АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 5 ФЕВРАЛЬ, 1969 ВЫПУСК 1

ДИФФУЗНОЕ ОТРАЖЕНИЕ И ПРОПУСКАНИЕ СВЕТА АТМОСФЕРОЙ ПРИ НЕИЗОТРОПНОМ РАССЕЯНИИ

В. В. СОБОЛЕВ

Поступила 16 декабря 1968

Продолжается начатое ранее [1] изучение линейных интегральных уравнений для коэффициентов отражения и пропускания $\rho(\eta, \zeta)$ и $\sigma(\eta, \zeta)$ и для вспомогательных функций $\varphi_i(\eta)$ и $\psi_i(\eta)$. Найдены дополнительные соотношения для указанных величин. Дается общий метод получения выражений для функций $\varphi_i(\eta)$ и $\psi_i(\eta)$ через функции $X(\eta)$ и $Y(\eta)$ Чандрасекара. В качестве примера рассматривается случай двухчленной индикатрисы рассеяния. Приводятся формулы для альбедо атмосферы и освещенности поверхности.

В последние годы вследствие увеличения значения планетных исследований сильно возрос интерес к теории неизотропного рассеяния света. Эта теория необходима для понимания физических процессов в атмосферах планет и для интерпретации различного рода наблюдательных данных (фотометрических, спектроскопических и др.). Некоторые результаты этой теории были получены уже давно, но лишь теперь находят свое применение. Желательна также дальнейшая разработка теории.

Цель настоящей статьи — рассмотрение проблемы диффузного отражения и пропускания света атмосферой конечной оптической толщины при произвольной индикатрисе рассеяния. В основу исследования положены линейные интегральные уравнения для коэффициентов отражения и пропускания, полученные автором еще в 1949 году [1] (см. также [2]). При помощи этих уравнений могут быть найдены линейные интегральные уравнения для вспомогательных функций $\varphi_i(\eta)$ и $\psi_i(\eta)$, через которые выражаются коэффициенты отражения и пропускания. Раньше [1] упомянутые уравнения для функций $\varphi_i(\eta)$ и $\psi_i(\eta)$ были даны для простейших случаев, здесь же они даются при любом законе рассеяния. Получены также дополнительные соотношения как для коэффициентов отражения и пропускания, так и для вспомогательных функций.

Далее предлагается общий метод определения функций $\varphi_i(\eta)$ и $\psi_i(\eta)$, если известны функции $X(\eta)$ и $Y(\eta)$ Чандрасекара. Для примера этот метод применяется к случаю двухчленной индикатрисы рассеяния. В конце статьи приводятся формулы для альбедо атмосферы и освещенности поверхности планеты.

Недавно в статье автора [3] было выполнено аналогичное исследование для полубесконечной атмосферы. Можно считать, что полученные в ней результаты теперь обобщаются на атмосферу любой оптической толщины.

Коэффициенты отражения и пропускания. Пусть атмосфера состоит из плоскопараллельных слоев и имеет оптическую толщину τ_0. Обозначим через $x(\gamma)$ индикатрису рассеяния (γ — угол между направлениями рассеянного и падающего излучения) и через λ — альбедо частицы, то есть отношение коэффициента рассеяния к сумме коэффициентов рассеяния и истинного поглощения.

Будем считать, что атмосфера освещена параллельными лучами, падающими под углом $\arccos\zeta$ к нормали и создающими освещенность перпендикулярной к ним площадки, равную πS. Усредненные по азимуту интенсивности излучения, диффузно отраженного и диффузно пропущенного атмосферой, обозначим соответственно через $I_1(\eta, \zeta)$ и $I_2(\eta, \zeta)$, понимая под η косинус угла отражения или пропускания. Эти величины представим в виде

$$I_1(\eta, \zeta) = S\rho(\eta, \zeta)\zeta, \qquad I_2(\eta, \zeta) = S\sigma(\eta, \zeta)\zeta, \tag{1}$$

где $\rho(\eta, \zeta)$ — коэффициент отражения и $\sigma(\eta, \zeta)$ — коэффициент пропускания.

Предположим, что индикатриса рассеяния разложена в ряд по полиномам Лежандра, то есть

$$x(\gamma) = \sum_0^n x_i P_i(\cos\gamma). \tag{2}$$

Как известно, в таком случае интенсивность излучения разлагается в ряд по $\cos m\varphi$, где φ — азимут и $0 \leqslant m \leqslant n$. Ранее [1, 2] учитывалась зависимость интенсивности излучения от азимута, теперь же для простоты мы усредняем ее по азимуту, то есть принимаем $m = 0$.

