянию. Основное внимание уделено выводу из точных решений различных асимптотик. При этом используются терминология и обозначения, принятые в работах ленинградской группы теоретиков-астрофизиков. Для облегчения чтения этой статьи полезно ознакомиться со статьей автора [14].

2. *Постановка задачи.* Пусть в бесконечной или полубесконечной плоскопараллельной среде распространяется излучение в изолированной линии, которая возникает при переходах между уровнями атомов одного сорта. Атомы имеют лишь эти два уровня и континуум. В среде имеются также другие частицы, ответственные за непрерывное поглощение, не зависящее от частоты в пределах рассматриваемой линии.

Пусть геометрия среды и плотность вещества неизменны. Напротив, мощность источников, то есть количество энергии, излучаемой атомами, возбужденными каким-нибудь посторонним агентом (внешним облучением, электронным ударом), изменяется со временем известным образом.

Вероятность, что квант, поглощенный в момент $t = 0$, излучится в момент между t и $t + dt$, будем считать равной $e^{-\frac{t}{t_1}} dt/t_1$. В t_1 включено влияние столкновений. Мы рассмотрим лишь случай, когда время пролета кванта любой частоты в линии между рассеяниями пренебрежимо мало по сравнению с t_1 . Положим $t_1 = 1$, то есть измеряем время в единицах среднего времени, проводимого квантом в поглощенном состоянии.

Оптические характеристики среды считаются заданными. Требуется рассчитать поле излучения и степень возбуждения в среде, а для полубесконечной среды найти выходящее излучение. При решении поставленной задачи достаточно рассмотреть лишь источники в линии, то есть такие, распределение мощности которых по частоте пропорционально коэффициенту поглощения в линии. Если имеются источники каких-либо других видов, то, учтя их один раз непосредственно, то есть сделав одну итерацию, мы придем к указанному простейшему случаю. Основными в стационарной теории являются задачи о диффузном отражении и о светящейся плоскости [2]. Им соответствуют временные задачи о падающем на границу полубесконечной среды потоке параллельных лучей, имеющем характер импульса, и о вспыхивающей плоскости.

Пусть на полубесконечную среду падает параллельный поток излучения в некоторой безразмерной частоте x_0 под углом $\arcs \cos \mu_0$

к нормали. Распределение его по времени пропорционально $\delta(t)$ (δ — функции). Примем, что полная мощность падающего на единичную перпендикулярную площадку излучения равна 1. Тогда задача сводится к следующему уравнению (мы пишем все аргументы):

$$S(\tau, \mu_0, x_0, t, \lambda, \beta) = \frac{\lambda}{4\pi} A a(x_0) e^{-\frac{\beta + \alpha(x_0)}{\mu_0} \tau - t} + \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty K(|\tau - \tau'|, \beta) d\tau' \int_0^t e^{-t'} S(\tau', \mu_0, x_0, t - t', \lambda, \beta) dt'. \quad (1)$$

Здесь использованы обычные обозначения (см., например, [14]); τ — оптическая глубина в центре линии, $\alpha(x)$ — контур коэффициента поглощения, причем $\alpha(0) = 1$, $A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) dx = 1$, λ — вероятность выживания кванта при рассеянии, β — доля непрерывного поглощения от поглощения в центре линии. Наконец,

$$K(\tau, \beta) = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) E_1[\tau(\beta + \alpha(x))] dx, \quad (2)$$

а $S(\tau, \mu_0, x_0, t, \lambda, \beta)$ — функция источников задачи. В силу обычного принципа взаимности эта величина совпадает с вероятностью выхода кванта, введенной В. В. Соболевым [15, 2]. Именно, $S(\tau, \mu, x, t, \lambda, \beta) \times \times dt 2\pi d\mu dx$ есть вероятность того, что квант, поглощенный на глубине τ в начальный момент, выйдет затем из среды в момент времени от t до $t + dt$, имея частоту в пределах от x до $x + dx$, внутри телесного угла $2\pi d\mu$ около направлений, образующих угол $\arcs \cos \mu$ с нормалью. Положим

$$S(\tau, \mu, x, t, \lambda, \beta) = A a(x) p\left(\tau, \frac{\mu}{\beta + \alpha(x)}, t, \lambda, \beta\right). \quad (3)$$

Функция $p(\tau, z, t, \lambda, \beta)$ удовлетворяет более простому уравнению

$$p(\tau, z, t, \lambda, \beta) = \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau}{z} - t} + \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty K(|\tau - \tau'|, \beta) d\tau' \int_0^t e^{-t'} p(\tau', z, t - t', \lambda, \beta) dt'. \quad (4)$$

Важную роль играет также задача о распространении излучения, если в начальный момент равномерно возбуждаются атомы на плос-

кости $\tau = 0$. Обозначим соответствующие функции источников через $\Phi_{\infty}(\tau, t, \lambda, \beta)$ для бесконечной среды и $\Phi(\tau, t, \lambda, \beta)$ для полубесконечной. Они характеризуют происходящее со временем изменение степени возбуждения атомов в среде. Легко видеть, что $\Phi(\tau, t, \lambda, \beta)$ связана с вероятностью выхода кванта из среды так же, как соответствующие стационарные функции, а именно

$$\Phi(\tau, t, \lambda, \beta) = 2\pi A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) dx \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} p\left(\tau, \frac{\mu}{\beta + \alpha(x)}, t, \lambda, \beta\right). \quad (5)$$

Функция $\Phi(\tau, t, \lambda, \beta)$ удовлетворяет уравнению (4) со свободным членом $(\lambda/2) K(\tau, \beta)e^{-t}$. Ниже мы покажем, как, зная функцию Φ , найти резольвенту уравнения (4). Для случая бесконечной среды резольвентная функция $\Phi_{\infty}(\tau, t, \lambda, \beta)$ также удовлетворяет уравнению вида (4), но со свободным членом $(\lambda/2) K(|\tau|, \beta)e^{-t}$, а интеграл по τ' берется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Все эти уравнения легко получить из вероятностных соображений, как и в стационарном случае. Отметим, что монохроматическое рассеяние является частным случаем. Этот случай получается при прямоугольном контуре коэффициента поглощения. При этом можно считать $\beta = 0$, так как учет непрерывного поглощения ведет лишь к изменению масштаба оптических глубин.