Согласно [1, 2] при $m = 0$ имеем

$$\rho(\eta, \zeta) = \sum_{0}^{n} u_l(\eta, \zeta) P_l(\eta), \qquad \sigma(\eta, \zeta) = \sum_{0}^{n} v_l(\eta, \zeta) P_l(\eta), \tag{3}$$

где функции $u_l(\eta, \zeta)$ и $v_l(\eta, \zeta)$ определяются из системы линейных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} u_l(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{2} x_l \int_{-1}^{1} \frac{\eta\rho(\eta, \zeta) - \eta'\rho(\eta', \zeta)}{\eta - \eta'} P_l(\eta')\, d\eta' - \\ - \frac{\lambda}{2} x_l \sum_{j=l+1}^{n} u_j(\eta, \zeta) c_{lj}(\eta) - \\ - \frac{\lambda}{2} x_l e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \int_{0}^{1} \frac{\eta'\sigma(\eta', \zeta)}{\eta + \eta'} P_l(-\eta')\, d\eta' + x_l P_l(-\zeta) \rho_1(\eta, \zeta), \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} v_l(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{2} x_l \int_{-1}^{1} \frac{\eta\sigma(\eta, \zeta) - \eta'\sigma(\eta', \zeta)}{\eta - \eta'} P_l(\eta')\, d\eta' - \\ - \frac{\lambda}{2} x_l \sum_{j=l+1}^{n} v_j(\eta, \zeta) c_{lj}(\eta) - \\ - \frac{\lambda}{2} x_l e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \int_{0}^{1} \frac{\eta'\rho(\eta', \zeta)}{\eta + \eta'} P_l(-\eta')\, d\eta' + x_l P_l(\zeta) \sigma_1(\eta, \zeta). \end{aligned} \tag{5}$$

В этих уравнениях считается, что $\rho(\eta', \zeta) = 0$ и $\sigma(\eta', \zeta) = 0$ при $\eta' < 0$ и обозначено

$$c_{lj}(\eta) = \int_{-1}^{1} P_l(\eta') \frac{P_j(\eta) - P_j(\eta')}{\eta - \eta'} d\eta', \tag{6}$$

$$\rho_1(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4} \frac{1 - e^{-\tau_0(1/\eta + 1/\zeta)}}{\eta + \zeta}, \qquad \sigma_1(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4} \frac{e^{-\tau_0/\eta} - e^{-\tau_0/\zeta}}{\eta - \zeta}. \tag{7}$$

Уравнения (4) и (5) можно рассматривать как системы линейных алгебраических уравнений относительно функций $u_l(\eta, \zeta)$ и $v_l(\eta, \zeta)$. Решая эти уравнения, то есть выражая указанные функции через величины $\rho(\eta, \zeta)$ и $\sigma(\eta, \zeta)$, и подставляя найденные выражения в соотношения (3), мы приходим к двум уравнениям для определения величин $\rho(\eta, \zeta)$ и $\sigma(\eta, \zeta)$. Раньше эта процедура применялась для полубесконечной атмосферы (см. [4] и [2], стр. 152). Для атмосферы конечной оптической толщины применение ее дает

$$\rho(\eta,\zeta)\,T(\eta)=\frac{\lambda}{2}\int_0^1\frac{\eta'\rho(\eta',\zeta)}{\eta'-\eta}A(\eta,\eta')\,d\eta'-$$
$$-\frac{\lambda}{2}e^{-\frac{\tau_0}{\eta}}\int_0^1\frac{\eta'\sigma(\eta',\zeta)}{\eta'+\eta}A(\eta,-\eta')\,d\eta'+A(\eta,-\zeta)\,\rho_1(\eta,\zeta), \tag{8}$$

$$\sigma(\eta,\zeta)\,T(\eta)=\frac{\lambda}{2}\int_0^1\frac{\eta'\sigma(\eta',\zeta)}{\eta'-\eta}A(\eta,\eta')\,d\eta'-$$
$$-\frac{\lambda}{2}e^{-\frac{\tau_0}{\eta}}\int_0^1\frac{\eta'\rho(\eta',\zeta)}{\eta'+\eta}A(\eta,-\eta')\,d\eta'+A(\eta,\zeta)\,\sigma_1(\eta,\zeta), \tag{9}$$

где

$$T(\eta)=1+\frac{\lambda}{2}\eta\int_{-1}^{1}\frac{A(\eta,\eta')}{\eta'-\eta}d\eta'=1+\frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1}\frac{A(\eta',\eta')}{\eta'-\eta}d\eta', \tag{10}$$

$$A(\eta,\zeta)=\sum_0^n x_i R_i(\eta)\,P_i(\zeta), \tag{11}$$

а полиномы $R_i(\eta)$ определяются рекуррентным соотношением

$$R_i(\eta)=P_i(\eta)-\frac{\lambda}{2}\eta\sum_{k=0}^{i-1}x_k c_{ki}(\eta)\,R_k(\eta) \tag{12}$$

при $R_0(\eta)=1$.