3. *Метод решения основных уравнений.* Рассмотрим следующее интегральное уравнение:

$$S(\tau, t) = g(\tau, t) + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) d\tau' \int_{-\infty}^t e^{-(t-t')} S(\tau', t') dt'. \quad (6)$$

Здесь $g(\tau, t)$ — известная, а $S(\tau, t)$ — искомая функции. В задачах теории переноса $K(\tau)$ определяется формулой (2), а $g(\tau, t)$ характеризует полную мощность источников в линии на глубине τ в момент t . Сейчас мы не будем предполагать какого-либо конкретного вида для $K(\tau)$. В связи с этим в разделах 3—6 мы не будем писать аргумента β . Предположим лишь, что ядро $K(\tau)$ может быть представлено в виде суперпозиции экспонент

$$K(\tau) = \int_a^b A(y) e^{-y\tau} dy, \quad (7)$$

где $0 \leq a < b \leq +\infty$, $A(y) \geq 0$ и удовлетворяет условию Гельдера в (a, b) , а

$$\int_a^b \frac{A(y)}{y} dy \leq 1. \quad (8)$$

Таким образом, мы рассматриваем уравнения более общие, чем сформулированные в разделе 2. Тем не менее мы будем по-прежнему придерживаться терминологии теории переноса.

Для нахождения решения (6) изучим частный случай его (здесь $t \geq 0$)

$$\Phi(\tau, t, \lambda) = \frac{\lambda}{2} K(\tau) e^{-t} + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) d\tau' \int_0^t e^{-(t-t')} \Phi(\tau', t', \lambda) dt'. \quad (9)$$

Обозначим

$$\bar{\Phi}(\tau, s, \lambda) = \int_0^{\infty} e^{-ts} \Phi(\tau, t, \lambda) dt. \quad (10)$$

В дальнейшем все преобразования Лапласа по времени будем отмечать чертой сверху. Применяя это преобразование к уравнению (9), находим

$$\bar{\Phi}(\tau, s, \lambda) = \Phi\left(\tau, \frac{\lambda}{1+s}\right), \quad (11)$$

где $\Phi(\tau, \lambda)$ — ограниченное решение уравнения

$$\Phi(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{2} K(\tau) + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) \Phi(\tau', \lambda) d\tau'. \quad (12)$$

Функция $\Phi(\tau, \lambda)$ имеет большое значение в теории. Через нее выражается резольвента уравнения (12), то есть может быть найдено решение стационарного уравнения вида (12) с произвольным свободным членом [16]. Аналогичную роль играет $\Phi(\tau, t, \lambda)$ для (6).

Тот факт, что преобразования Лапласа основных функций временной задачи получаются из соответствующих функций стационарной путем замены λ на $\lambda/(1+s)$, широко известен в физике и астрофизике [11, 3]. Из него следует, что все соотношения между стационарными функциями могут быть переписаны и для нестационарных, если использовать известные теоремы из теории преобразования Лапласа. В частности, с помощью теоремы о свертке из выражения резольвенты уравнения (12) через $\Phi(\tau, \lambda)$ [16] легко получить, что резольвента (6) $\Gamma(\tau, \tau', t - t', \lambda)$ выражается через функцию $\Phi(\tau, t, \lambda)$ следующим образом:

$$\Gamma(\tau, \tau', t, \lambda) = \Phi(|\tau - \tau'|, t, \lambda) + \int_0^{\min\{\tau, \tau'\}} d\tau'' \int_0^t \Phi(\tau'' + \tau, t', \lambda) \Phi(\tau'' + \tau', t - t', \lambda) dt'. \quad (13)$$

Другой важной величиной в стационарной теории является H -функция. Она по существу есть преобразование Лапласа от $\Phi(\tau, \lambda)$ по τ [16]:

$$H(z, \lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{z}{\tau}} \Phi(\tau, \lambda) d\tau + 1. \quad (14)$$

$H(z, \lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$H\left(\frac{1}{y}, \lambda\right) = 1 + \frac{\lambda}{2} H\left(\frac{1}{y}, \lambda\right) \int_a^b \frac{A(y') H(1/y', \lambda)}{y + y'} dy'. \quad (15)$$

Это уравнение имеет решение [17]

$$H(z, \lambda) = \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \ln[1 - \lambda V(u)] \frac{z du}{1 + z^2 u^2} \right\}, \quad (16)$$

где

$$V(u) = \int_0^{\infty} K(\tau) \cos \tau u d\tau = \int_a^b A(y) \frac{y dy}{y^2 + u^2}. \quad (17)$$

(Функция $V(u)$ является четной, поэтому мы впредь будем считать $u \geq 0$). Через $H(z, \lambda)$ выражается интенсивность выходящего излучения в стационарной задаче о диффузном отражении [16, 17]. Соответствующую временную H -функцию обозначим $H(z, t, \lambda)$.

Нестационарная функция $\Phi_{\infty}(\tau, t, \lambda)$ связана с $\Phi_{\infty}(\tau, \lambda)$ точно так же, как и в случае полубесконечной среды. Эти функции являются ограниченными решениями уравнений (6) и (12), но с интегрированием по τ' по промежутку $(-\infty, +\infty)$. Резольвентой для бесконечной среды служит $\Phi_{\infty}(|\tau - \tau'|, t - t', \lambda)$.

Для нахождения временных функций мы воспользуемся выражениями для стационарных и обратим преобразования Лапласа по времени. Заметим, что достаточно найти искомые функции при $\lambda = 1$ [9]. Действительно, выражение $\lambda/(1 + s)$ можно преобразовать к виду

$\frac{1}{1 + \frac{s+1-\lambda}{\lambda}}$. Отсюда с помощью свойств преобразования Лапласа

находим, что, например,

$$\Phi(\tau, t, \lambda) = \lambda e^{-(1-\lambda)t} \Phi(\tau, \lambda t, 1). \quad (18)$$

Для рассеяния света это соотношение может быть получено и из физических соображений.