Легко показать (см. [3]), что из (12) вытекает также следующая рекуррентная формула для функций $R_i(\eta)$:

$$iR_i(\eta)+(i-1)\,R_{i-2}(\eta)=(2i-1-\lambda x_{i-1})\,\eta R_{i-1}(\eta) \tag{13}$$

при

$$R_0(\eta)=1,\quad R_1(\eta)=(1-\lambda)\,\eta. \tag{14}$$

Таким образом, для определения коэффициента отражения $\rho(\eta,\zeta)$ и коэффициента пропускания $\sigma(\eta,\zeta)$ служат линейные интегральные уравнения (8) и (9). К этим уравнениям для получения решений, имеющих необходимый физический смысл, надо еще добавить некоторые условия. Такие условия найдены в следующем разделе.

Дополнительные условия для функций $\rho(\eta, \zeta)$ *и* $\sigma(\eta, \zeta)$. С целью получения дополнительных соотношений, которым должны удовлетворять функции $\rho(\eta, \zeta)$ и $\sigma(\eta, \zeta)$, мы применим следующий прием. Допустим, что рассматриваемая атмосфера расположена в глубоких слоях полубесконечной среды, обладающей теми же оптическими свойствами, что и данная атмосфера. Тогда можно получить зависимость между функциями $\rho(\eta, \zeta)$ и $\sigma(\eta, \zeta)$ и интенсивностью излучения в указанных слоях, определенной впервые В. А. Амбарцумяном [5].

При сделанном допущении атмосфера будет освещена сверху излучением интенсивности $i(\eta)$ и снизу — излучением интенсивности $i(-\eta)e^{-k\tau_0}$, а функция источников для нее будет равна $b(\eta)e^{-k\tau}$. Величины $i(\eta)$ и $b(\eta)$ связаны между собой соотношением

$$i(\eta) = \frac{b(\eta)}{1 - k\eta}, \tag{15}$$

а функция $b(\eta)$ определяется интегральным уравнением

$$b(\eta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 p(\eta, \eta') \frac{b(\eta')}{1 - k\eta'} d\eta', \tag{16}$$

в котором

$$p(\eta, \eta') = \sum_0^n x_i P_i(\eta) P_i(\eta'). \tag{17}$$

Функции $b(\eta)$ и $i(\eta)$ считаются нормированными согласно формуле

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 b(\eta)\, d\eta = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 i(\eta)\, d\eta = 1. \tag{18}$$

Величина k находится из условия разрешимости уравнения (16).

Обозначим через $B(\tau, \eta, \zeta)$ функцию источников для атмосферы, освещенной параллельными лучами, падающими под углом $\arccos \zeta$ к нормали. Очевидно, что должно существовать соотношение

$$b(\eta) e^{-k\tau} = \frac{2}{S} \int_0^1 B(\tau, \eta, \eta')\, i(\eta')\, d\eta' + \\ + \frac{2}{S} e^{-k\tau_0} \int_0^1 B(\tau_0 - \tau, -\eta, \eta')\, i(-\eta')\, d\eta'. \tag{19}$$

Так как

$$S\rho(\eta, \zeta)\zeta = \int_0^{\tau_0} B(\tau, -\eta, \zeta) e^{-\frac{\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta}, \tag{20}$$

$$S\sigma(\eta, \zeta)\zeta = \int_0^{\tau_0} B(\tau, \eta, \zeta) e^{-\frac{\tau_0-\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta}, \tag{21}$$

то из (19) следует

$$\begin{gathered} 2\int_0^1 \rho(\eta, \eta') i(\eta') \eta' d\eta' + 2e^{-k\tau_0} \int_0^1 \sigma(\eta, \eta') i(-\eta') \eta' d\eta' = \\ = [1 - e^{-(k+1/\eta)\tau_0}] i(-\eta), \end{gathered} \tag{22}$$

$$\begin{gathered} 2\int_0^1 \sigma(\eta, \eta') i(\eta') \eta' d\eta' + 2e^{-k\tau_0} \int_0^1 \rho(\eta, \eta') i(-\eta') \eta' d\eta' = \\ = (e^{-k\tau_0} - e^{-\tau_0/\eta}) i(\eta) \end{gathered} \tag{23}$$

Формулы (22) и (23) и представляют собой искомые условия, которые необходимо присоединить к линейным интегральным уравнениям (8) и (9).

Заслуживает внимания также другой способ получения формул (22) и (23). Из сравнения выражения (11) для функции $A(\eta, \zeta)$ с выражением, вытекающим из (16) для функции $b(\eta)$, находим

$$b(\eta) = A\left(\frac{1}{k}, \eta\right), \tag{24}$$

а значит

$$i(\eta) = \frac{A\left(\frac{1}{k}, \eta\right)}{1 - k\eta}. \tag{25}$$

Поэтому из (10) и (18) следует

$$T\left(\frac{1}{k}\right) = 0. \tag{26}$$

Полагая в (8) и (9) $\eta = 1/k$ и учитывая (26), мы снова приходим к формулам (22) и (23).

В случае чистого рассеяния для получения соотношений между величинами $\rho(\eta, \zeta)$ и $\sigma(\eta, \zeta)$ надо принять во внимание, что при малых k

$$i(\eta) = 1 + \frac{3k\eta}{3 - x_1}. \tag{27}$$

Поэтому, полагая в (22) и (23) $k = 0$, находим

$$2\int_0^1 \rho(\eta, \eta')\,\eta' d\eta' + 2\int_0^1 \sigma(\eta, \eta')\,\eta' d\eta' = 1 - e^{-\frac{\tau_0}{\eta}}. \tag{28}$$

Дифференцируя же (22) и (23) по k и полагая $k = 0$, получаем

$$\left(1 - \frac{x_1}{3}\right)\tau_0\left[1 - 2\int_0^1 \rho(\eta, \eta')\,\eta' d\eta'\right] - 2\int_0^1 \rho(\eta, \eta')\,\eta'^2 d\eta' +$$

$$+ 2\int_0^1 \sigma(\eta, \eta')\,\eta'^2 d\eta' = \eta\left(1 - e^{-\frac{\tau_0}{\eta}}\right). \tag{29}$$

Легко видеть, что соотношения (28) и (29) вытекают из „интеграла потока“ и так называемого „K-интеграла“, имеющих место при $\lambda = 1$.

Вспомогательные функции. Для полубесконечной атмосферы В. А. Амбарцумян [6] выразил коэффициент отражения $\rho(\eta, \zeta)$ через вспомогательные функции, зависящие только от одного аргумента, и получил для определения этих функций систему нелинейных интегральных уравнений. В дальнейшем С. Чандрасекар [7] обобщил этот результат на атмосферу конечной оптической толщины.

В последнем случае для коэффициентов отражения и пропускания имеем

$$\rho(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4}\sum_0^n (-1)^i x_i \frac{\varphi_i(\eta)\varphi_i(\zeta) - \psi_i(\eta)\psi_i(\zeta)}{\eta + \zeta}, \tag{30}$$

$$\sigma(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4}\sum_0^n x_i \frac{\varphi_i(\eta)\psi_i(\zeta) - \varphi_i(\zeta)\psi_i(\eta)}{\zeta - \eta}. \tag{31}$$

В свою очередь вспомогательные функции $\varphi_i(\eta)$ и $\psi_i(\eta)$ выражаются через величины $\rho(\eta, \zeta)$ и $\sigma(\eta, \zeta)$ при помощи формул

$$\varphi_i(\eta) = P_i(\eta) + 2\eta \int_0^1 \rho(\eta, \zeta) P_i(-\zeta) d\zeta, \tag{32}$$

$$\psi_i(\eta) = P_i(\eta) e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} + 2\eta \int_0^1 \sigma(\eta, \zeta) P_i(\zeta) d\zeta. \tag{33}$$

Подстановка (30) и (31) в соотношения (32) и (33) дает систему нелинейных интегральных уравнений для определения функций $\varphi_i(\eta)$ и $\psi_i(\eta)$.

Однако для определения этих функций могут быть получены также линейные интегральные уравнения. Такая возможность была указана в статье автора [1], в которой были даны упомянутые уравнения при простейших индикатрисах рассеяния.

При произвольной индикатрисе рассеяния линейные интегральные уравнения для функций $\varphi_i(\eta)$ и $\psi_i(\eta)$ легко получаются из уравнений (8) и (9) при использовании соотношений (32) и (33). Умножая (8) на $P_i(\zeta)$, интегрируя по ζ в пределах от 0 до 1 и применяя (32) и (33), находим

$$\begin{gathered}
[\varphi_i(\eta) - P_i(\eta)]\, T(\eta) = \frac{\lambda}{2}\eta \int_0^1 \frac{A(\eta, \eta')}{\eta' - \eta} [\varphi_i(\eta') - P_i(\eta')]\, d\eta' - \\
- (-1)^i \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \eta \int_0^1 \frac{A(\eta, -\eta')}{\eta + \eta'} \psi_i(\eta')\, d\eta' + \\
+ (-1)^i \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 \frac{A(\eta, -\zeta)}{\eta + \zeta} P_i(\zeta)\, d\zeta.
\end{gathered} \tag{34}$$

Это уравнение при помощи формул (10)—(12) можно привести к виду

$$\begin{gathered}
\varphi_i(\eta)\, T(\eta) = \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 \frac{A(\eta, -\eta')}{\eta' - \eta} \varphi_i(\eta')\, d\eta' - \\
- (-1)^i \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \eta \int_0^1 \frac{A(\eta, -\eta')}{\eta + \eta'} \psi_i(\eta')\, d\eta' + R_i(\eta).
\end{gathered} \tag{35}$$