4. *Нахождение функции $H(z, t, \lambda)$.* Для обращения преобразования Лапласа необходимо исследовать особенности аналитической функции $H(z, \lambda)$ на комплексной плоскости λ , считая $z > 0$. Преобразуем выражение (16), интегрируя по частям, к виду

$$\ln H(z, \lambda) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{V'(u) du}{\frac{1}{\lambda} - V(u)} \operatorname{arc} \operatorname{tg} zu. \quad (19)$$

С помощью (19) функция $H(z, \lambda)$ может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость λ . Правая часть (19) представляет собой интеграл типа Коши от $1/\lambda$. Он регулярен при всех λ , за исключением тех, для которых $1/\lambda = V(u)$, где $u \in [0, +\infty)$. Из предположений относительно функции $A(y)$ легко видеть, что $V(u)$ строго убывает [14] от значения $V(0)$, равного левой части (8), до 0 при $u = +\infty$. Таким образом, $H(z, \lambda)$ имеет линию ветвления по λ —часть вещественной оси $[1/V(0), +\infty)$. Теперь найдем поведение этой функции вблизи линии ветвления. Сделаем в (19) подстановку $\zeta = V(u)$, обратную функцию обозначим $u = \Lambda(\zeta)$. Тогда

$$\ln H(z, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{V(0)} \frac{d\zeta}{\frac{1}{\lambda} - \zeta} \operatorname{arc} \operatorname{tg} z\Lambda(\zeta). \quad (20)$$

Пользуясь формулами для граничных значений интеграла типа Коши, находим при $\lambda \in [1/V(0), +\infty)$

$$\begin{aligned} \ln H(z, \lambda \pm i0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{V(0)} \frac{d\zeta}{\frac{1}{\lambda} - \zeta \mp i0} \operatorname{arc} \operatorname{tg} z\Lambda(\zeta) = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \ln |1 - \lambda V(u)| \frac{z du}{1 + z^2 u^2} \pm i \operatorname{arc} \operatorname{tg} z\Lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right). \end{aligned} \quad (21)$$

В результате мы получаем основные формулы: при $u \in [0, +\infty)$

$$H\left(z, \frac{1}{V(u)} \pm i0\right) = H\left(z, \frac{1}{V(u)}\right) (1 \pm izu), \quad (22)$$

где

$$H\left(z, \frac{1}{V(u)}\right) = \exp\left\{-\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \ln\left|1 - \frac{V(u')}{V(u)}\right| \frac{zdu'}{1+z^2u'^2}\right\} \frac{1}{\sqrt{1+z^2u^2}}. \quad (23)$$

Теперь нам известны особенности по s преобразования Лапласа $\bar{H}(z, s, \lambda) = H(z, \lambda/(1+s))$ — линия ветвления $[-1, -1 + \lambda V(0)]$ — и поведение его вблизи нее. Обходя линию ветвления при обращении преобразования Лапласа сверху и снизу и учитывая, что $H(z, 0) = 1$, находим

$$H(z, t, \lambda) = \delta(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{-1+\lambda V(0)} e^{ts} \left[H\left(z, \frac{\lambda}{1+s-i0}\right) - H\left(z, \frac{\lambda}{1+s+i0}\right) \right] ds. \quad (24)$$

Сделаем замену $s = -[1 - \lambda V(u)]$ и воспользуемся (22). Тогда получим искомую формулу

$$H(z, t, \lambda) = \delta(t) + \frac{\lambda}{\pi} z \int_0^{\infty} e^{-[1-\lambda V(u)]t} H\left(z, \frac{1}{V(u)}\right) [-uV'(u)] du. \quad (25)$$

Как уже говорилось, достаточно найти

$$H(z, t, 1) = \delta(t) + \frac{z}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-[1-V(u)]t} H\left(z, \frac{1}{V(u)}\right) [-uV'(u)] du. \quad (26)$$

Аналогичные рассуждения и использование (см. [16])

$$p(0, z, \lambda) = \frac{\lambda}{4\pi} H(z, \lambda) \quad (27)$$

приводят к формуле

$$\begin{aligned} p(0, z, t, 1) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^t e^{-(t-t')} H(z, t', 1) dt' = \\ &= \frac{z}{4\pi^2} \int_0^{\infty} e^{-[1-V(u)]t} H\left(z, \frac{1}{V(u)}\right) \frac{-uV'(u)}{V(u)} du. \end{aligned} \quad (28)$$

5. Уравнения, которым удовлетворяют функции $H(z, t, \lambda)$ и $H(z, \lambda)$. При нахождении функции $H(z, t, \lambda)$ мы исходили из явного выражения для $H(z, \lambda)$. Но для полноты приведем некоторые уравнения, решения которых мы уже знаем. Подставляя в (15) вместо λ величину $\lambda/(1+s)$, обращая преобразование Лапласа и пользуясь теоремой о свертке, находим основное уравнение для $H(z, t, \lambda)$:

$$H\left(\frac{1}{y}, t, \lambda\right) = \delta(t) + \frac{\lambda}{2} \int_a^b \frac{A(y')}{y+y'} dy' \int_0^t e^{-(t-t')} dt' \int_0^{t'} H\left(\frac{1}{y}, t'', \lambda\right) H\left(\frac{1}{y}, t'-t'', \lambda\right) dt'' \quad (29)$$

Несколько более простое уравнение получается для $p(0, z, t, \lambda)$:

$$p\left(0, \frac{1}{y}, t, \lambda\right) = \frac{\lambda}{4\pi} e^{-t} + 2\pi \int_a^b \frac{A(y')}{y+y'} dy' \int_0^t p\left(0, \frac{1}{y}, t', \lambda\right) p\left(0, \frac{1}{y}, t-t', \lambda\right) dt' \quad (30)$$

Уравнение вида (30) было получено И. Н. Мининым [4] для монохроматического рассеяния.

Отметим, что соотношения [16, 17]

$$H(\infty, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda V(0)}}, \quad (31)$$

$$\frac{\lambda}{2} \int_a^b H\left(\frac{1}{y}, \lambda\right) \frac{A(y)}{y} dy = 1 - \sqrt{1-\lambda V(0)}$$

могут быть продолжены на все λ и тогда получаются следующие равенства:

$$H(\infty, t, \lambda) = \delta(t) + \frac{\lambda V(0)}{2} e^{-t+t'} [I_0(t') + I_1(t')],$$

$$p(0, \infty, t, \lambda) = \frac{\lambda V(0)}{4\pi} e^{-t+t'} I_0(t'), \quad (32)$$

$$\int_a^b H\left(\frac{1}{y}, t, \lambda\right) \frac{A(y)}{y} dy = V(0) z(t) + \frac{\lambda V(0)}{4} e^{-t+t'} [I_0(t') - I_2(t')],$$

$$\int_a^b p\left(0, \frac{1}{y}, t, \lambda\right) \frac{A(y)}{y} dy = \frac{\lambda V(0)}{2} e^{-t+t'} [I_0(t') - I_1(t')].$$
(32)

Здесь $t' = \frac{\lambda V(0)}{2} t$, а I_k — бesselовы функции чисто мнимого аргумента. Эти равенства можно вывести и непосредственно из формул (25) и (28). Они верны при любых видах рассеяния. Первое из них было найдено в [4], а третье в [9] для монохроматического рассеяния.

Перейдем теперь к уравнениям для $H(z, \lambda)$, где λ — произвольное комплексное число. Интегрируя (25) по времени от 0 до $+\infty$, находим

$$H(z, \lambda) = 1 + \frac{\lambda}{\pi} z \int_0^{\infty} H\left(z, \frac{1}{V(u)}\right) \frac{-uV'(u)}{1 - \lambda V(u)} du.$$
(33)

Это линейное интегральное уравнение, в котором z является параметром, а интегрирование идет по λ . Оно справедливо для всех λ , в том числе и для лежащих на линии ветвления. При $\lambda \in [1/V(0), +\infty)$ нужно брать полусумму уравнений для $\lambda \pm i0$. Из (33) следуют и формулы (22).

Если перейти к пределу при $\lambda \rightarrow 1/V(u)$ в равенствах (31) и (15), то получается

$$\frac{1}{2} \int_a^b \frac{A(y)}{y} H\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{V(u)}\right) dy = V(u),$$
(34)

$$\frac{u}{2} \int_a^b \frac{A(y)}{y^2} H\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{V(u)}\right) dy = \sqrt{V(u) [V(0) - V(u)]},$$
(35)

$$\frac{1}{2} \int_a^b \frac{A(y')}{y+y'} H\left(\frac{1}{y'}, \frac{1}{V(u)}\right) \frac{dy'}{y'} = \frac{y}{y^2+u^2} \cdot \frac{V(u)}{H\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{V(u)}\right)}$$
(36)

Кроме того из (23) вытекает, что при $z \rightarrow \infty$

$$zH\left(z, \frac{1}{V(u)}\right) \rightarrow \frac{1}{u} \sqrt{\frac{V(u)}{V(0) - V(u)}}.$$
(37)

6. *Интенсивность выходящего излучения и резольвентные функции.* В этом разделе мы сначала получим выражение для преобразования Лапласа по τ от $p(\tau, z, t, \lambda)$, с помощью которого может быть найдено выходящее излучение в задаче о диффузном отражении мгновенного импульса параллельных лучей от полубесконечной среды. В стационарном случае

$$\int_0^{\infty} p(\tau, z, \lambda) e^{-\frac{\tau}{z_0}} d\tau = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{H(z, \lambda) H(z_0, \lambda)}{z + z_0} z_0 z. \quad (38)$$

Пользуясь (26) и (28), теоремой о свертке и соотношениями (34) и (27), можно получить

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} p(\tau, z, t, 1) e^{-\frac{\tau}{z_0}} d\tau = \\ & = \frac{z_0 z}{4\pi^2} \int_0^{\infty} e^{-[1-V(u)]t} H\left(z, \frac{1}{V(u)}\right) H\left(z_0, \frac{1}{V(u)}\right) \frac{-uV'(u)}{V(u)} du. \end{aligned} \quad (39)$$

Эту же формулу легко вывести и непосредственно из (38) деформированием контура интегрирования по s с использованием (22)

Отметим, что интенсивность выходящего излучения в задаче о возбуждаемой граничной плоскости выражается через

$$\int_0^{\infty} \Phi(\tau, t, \lambda) e^{-\frac{\tau}{z}} d\tau = H(z, t, \lambda) - \delta(t). \quad (40)$$

Чтобы получить из преобразований Лапласа от функций источников (38), (39) и (40) интенсивности выходящего излучения, надо эти формулы умножить на $A^{\alpha(x)}/\mu$ и подставить $z = \mu/[\beta + \alpha(x)]$, $z_0 = \mu_0/[\beta + \alpha(x_0)]$.

Для $\Phi_{\infty}(\tau, t, \lambda)$ легко выводится выражение [11]

$$\Phi_{\infty}(\tau, t, \lambda) = \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{\infty} V(u) e^{-[1-\lambda V(u)]t} \cos \tau u du. \quad (41)$$

Здесь аргумент t стоит в убывающей экспоненте, а τ входит через колеблющуюся функцию. В том случае, когда функция $V(u)$ ограничена при всех u , можно деформировать контур интегрирования в (41) к линии ветвления $V(u)$, лежащей на верхней части мнимой оси (отрезок от ia до ib). Тогда получим формулу для $\Phi_{\infty}(\tau, t, \lambda)$, где в колеблющийся множитель входит лишь t , поэтому она удобна при больших τ :

$$\Phi_{\infty}(\tau, t, 1) = \frac{1}{\pi} \int_a^b e^{-y - [1 - V(y)]t} dy [U(y) \sin tv + v \cos tv], \quad (42)$$

где введены обозначения

$$v = \frac{\pi A(y)}{2}, \quad U(y) = V(iy) = \int_a^b A(y') \frac{y' dy'}{y'^2 - y^2}, \quad (43)$$

причем в (43) берется главное значение интеграла.

Найти функцию $\Phi(\tau, t, \lambda)$ удобнее всего, исходя из уравнения, связывающего $\Phi(\tau, \lambda)$ с $\Phi_{\infty}(\tau, \lambda)$ (см. [18])

$$\Phi(\tau, \lambda) = \Phi_{\infty}(\tau, \lambda) - \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} \Phi_{\infty}(\tau + \tau', \lambda) d\tau' \int_a^b A(y) H\left(\frac{1}{y}, \lambda\right) e^{-\tau' y} dy. \quad (44)$$

Переходя от преобразований к оригиналам, получим из (44)

$$\begin{aligned} \Phi(\tau, t, \lambda) = & \Phi_{\infty}(\tau, t, \lambda) - \\ & - 2\pi \int_0^{\infty} d\tau' \int_a^b A(y) e^{-\tau' y} dy \int_0^t \Phi_{\infty}(\tau + \tau', t', \lambda) p\left(0, \frac{1}{y}, t - t', \lambda\right) dt'. \end{aligned} \quad (45)$$