Аналогично из уравнения (9) получаем

$$\psi_i(\eta)\,T(\eta)=\frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1\frac{A(\eta,\eta')}{\eta'-\eta}\psi_i(\eta')\,d\eta'-$$
$$-(-1)^i\frac{\lambda}{2}e^{-\frac{\tau_0}{\eta}}\eta\int_0^1\frac{A(\eta,-\eta')}{\eta+\eta'}\varphi_i(\eta')\,d\eta'+e^{-\frac{\tau_0}{\eta}}R_i(\eta). \tag{36}$$

Таким образом, вспомогательные функции $\varphi_i(\eta)$ и $\psi_i(\eta)$ удовлетворяют линейным интегральным уравнениям (35) и (36). Важно подчеркнуть, что пара функций $\varphi_i(\eta)$ и $\psi_i(\eta)$ при данном i определяется независимо от других функций.

Так как уравнения (35) и (36) имеют не единственное решение, то к ним надо добавить некоторые условия для получения решения с нужным физическим смыслом. Эти условия находятся путем умножения соотношений (22) и (23) на $P_i(\eta)$, интегрирования по η в пределах от 0 до 1 и использования формул (32) и (33). К тем же условиям мы придем, если положим $\eta=1/k$ в уравнениях (35) и (36) и применим формулы (25) и (26). В результате имеем

$$\frac{\lambda}{2}\int_0^1 i(\eta)\,\varphi_i(\eta)\,d\eta+(-1)^i\frac{\lambda}{2}e^{-k\tau_0}\int_0^1 i(-\eta)\,\psi_i(\eta)\,d\eta=R_i\left(\frac{1}{k}\right), \tag{37}$$

$$\frac{\lambda}{2}\int_0^1 i(\eta)\,\psi_i(\eta)\,d\eta+(-1)^i\frac{\lambda}{2}e^{-k\tau_0}\int_0^1 i(-\eta)\,\varphi_i(\eta)\,d\eta=e^{-k\tau_0}R_i\left(\frac{1}{k}\right). \tag{38}$$

В случае чистого рассеяния из соотношений (37) и (38) при учете формулы (27) находим

$$\int_0^1[\varphi_i(\eta)+(-1)^i\psi_i(\eta)]\,d\eta=2\delta_{i0}, \tag{39}$$

$$\int_0^1\varphi_i(\eta)\left[\left(1-\frac{x_1}{3}\right)\tau_0+\eta\right]d\eta-\int_0^1\psi_i(\eta)\,\eta\,d\eta=2\left(1-\frac{x_1}{3}\right)\tau_0\delta_{i0}, \tag{40}$$

(при четном i)

$$\int_0^1 \varphi_i(\eta)\left[\left(1-\frac{x_1}{3}\right)\tau_0+\eta\right]d\eta+\int_0^1 \psi_i(\eta)\,\eta d\eta=\frac{2}{3}\,\delta_{i1}. \tag{41}$$

(при нечетном i)

Соотношения (39)—(41) легко также получить путем использования формул (28), (29), (32) и (33).

Уравнения (35) и (37) нашел также Малликин [8]. Вместе с тем он рассмотрел проблему единственности решения этих уравнений и в качестве дополнительных условий дал соотношения (37) и (38). Условия (39) —(41) были получены раньше в работах Малликина [8] и Басбридж [9].

Следует отметить, что через функции $\varphi_i(\eta)$ и $\psi_i(\eta)$ выражаются интенсивности излучения, выходящего из атмосферы, не только при освещении ее параллельными лучами, но и при внутренних источниках энергии (см. работу И. Н. Минина [10]).

Выражения функций $\varphi_i(\eta)$ и $\psi_i(\eta)$ через функции $X(\eta)$ и $Y(\eta)$. Для простейших индикатрис рассеяния Чандрасекару [7] удалось выразить функции $\varphi_i(\eta)$ и $\psi_i(\eta)$ (а значит и величины $\rho(\eta,\zeta)$ и $\sigma(\eta,\zeta)$) только через две функции $X(\eta)$ и $Y(\eta)$, определенные уравнениями

$$X(\eta)=1+\eta\int_0^1 \frac{\Psi(\eta')}{\eta+\eta'}\left[X(\eta)\,X(\eta')-Y(\eta)\,Y(\eta')\right]d\eta', \tag{42}$$

$$Y(\eta)=e^{-\frac{\tau_0}{\eta}}+\eta\int_0^1 \frac{\Psi(\eta')}{\eta-\eta'}\left[Y(\eta)\,X(\eta')-X(\eta)\,Y(\eta')\right]d\eta', \tag{43}$$

где $\Psi(\eta)$ — „характеристическая функция“, зависящая от $x(\gamma)$ и λ.