Подставляя (41) и (28) в (45), выполняя интегрирование по τ' и t' и учитывая соотношения (33) и (34), найдем окончательную формулу для $\Phi(\tau, t, \lambda)$ (положим $\lambda = 1$)

$$\begin{aligned} \Phi(\tau, t, 1) = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-[1 - V(u)]t} u du \left[-\frac{V'(u)}{\pi V(u)} \int_0^{\infty} \frac{V(u') du'}{V(u') - V(u)} \times \right. \\ & \times \int_a^b \frac{A(y)}{y} \frac{H\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{V(u)}\right)}{y^2 + u^2} (y \cos \tau u' - u' \sin \tau u') dy + \\ & \left. + \int_a^b A(y) \frac{H\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{V(u)}\right)}{y^2 + u^2} (u \cos \tau u + y \sin \tau u) dy \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

Можно найти и другое представление для $\Phi(\tau, t, \lambda)$, аналогичное (42) и справедливое при том же условии ограниченности $V(u)$. В нем кратность интегрирования на единицу меньше, чем в (46):

$$\begin{aligned}
\Phi(\tau, t, 1) = & \frac{1}{\pi} \int_a^b e^{-\tau y - [1 - U(y)]t} dy \left\{ U(y) \sin tv + v \cos tv + \right. \\
& + \frac{y}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{-u V'(u) du}{(y^2 + u^2) H\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{V(u)}\right)} \times \\
& \times \frac{V(u) v \cos tv - [U(y)(U(y) - V(u)) + v^2] \sin tv}{[V(u) - U(y)]^2 + v^2} \left. - \right. \quad (47) \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_a^b e^{-\tau y} A(y) y dy \int_0^{\infty} \frac{-u V'(u) V(u) du}{(y^2 + u^2) H\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{V(u)}\right)} \times \\
& \times \frac{e^{-[1 - V(u)]t}}{[V(u) - U(y)]^2 + v^2}.
\end{aligned}$$

7. Приложение к исследованию нестационарного рассеяния. Теперь, получив точные решения основных уравнений, мы возвратимся к поставленной в начале статьи задаче. Рассмотрим сначала рассеяние в резонансной линии, когда коэффициент поглощения $\alpha(x)$ монотонно убывает от 1 при $x=0$ до 0 при $x=+\infty$. Тогда ядро (2) можно привести [2, 14] к виду (7)

$$\begin{aligned}
K(\tau, \beta) &= \int_{\beta}^{\infty} A(y, \beta) e^{-\tau y} dy = \\
&= \int_{\beta}^{\infty} \frac{A(y - \beta, 0)(y - \beta)}{y} e^{-\tau y} dy = e^{-\tau \beta} \int_0^{\infty} \frac{A(y, 0) y}{y + \beta} e^{-\tau y} dy. \quad (48)
\end{aligned}$$

Здесь мы опять пишем аргумент β , так что $A(y, \beta)$ — это функция $A(y)$ из разделов 3—6. $A(y, 0)$ дается формулами [14]

$$A(y, 0) = \begin{cases} \frac{2A}{y} \int_0^{\infty} \alpha^2(x) dx, & y \geq 1, \\ \frac{2A}{y} \int_{x(y)}^{\infty} \alpha^2(x) dx, & 0 \leq y \leq 1, \end{cases} \quad (49)$$

где $x(\alpha(x)) = x$. Все формулы для нестационарного рассеяния могут быть получены из общих, если подставить $a = \beta$, $b = +\infty$, а вместо $A(y)$ функцию $A(y - \beta, 0)(y - \beta)y$. Функция $V(u, \beta)$ имеет вид

$$V(u, \beta) = \frac{A}{u} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) dx \operatorname{arctg} \frac{u}{\beta + x(x)} = \int_0^{\infty} \frac{A(y, 0)y dy}{(y + \beta)^2 + u^2}, \quad (50)$$

причем

$$V(0, \beta) = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2(x) dx}{\beta + \alpha(x)} = 1 - A\beta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(x) dx}{\beta + \alpha(x)} = 1 - \Delta(\beta) \leq 1. \quad (51)$$

Таким образом, можно считать задачу в принципе решенной. Однако формулы очень сложны, особенно для резольвентных функций. Поэтому изучим различные предельные случаи и получим для них асимптотики H -функций и резольвент.

Рассмотрим, как это сейчас часто делается в работах по теории переноса резонансного излучения, важный и довольно общий случай рассеяния, когда коэффициент поглощения в крыле линии убывает по степенному закону

$$\alpha(x) \propto \frac{1}{|x|^\nu}, \quad |x| \gg 1, \quad \nu > 1. \quad (52)$$

Тогда функция $A(y, 0)$ при малых y ведет себя следующим образом

$$A(y, 0) \sim A_0 y^{2\gamma}, \quad 0 < \gamma = \frac{\nu - 1}{2\nu} < \frac{1}{2}, \quad (53)$$

где A_0 — постоянная. Число γ является характерным для каждого вида рассеяния и определяет асимптотические свойства поля излучения и возбуждения в среде.

На практике поглощение в непрерывном спектре обычно на несколько порядков меньше, чем поглощение в центре линии. Поэтому мы будем считать величину β малой. Но сколь бы малой она ни была, на больших оптических расстояниях от источников и в далеком крыле линии непрерывное поглощение обязательно скажется, так что считать $\beta = 0$ можно не всегда.

Для функции $V(u, \beta)$ в нашем случае может быть получено приближенное представление, где считается $u \ll 1$ и $\beta \ll 1$, в то время как на их отношение не накладывается ограничений [14]:

$$V(u, \beta) \sim 1 - V_0 \frac{(u^2 + \beta^2)^{\frac{1+2\gamma}{2}}}{u} \cdot \frac{\sin[(1+2\gamma) \operatorname{arctg} u/\beta]}{\cos \pi\gamma}, \quad (54)$$

где $V_0 = \pi A_0 / (2 \sin \pi \gamma)$. Формулу (54) можно переписать следующим образом:

$$V(u, \beta) \sim 1 - V_0 u^{2\gamma} w_\gamma \left(\frac{\beta}{u} \right), \quad (55)$$

где функция $w_\gamma(v)$ выбрана таким образом, что $w_\gamma(0) = 1$:

$$w_\gamma(v) = (1 + v^2)^{\frac{1+2\gamma}{2}} \cdot \frac{\sin [(1 + 2\gamma) \arctg 1/v]}{\cos \pi \gamma}. \quad (56)$$

При $\beta \ll u$ формула (55) переходит в более простую, где множитель w_γ заменяется на 1. Напротив, при $u \ll \beta$ из (50) имеем

$$V(u, \beta) \sim 1 - \Delta(\beta) + \frac{1}{6} \Delta''(\beta) u^2. \quad (57)$$

Здесь β не обязательно мало. При малых β для $\Delta(\beta)$ легко вывести

$$\Delta(\beta) \sim V_0 \frac{1 + 2\gamma}{\cos \pi \gamma} \beta^{2\gamma}. \quad (58)$$

Формулу (57) можно получить и из (55), причем $\Delta(\beta)$ совпадает с (58). Наконец, для функции $U(\beta + y, \beta)$ при $0 \leq y \ll 1$ справедлива асимптотика [14]

$$U(\beta + y, \beta) \sim 1 - \frac{V_0}{\cos \pi \gamma} \cdot \frac{(y + 2\beta)^{1+2\gamma} + y^{1+2\gamma} \cos 2\pi \gamma}{y + \beta}. \quad (59)$$

В случае монохроматического рассеяния мы имеем $a = 1$, $b = +\infty$, $A(y) = 1/y$, а

$$V(u) = \frac{\arctg u}{u} \sim 1 - \frac{u^2}{3}, \quad (60)$$

так что $\gamma = 1$, $V_0 = 1/3$. Формулы (42) и (47) для монохроматического рассеяния неприменимы.

Все приведенные в этом разделе формулы понадобятся при выводе асимптотик основных функций, характеризующих нестационарное рассеяние резонансного и монохроматического излучений.

8. Асимптотики H -функций и выходящего излучения. Здесь мы сначала получим асимптотики H -функции при λ , лежащих на линии ветвления. Асимптотики для $0 \leq \lambda \leq 1$ были найдены ранее [19, 14]. Так как при нахождении выходящего излучения $z = \mu/(\beta + a(x))$, то физический смысл имеют значения z , не превосходящие $1/\beta$. Впредь считаем $z\beta \leq 1$.

Пусть $z \gg 1$. Тогда в формуле (23) можно функцию $V(u)$ заменить асимптотическим выражением (55). Сделав это и произведя замену переменной, получим

$$H(z, \lambda, \beta) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2u^2}} \frac{1}{\sqrt{\lambda-1}} \cdot h_\gamma(q, z\beta), \quad (61)$$

где

$$\lambda = \frac{1}{V(u, \beta)}, \quad q = \frac{\lambda}{1-\lambda} \cdot \frac{V_0}{z^{2\gamma}}, \quad (62)$$

а функция h_γ дается формулой

$$\ln h_\gamma(q, z\beta) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \ln \left| 1 + qv^{2\gamma} w_\gamma \left(\frac{z\beta}{v} \right) \right| \frac{dv}{1+v^2}. \quad (63)$$

Таким образом, при больших z функция $H(z, \lambda, \beta)$ фактически зависит от двух аргументов q и $z\beta$, так же, как и при $0 \leq \lambda \leq 1$. Только величина q в нашем случае отрицательна ($\lambda > 1$).

Рассмотрим теперь частные случаи представления (61). Если $\beta \ll 1/z$ и $\beta \ll 1/u$, то можно положить $\beta = 0$. Тогда

$$\ln h_\gamma(q, 0) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \ln |1 + qv^{2\gamma}| \frac{dv}{1+v^2}. \quad (64)$$

Легко видеть, что $h_\gamma(q, 0)$ обладает свойством

$$h_\gamma\left(\frac{1}{q}, 0\right) = \sqrt{|q|} h_\gamma(q, 0), \quad (65)$$

которое позволяет получить эту функцию целиком, найдя ее лишь для $-1 \leq q \leq 0$. Вместе со случаем $0 \leq \lambda \leq 1$ (для которого функция $h_\gamma(q, 0)$ была табулирована при $\gamma = 1/2$ [20]) достаточно найти ее для $-1 \leq q \leq 1$ [14].

Если при $\beta = 0$ еще и $u \ll 1$, то для q получается более простое выражение

$$q = -\frac{1}{(uz)^{2\gamma}}, \quad (66)$$

а $H(z, \lambda, 0)$ и λ зависит лишь от uz . При этом, если $uz \gg 1$, то

$$H(z, \lambda, 0) \sim \frac{1}{uz} \cdot \frac{1}{\sqrt{V_0} u^\gamma}. \quad (67)$$

Если же $uz \ll 1$, то

$$H(z, i, 0) \sim H(z, 1, 0) \sim \frac{z^\gamma}{V\sqrt{V_0}}. \quad (68)$$

Вообще в случае, когда $uz \ll 1$, мы можем перейти в $H(z, 1/V(u, \beta), \beta)$ к пределу при $u \rightarrow 0$. Тогда при больших z и $\beta = 0$ опять получим (68).

Подставляя в (26) и (28) формулы, полученные в этом разделе, мы легко найдем и асимптотики выходящего излучения. Здесь также число переменных, от которых зависит $H(z, t, 1, \beta)$ при $z \gg 1$, $t \gg 1$ и $\beta \ll 1$ может быть сведено к двум, а именно, $z\beta$ и $t/z^{2\gamma}$, причем эти величины могут быть любыми ($z\beta \leq 1$). Подробнее мы рассмотрим предельные случаи.

При $t^{1/2\gamma} \ll z \ll 1/\beta$ в формуле (26) для $H(z, t, 1, \beta)$ можно положить $\beta = 0$, $z = \infty$. Тогда получим первое равенство (32), где t не обязательно велико, а $V(0) = 1$. Если $z \ll t^{1/2\gamma} \ll 1/\beta$, в то время как в остальном z произвольно, то

$$H(z, t, 1, \beta) \sim H(z, t, 1, 0) \sim \frac{zH(z, 1, 0)}{\pi} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2\gamma}\right)}{(V_0 t)^{1/2\gamma} \cdot t}. \quad (69)$$

Наконец при $t^{1/2\gamma} \gg 1/\beta$ следует воспользоваться соотношением (57). Тогда найдем

$$H(z, t, 1, \beta) \sim \frac{z}{\pi} H\left(z, \frac{1}{V(0, \beta)}, \beta\right) e^{-\Delta(\beta)t} \frac{\sqrt{\pi}}{2t^{3/2} \sqrt{-\frac{1}{6}\Delta''(\beta)}}. \quad (70)$$

Величина z здесь также может быть любой, меньше $1/\beta$, а β не обязательно мало.

Аналогично выводятся асимптотики и для интенсивности отраженного излучения. Напомним еще раз, что $z = \mu/(\beta + \alpha(x))$, а интенсивности получаются умножением найденных формул на $A\alpha(x)/\mu$.