Однако Чандрасекар не показал, какой формулой определяется функция $\Psi(\eta)$ и каким способом можно выразить функции $\varphi_i(\eta)$ и $\psi_i(\eta)$ через функции $X(\eta)$ и $Y(\eta)$ при произвольной индикатрисе рассеяния. Очевидно, что получение ответов на эти вопросы представляет значительный интерес для теории неизотропного рассеяния света.

В дальнейшем (см. [11], [8] и [3]) было найдено, что

$$\Psi(\eta)=\frac{\lambda}{2}\,A(\eta,\eta), \tag{44}$$

где функция $A(\eta,\zeta)$ определяется формулой (11).

Теперь мы дадим общий метод получения выражений функций $\varphi_i(\eta)$ и $\psi_i(\eta)$ через функции $X(\eta)$ и $Y(\eta)$.

Чтобы сделать это, воспользуемся уравнениями (35) и (36) для функций $\varphi_i(\eta)$ и $\psi_i(\eta)$, а также следующими линейными интегральными уравнениями для функций $X(\eta)$ и $Y(\eta)$:

$$X(\eta)\, T(\eta) = 1 + \eta \int_0^1 \frac{\Psi(\eta')}{\eta' - \eta} X(\eta')\, d\eta' - e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \eta \int_0^1 \frac{\Psi(\eta')}{\eta + \eta'} Y(\eta')\, d\eta', \tag{45}$$

$$\begin{gathered} Y(\eta)\, T(\eta) = e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} + \eta \int_0^1 \frac{\Psi(\eta')}{\eta' - \eta} Y(\eta')\, d\eta' - \\ - e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \eta \int_0^1 \frac{\Psi(\eta')}{\eta + \eta'} X(\eta')\, d\eta', \end{gathered} \tag{46}$$

вытекающими из уравнений (42) и (43).

Будем искать функции $\varphi_i(\eta)$ и $\psi_i(\eta)$ в виде

$$\varphi_i(\eta) = X(\eta)\, q_i(\eta) + Y(\eta)\, r_i(\eta), \tag{47}$$

$$\psi_i(\eta) = X(\eta)\, s_i(\eta) + Y(\eta)\, t_i(\eta), \tag{48}$$

где $q_i(\eta)$, $r_i(\eta)$, $s_i(\eta)$, $t_i(\eta)$ — некоторые полиномы.

Подставляя выражения (47) и (48) в уравнения (35) и (36), пользуясь уравнениями (45) и (46) и приравнивая отдельно члены, содержащие множитель $e^{-\tau_0/\eta}$ и не содержащие его, получим

$$\begin{gathered} q_i(\eta) = \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 X(\eta') \frac{A(\eta, \eta')\, q_i(\eta') - A(\eta', \eta')\, q_i(\eta)}{\eta' - \eta} d\eta' + \\ + \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 Y(\eta') \frac{A(\eta, \eta')\, r_i(\eta') - A(\eta', \eta')\, r_i(\eta)}{\eta' - \eta} d\eta' + R_i(\eta), \end{gathered} \tag{49}$$

$$\begin{gathered} r_i(\eta) = \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 X(\eta') \frac{A(\eta', \eta')\, r_i(\eta) - (-1)^i A(\eta, -\eta')\, s_i(\eta')}{\eta + \eta'} d\eta' + \\ + \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 Y(\eta') \frac{A(\eta', \eta')\, q_i(\eta) - (-1)^i A(\eta, -\eta')\, t_i(\eta')}{\eta + \eta'} d\eta', \end{gathered} \tag{50}$$

$$s_i(\eta) + \frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1 X(\eta')\frac{A(\eta,\eta')s_i(\eta') - A(\eta',\eta')s_i(\eta)}{\eta'-\eta}d\eta' +$$
$$+\frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1 Y(\eta')\frac{A(\eta,\eta')t_i(\eta') - A(\eta',\eta')t_i(\eta)}{\eta'-\eta}d\eta', \tag{51}$$

$$t_i(\eta) = \frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1 X(\eta')\frac{A(\eta',\eta')t_i(\eta) - (-1)^i A(\eta,-\eta')q_i(\eta')}{\eta+\eta'}d\eta' +$$
$$+\frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1 Y(\eta')\frac{A(\eta',\eta')s_i(\eta) - (-1)^i A(\eta,-\eta')r_i(\eta')}{\eta+\eta'}d\eta' + R_i(\eta). \tag{52}$$

Легко видеть, что если положить

$$s_i(\eta) = (-1)^i r_i(-\eta), \qquad t_i(\eta) = (-1)^i q_i(-\eta), \tag{53}$$

то уравнение (50) переходит в (51), а уравнение (52) — в (49).

Следовательно, уравнения (35) и (36) будут удовлетворены, если функции $\varphi_i(\eta)$ и $\psi_i(\eta)$ даются формулами (47) и (48), в которых полиномы n-ой степени $q_i(\eta)$, $r_i(\eta)$, $s_i(\eta)$, $t_i(\eta)$ определяются уравнениями (49) и (51) вместе с соотношениями (53).