Мы видим, что при небольших t выходящая интенсивность в задаче о возбужденной плоскости возрастает со временем в соответствии с (32) и в крыле пропорциональна коэффициенту поглощения $\alpha(x)$. С ростом t , как следует из (69), возрастание сменяется убыванием, захватывающим все большие частоты, причем интенсивность, начиная от центра линии, уменьшается со временем одинаково. Наконец, при очень больших временах степенной спад интенсивности переходит в экспоненциальный (формула (70)).

Для монохроматического рассеяния с помощью (60) из (26) легко найти, что при $t^{1/2\tau} \gg z$

$$H(z, t, 1, 0) \sim \frac{zH(z, 1, 0)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{t^{3/4}}, \quad (71)$$

причем указанное условие выполняется при всех $t \gg 1$, так как в монохроматическом случае $z = \mu$ и достаточно рассмотреть $z \leq 1$.

9. *Асимптотики резольвентных функций.* Теперь перейдем к изучению асимптотического поведения резольвентных функций, то есть степени возбуждения вещества в бесконечной и полубесконечной средах со вспыхивающей плоскостью. Здесь рассмотрим лишь предельные случаи соотношений между величинами τ , t и β . Некоторые из этих соотношений удастся объединить. Отметим, что для полубесконечной среды асимптотики получить гораздо труднее, чем для бесконечной. Приходится оценивать вклад каждого члена в выражении (46) для $\Phi(\tau, t, 1, \beta)$.

Если $\tau \gg t^{1/2\tau}$, а β — любое, для получения асимптотики $\Phi_{\infty}(\tau, t, 1, \beta)$ лучше всего исходить из представления (42). Заменяя $A(y)$ в (42) на $A_0 \cdot (y - \beta)^{1+2\tau} y^{-1}$, найдем

$$\Phi_{\infty}(\tau, t, 1, \beta) \sim \frac{e^{-\tau\beta}}{\pi} A_0 \int_0^{\infty} e^{-y - [1 - U(\beta+y, \beta)]t} dy [U[\beta + y, \beta]t + 1] \frac{\pi}{2} \frac{y^{1+2\tau}}{y + \beta} \quad (72)$$

В частных случаях соотношений между t и β получим соответственно

$$\Phi_{\infty}(\tau, t, 1, \beta) \sim \frac{1+t}{2} K(\tau, \beta), \quad t^{1/2\tau} \ll \frac{1}{\beta}, \quad t^{1/2\tau} \ll \tau, \quad (73)$$

$$\Phi_{\infty}(\tau, t, 1, \beta) \sim \frac{1 + U(\beta, \beta)t}{2} e^{-[1 - U(\beta, \beta)]t} K(\tau, \beta), \quad \tau \gg t^{1/2\tau} \gg \frac{1}{\beta}. \quad (74)$$

Для полубесконечной среды из (46) или (47) находим аналогичные формулы

$$\Phi(\tau, t, 1, \beta) \sim \left[e^{-t/2} I_0\left(\frac{t}{2}\right) + \int_0^t e^{-t'/2} I_0\left(\frac{t'}{2}\right) dt' \right] \frac{1}{2} K(\tau, \beta), \quad (75)$$

$$t^{1/2\tau} \ll \frac{1}{\beta}, \quad t^{1/2\tau} \ll \tau,$$

$$\Phi(\tau, t, 1, \beta) \sim \frac{tU(\beta, \beta) e^{-|1-U(\beta, \beta)|t}}{2H\left(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{U(\beta, \beta)}, \beta\right)} K(\tau, \beta), \quad \tau \gg t^{1/2\gamma} \gg \frac{1}{\beta}. \quad (76)$$

В формулах (73) и (75) время t не обязательно велико, они верны и при $t = 0$.

Другой предельный случай описывается неравенствами $\tau \ll t^{1/2\gamma} \ll 1/\beta$. Здесь, подставляя в (41) формулу (55) при $\beta = 0$ и вычисляя интеграл, найдем

$$\Phi_{\infty}(\tau, t, 1, \beta) \sim \Phi_{\infty}(\tau, t, 1, 0) \sim \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2\gamma}\right)}{\pi (V_0 t)^{1/2\gamma}}. \quad (77)$$

Для полубесконечной среды

$$\Phi(\tau, t, 1, 0) \sim \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2\gamma}\right)}{(V_0 t)^{1/2\gamma} \cdot t} \cdot \frac{\tau^{\gamma}}{V V_0 \cdot \Gamma(1 + \gamma)}. \quad (78)$$

При выводе (78) в формуле (46) достаточно оставить только члены, содержащие тройной интеграл, причем множители при $\sin \tau u'$ и $\cos \tau u'$ дают одинаковые вклады.

Наконец, последняя возможность $t^{1/2\gamma} \gg 1/\beta$ и $t^{1/2\gamma} \gg \tau$, а $\tau\beta$ — произвольно. Пользуясь (57), находим

$$\Phi_{\infty}(\tau, t, 1, \beta) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\lambda(\beta)t} \sqrt{\frac{c}{t}} e^{-\frac{\tau^2}{t}}, \quad (79)$$

где $c = -3/2 \Delta''(\beta)$. Тщательное рассмотрение формулы (46) с учетом (57) показывает, что все члены (46) дают вклады одного порядка. Для $\Phi(\tau, t, 1, \beta)$ получается формула, аналогичная (79), хотя более сложная:

$$\Phi(\tau, t, 1, \beta) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda(\beta)t} \left(\frac{c}{t}\right)^{1/4} e^{-\frac{\tau^2}{t}} \left[H_3\left(1 + 2c \frac{\tau^2}{t}\right) + \tau H_2 \right], \quad (80)$$

где введено обозначение

$$H_n = \int_a^b \frac{A(y)}{y^n} H\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{V(0)}\right) dy, \quad H_2 = \sqrt{\frac{V(0)}{c}}. \quad (81)$$

Для нашего случая необходимо сделать замены, указанные в разделе 7. H_2 получено из (35).

Заметим, что в статье [13] формулы (69) и (78) были получены другим, более непосредственным способом, а именно, путем нахождения асимптотик функции $H(z, \lambda)$ при $z \rightarrow \infty$ и комплексных $\lambda \rightarrow 1$ с последующим обращением асимптотик преобразований Лапласа. В [13] были найдены и асимптотика (77), а также (73) и (75) при $\beta = 0$.