Очевидно, что этот результат можно сформулировать еще так: функции $\varphi_i(\eta)$ и $\psi_i(\eta)$, являющиеся решением уравнений (35) и (36), имеют вид

$$\varphi_i(\eta) = X(\eta)q_i(\eta) + (-1)^i Y(\eta)s_i(-\eta), \tag{54}$$

$$\psi_i(\eta) = X(\eta)s_i(\eta) + (-1)^i Y(\eta)q_i(-\eta), \tag{55}$$

где полиномы n-ой степени $q_i(\eta)$ и $s_i(\eta)$ определяются уравнениями

$$q_i(\eta) = \frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1 X(\eta')\frac{A(\eta,\eta')q_i(\eta') - A(\eta',\eta')q_i(\eta)}{\eta'-\eta}d\eta' +$$
$$+(-1)^i\frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1 Y(\eta')\frac{A(\eta,\eta')s_i(-\eta') - A(\eta',\eta')s_i(-\eta)}{\eta'-\eta}d\eta' + R_i(\eta), \tag{56}$$

$$
\begin{gathered}
s_i(\eta) = \frac{\lambda}{2}\eta\int\limits_0^1 X(\eta')\,\frac{A(\eta,\eta')\,s_i(\eta) - A(\eta',\eta')\,s_i(\eta)}{\eta'-\eta}\,d\eta' + \\
+ (-1)^i\frac{\lambda}{2}\eta\int\limits_0^1 Y(\eta')\,\frac{A(\eta,\eta')\,q_i(-\eta') - A(\eta',\eta')\,q_i(-\eta)}{\eta'-\eta}\,d\eta'.
\end{gathered} \tag{57}
$$

Заметим, что нулевые члены полиномов $q_i(\eta)$ и $s_i(\eta)$ на основании (56), (57) и (12) равны

$$q_i(0) = P_i(0), \qquad s_i(0) = 0. \tag{58}$$

Полученные выше результаты справедливы при любой индикатрисе рассеяния, представленной формулой (2). Сейчас мы рассмотрим пример применения этих результатов.

Случай двухчленной индикатрисы рассеяния. Предположим, что индикатриса рассеяния имеет вид

$$x(\gamma) = 1 + x_1\cos\gamma. \tag{59}$$

Коэффициенты отражения и пропускания при такой индикатрисе получил Чандрасекар [7]. Мы найдем их в качестве примера применения общей теории.

В данном случае

$$A(\eta,\zeta) = 1 + x_1(1-\lambda)\,\eta\zeta \tag{60}$$

и

$$\Psi(\eta) = \frac{\lambda}{2}[1 + x_1(1-\lambda)\,\eta^2]. \tag{61}$$

Поэтому функции $X(\eta)$ и $Y(\eta)$ должны быть найдены из уравнений (42) и (43) при характеристической функции (61).

Полиномы $q_i(\eta)$ и $s_i(\eta)$ при учете (58) следует искать в виде

$$q_0(\eta) = 1 + C_0\eta, \qquad s_0(\eta) = D_0\eta, \tag{62}$$

$$q_1(\eta) = C_1\eta, \qquad s_1(\eta) = D_1\eta. \tag{63}$$

Подставляя эти выражения в уравнения (56) и (57), получаем

$$C_0 = -\frac{\lambda}{\Delta}(1-\lambda)\,x_1[(2-\lambda\alpha_0)\,\alpha_1 - \lambda\beta_0\beta_1], \tag{64}$$

$$D_0 = -\frac{\lambda}{\Delta}(1-\lambda)\,x_1[(2-\lambda\alpha_0)\,\beta_1 - \lambda\beta_0\alpha_1], \tag{65}$$

$$C_1 = \frac{2}{\Delta}(1-\lambda)(2-\lambda\alpha_0), \tag{66}$$

$$D_1 = \frac{2}{\Delta}(1-\lambda)\lambda\beta_0, \tag{67}$$

где введены обозначения

$$\Delta = (2-\lambda\alpha_0)^2 - (\lambda\beta_0)^2, \tag{68}$$

$$\alpha_k = \int_0^1 X(\eta)\eta^k\,d\eta, \quad \beta_k = \int_0^1 Y(\eta)\eta^k\,d\eta. \tag{69}$$

На основании формул (54), (55), (62) и (63) имеем

$$\varphi_0(\eta) = (1 + C_0\eta)X(\eta) - D_0\eta Y(\eta), \tag{70}$$

$$\psi_0(\eta) = D_0\eta X(\eta) + (1 - C_0\eta)Y(\eta), \tag{71}$$

$$\varphi_1(\eta) = C_1\eta X(\eta) + D_1\eta Y(\eta), \tag{72}$$

$$\psi_1(\eta) = D_1\eta X(\eta) + C_1\eta Y(\eta). \tag{73}$$

Подстановка выражений (70) — (73) в формулы (30) и (31) (при $n = 1$) дает искомые величины $\rho(\eta, \zeta)$ и $\sigma(\eta, \zeta)$.