При рассеянии без перераспределения по частоте для $t \gg 1$ получаются формулы того же вида, что и (79) и (80), но только надо положить $\Delta(\beta) = 0$, $c = 3/4$, $V(0) = 1$, $a = 1$, $b = +\infty$, $A(y) = 1/y$, $H_2 = 2/\sqrt{3}$.

10. *Обсуждение полученных асимптотик.* Сделаем сначала некоторые замечания о связях различных асимптотик. Формулы (78) и (69) при больших z находятся в соответствии друг с другом, как оригинал и преобразование Лапласа по τ , каждая из них может быть выведена из другой. Стационарные аналоги формул (73)—(76), то есть получающиеся из них преобразованием Лапласа по времени, хорошо известны — это асимптотики стационарных резольвентных функций при очень больших τ , при таких, когда существенную роль играют процессы непрерывного поглощения и истинного поглощения в линии [14].

Для важного с практической точки зрения лоренцовского контура коэффициента поглощения $\alpha(x) = 1/(1+x^2)$ и все формулы получаются из общих, если подставить $x = 2$, $\gamma = 1/4$, $A_0 = 2/3\pi$. Заметим, что при $\beta = 0$ асимптотики могут быть обобщены на случай, для которого (52) является частным. Именно, можно допустить, что функция $1 - V(u, 0)$, изменяясь при $u \ll 1$ в основном по степенному закону, имеет медленно меняющийся, например, логарифмический множитель $V_0(u)$, то есть вместо (55)

$$1 - V(u, 0) \sim V_0(u) u^{2\gamma}. \quad (82)$$

Тогда в соответствующих формулах надо V_0 считать не постоянной, а заменить на $V_0(1/z)$ в (67)—(69), на $V_0(1/t)$ в (77) и первом множителе (78) и на $V_0(1/\tau)$ — во втором. В частности, когда коэффициент поглощения в линии — доплеровский $\alpha(x) = e^{-x^2}$, то $\gamma = 1/2$, $V_0(u) = \sqrt{\pi}/(4\sqrt{\ln 1/u})$. Заметим еще, что, как показывает сравнение с (71), а также (79) и (80) для монохроматического рассеяния, формулы (69), (77) и (78) справедливы и в этом случае ($\gamma = 1$, $V_0 = 1/3$).

Проследим теперь, как изменяется со временем степень возбуждения в среде в рассматриваемых нами задачах. Сперва возбуждение растет со временем (формулы (73) и (75)). Потом на умеренных расстояниях от возбуждающейся плоскости ($r \ll 1$) рост сменяется убы-

ванием в соответствии с (77) и (78). Затем включается непрерывное поглощение, приводящее к экспоненциальному спаду возбуждения (формулы (74) и (76)). На больших расстояниях, где $\tau\beta \gg 1$, промежуточного случая нет. Наконец, через очень большое время асимптотики для резольвентных функций (79) и (80) отражают возрастающую роль непрерывного поглощения. Экспоненциальный множитель $e^{-\lambda(\beta)t}$ отражает гибель квантов в полете. Если учитывать наличие истинного поглощения в линии в соответствии с (18), то экспонента превратится в $e^{-[1-\lambda+\lambda\Delta(\beta)]t}$. Комбинация $1-\lambda+\lambda\Delta(\beta)$ всегда возникает при совместном действии истинного и непрерывного поглощения. Если отвлечься от указанного экспоненциального множителя, то формулы для рассеяния с перераспределением и без перераспределения по частотам очень близки при таких больших t . Все вместе они похожи на получаемые в диффузионном приближении [3]. Таким образом, через очень большой промежуток времени после начального возбуждения перенос квантов происходит как диффузия частиц.

В заключение отметим, что представляет интерес рассмотреть нестационарное рассеяние в конечном слое, а также хотя бы на простейших примерах выяснить влияние конечности скорости света, которое для рассеяния в линии, по-видимому, не всегда мало.

Ленинградский Государственный
университет

NONSTATIONARY RADIATION FIELD IN INFINITE MEDIA

D. I. NAGIRNER

The nonstationary resonance line radiation field in stationary infinite and semi-infinite media is considered. The scattering is assumed to be isotropic and either monochromatic or completely frequency redistributed. The time lag due to the finite velocity of light is neglected. The resolvents of the basic integral equations and the intensity of the emergent radiation are found explicitly. Various asymptotics are obtained from the exact formulae. These asymptotics characterize the behavior of radiation in the line wings and the degree of atom excitation far from the sources of radiation and a long time after their action has stopped.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. В. Соболев, Астрон. ж., 29, № 4 и 5, 1952.
2. В. В. Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, 1956.
3. И. Н. Минин, Вестн. ЛГУ, № 13, 137, 1959; № 19, 124, 1962.
4. И. Н. Минин, ДАН СССР, 154, 1059, 1964.
5. G. M. Wing, An Introduction to Transport Theory, J. Willey Publ. Co., New York—London, 1962.
6. R. E. Bellman, H. H. Kagiwada, R. E. Kalaba, M. S. Prestrud, Invariant imbedding and Time-Dependent Transport Processes, Elsevier Publ. Co., New York, 1964.
7. Л. М. Романова, Физика атмосферы и океана, 2, 844, 1966.
8. К. М. Case, Ann. Phys., 9, 1, 1960.
9. I. Kuscer, P. F. Zweifel, J. Math. Phys., 6, 1125, 1965.
10. T. Holstein, Phys. Rev., 72, 1212, 1947.
11. Б. А. Векленко, ЖЭТФ, 36, 204, 1959.
12. В. В. Иванов, ВАН, 19, 192, 1967.
13. Ю. Ю. Абрамов, А. П. Напартович, Астрофизика, 4, 195, 1968.
14. Д. И. Нагирнер, Уч. зап. ЛГУ, № 337 (Труды Астрон. обс. ЛГУ, 25), 3, 1968.
15. В. В. Соболев, Астрон. ж., 28, № 5, 1951.
16. В. В. Соболев, Астрон. ж., 36, 564, 1959.
17. В. В. Иванов, Астрон. ж., 39, 1020, 1962.
18. В. В. Иванов, Астрон. ж., 41, 44, 1964.
19. В. В. Иванов, Уч. зап. ЛГУ, № 307 (Труды Астрон. обс. ЛГУ, 19), 52, 1962.
20. В. В. Иванов, Д. И. Нагирнер, Астрофизика, 1, 143, 1965.