Альбедо атмосферы и освещенность поверхности. Для практических применений большой интерес представляет альбедо атмосферы, т. е. ее полная отражательная способность. Так называемое „плоское альбедо“ определяется формулой

$$A_p(\zeta) = 2\int_0^1 \rho(\eta, \zeta)\,\eta d\eta, \tag{74}$$

а „сферическое альбедо“ равно

$$A_s = 2\int_0^1 A_p(\zeta)\,\zeta\,d\zeta. \tag{75}$$

Другой величиной, важной для практики, является освещенность поверхности, к которой примыкает атмосфера. Если альбедо поверхности равно нулю, то для ее освещенности имеем

$$E(\zeta) = V(\zeta) + S\zeta, \tag{76}$$

где

$$V(\zeta) = e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}} + 2\int_0^1 \sigma(\eta,\zeta)\,\eta d\eta, \tag{77}$$

Сравнивая между собой формулы (74) и (32), получаем

$$A_p(\zeta) = 1 - \frac{1}{\zeta}\varphi_1(\zeta), \tag{78}$$

а значит

$$A_s = 1 - 2\int_0^1 \varphi_1(\zeta)\,d\zeta. \tag{79}$$

Сравнение (77) с (33) дает

$$V(\zeta) = \frac{1}{\zeta}\psi_1(\zeta). \tag{80}$$

Таким образом, для нахождения альбедо атмосферы и освещенности поверхности при любой индикатрисе рассеяния достаточно знать лишь вспомогательные функции $\varphi_1(\eta)$ и $\psi_1(\eta)$.

При индикатрисе рассеяния (59) на основании формул (78) — (80) и приведенных выше выражений для функций $\varphi_1(\eta)$ и $\psi_1(\eta)$ получаем

$$A_p(\zeta) = 1 - 2\frac{1-\lambda}{\Delta}[(2-\lambda\alpha_0)X(\zeta) + \lambda\beta_0 Y(\zeta)], \tag{81}$$

$$A_s = 1 - 4\frac{1-\lambda}{\Delta}[(2-\lambda\alpha_0)\alpha_1 + \lambda\beta_0\beta_1], \tag{82}$$

$$V(\zeta) = 2\frac{1-\lambda}{\Delta}[\lambda\beta_0 X(\zeta) + (2-\lambda\alpha_0)Y(\zeta)]. \tag{83}$$

При $\lambda = 1$ неопределенность в этих формулах устраняется при помощи соотношения

$$\begin{gathered}\frac{\Delta}{1-\lambda} = 4\left(1 - \frac{\lambda}{3}x_1 + \lambda x_1 \alpha_2\right) - \\ - \lambda x_1[2(\alpha_0\alpha_2 - \beta_0\beta_2) + (1-\lambda)x_1(\alpha_2^2 - \beta_2^2)],\end{gathered} \tag{84}$$

которое легко находится из уравнения (42).

Ленинградский Государственный
университет

DIFFUSE REFLECTION AND TRANSMISSION OF LIGHT BY AN ATMOSPHERE WITH ANISOTROPIC SCATTERING

V. V. SOBOLEV

The investigation started in [1] of the linear integral equations for the reflection and transmission coefficients $\rho(\eta, \zeta)$ and $\sigma(\eta, \zeta)$ and for the auxiliary functions $\varphi_i(\eta)$ and $\psi_i(\eta)$ is continued. The complementary relations for these quantities are found. The general method is given which enables one to obtain the functions $\varphi_i(\eta)$ and $\psi_i(\eta)$ in terms of Chandrasekhar's functions $X(\eta)$ and $Y(\eta)$. As an example the case of the two-term scattering indicatrix is considered. The formulae are given for the albedo of the atmosphere and the illuminance of the surface.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Соболев*, ДАН СССР, 69, 353, 547, 1949.
2. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, 1956.
3. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 45, 528, 1968.
4. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 26, 22, 1949.
5. *В. А. Амбарцумян*, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 3, 97, 1942.
6 *В. А. Амбарцумян*, ЖЭТФ, 13, 224, 1943.
7. *S. Chandrasekhar*, Radiative Transfer, Oxford, 1950. (Русск. перевод: С. Чандрасекар, Перенос лучистой энергии, ИЛ, 1953).
8. *T. W. Mallikin*, Ap. J. 139, 379, 1267, 1964; 147, 858, 1967.
9. *I. W. Busbridge*, Ap. J. 149, 195, 1967.
10. *И. Н. Минин*, Астрон. ж., 43, 1244, 1966.
11. *I. Kuscer*, J. Math. Phys., 34, 256, 1956.