

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР  
АСТРОФИЗИКА

ТОМ 4

НОЯБРЬ, 1968

ВЫПУСК 4

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРЯМЫХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ  
УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА НЕСТАЦИОНАРНОГО  
ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

С. А. КАПЛАН, С. Ф. МОРОЗОВ, Л. В. ПИСКУНОВА

Поступила 28 ноября 1967

Описывается метод прямых (характеристик), позволяющий получать численное решение уравнений переноса нестационарного поля излучения при любой индикатрисе рассеяния с учетом сдвига по времени с относительно небольшой затратой машинного времени. Метод проиллюстрирован на одном примере (рис. 1 и 2).

Для изучения наиболее интересных в настоящее время нестационарных объектов в астрофизике в той или иной мере необходима разработка методов решения уравнений переноса нестационарного поля излучения. С теоретической точки зрения здесь можно сформулировать две основные проблемы: нестационарное поле излучения в средах, оптические свойства которых не меняются со временем [1, 2], и перенос излучения в нестационарной среде [3]. Как правило, в нестационарных объектах меняются со временем и оптические свойства среды, но в ряде случаев можно рассматривать и нестационарное поле излучения в статической среде. Здесь мы ограничимся этим случаем.

Уравнение переноса нестационарного поля излучения в плоскопараллельной среде, оптические и геометрические свойства которой не меняются со временем, имеет вид:

$$\alpha \frac{\partial J(\tau, \mu, u)}{\partial u} + \mu \frac{\partial J(\tau, \mu, u)}{\partial \tau} = -J(\tau, \mu, u) + \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu' \int_0^u K(\mu, \mu', u - u') J(\tau, \mu', u') du'. \quad (1)$$

Здесь  $\tau$  — оптическая глубина,  $u$  — время в безразмерных единицах (то есть выраженное через некоторый характерный параметр  $t_0$ ),  $\mu = \cos \theta$ , где  $\theta$  — угол между направлением луча и нормалью к слоям,  $\lambda$  — вероятность выживания кванта при единичном акте рассеяния,  $\alpha = 1/v_g t_0 \tau$ , где  $v_g$  — групповая скорость излучения,  $\tau$  — коэффициент рассеяния,  $K(\mu, \mu', u - u')$  — индикатриса рассеяния, допускающая также сдвиг по времени в единичном акте рассеяния.

Уравнение (1) имеет достаточно общий вид, но в ряде случаев его можно упростить. В физических приложениях обычно рассматривают это уравнение без сдвига по времени, то есть

$$K(\mu, \mu', u - u') = K_1(\mu, \mu') \delta(u - u'). \quad (2)$$

В [1, 2, 4] рассматривалось уравнение (1) с экспоненциальным сдвигом:

$$K(\mu, \mu', u - u') = K_2(\mu, \mu') I^{-1|u-u'|}. \quad (3)$$

Точнее, в [1, 2] изучалась одномерная задача, а в [4] трехмерная сферической индикатрисой  $K_2 \equiv 1$ .

Экспоненциальный характер сдвига по времени в (3) позволил применить здесь преобразование Лапласа [2, 4] для сведения нестационарного уравнения к соответствующему уравнению стационарной задачи и, если решение последнего известно, получить хотя бы выражения для лапласовых образов нестационарного поля излучения. В частности, подобным образом удалось сформулировать и функциональные уравнения для функций, аналогичных функциям Амбарцумяна [4—6]. При всех достоинствах, свойственных аналитическим решениям, этот метод все же очень ограничен, с одной стороны тем, что применим только к случаю экспоненциального сдвига по времени, а с другой — что, только в редких случаях можно здесь получить обратное преобразование Лапласа. В частности, вряд ли можно надеяться на сколько-нибудь успешное использование этого метода для несферической индикатрисы рассеяния.

Конечно, во многих случаях достаточную информацию можно получить и при решении одномерного уравнения [1], тем самым обойдя значительные математические трудности, но все же необходимо иметь и общие методы решения уравнения переноса нестационарного поля излучения в трехмерном случае.

Естественно, что решение уравнений переноса (1) в наиболее общей форме (несферическая индикатриса рассеяния с произвольной заданной формой сдвига по времени) может быть получено лишь численными методами. Известно уже несколько методов решения уравнений переноса на электронно-вычислительных машинах (ЭВМ). В

настоящей заметке предлагается еще один метод расчета уравнений переноса нестационарного поля излучения, который, по-видимому, еще не использовался для этой цели, но который позволяет получать достаточно полные результаты с относительно небольшой затратой машинного времени (правда, на машине высокого класса). Сущность этого метода, называемого методом прямых, заключается в следующем.

Заменяя в (1) неизвестную функцию  $J(\tau, \mu, u)$  на новую  $\tilde{J}(\tau, \mu, u) \times \times \exp(-\alpha u)$  и изменяя соответствующим образом индикатрису рассеяния, можно (1) записать в форме

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{\sqrt{\mu^2 + \alpha^2}} \cdot \frac{\partial \tilde{J}}{\partial u} + \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \alpha^2}} \cdot \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \tau} = \\ & = \int_{-1}^{+1} d\mu' \int_0^u K(\mu, \mu', u - u') \tilde{J}(\tau, \mu', u') du'. \end{aligned} \quad (4)$$

Левая часть этого уравнения представляет собой производную вдоль характеристики, определяемой дифференциальным уравнением  $\frac{d\tau}{du} = \frac{\mu}{\alpha}$ , то есть характеристики (4) есть однопараметрическое семейство прямых

$$\tau = \frac{\mu}{\alpha} u + \text{const}, \quad (5)$$

лежащих в плоскости  $(\tau, u)$  и параллельных ей плоскостям. Переходя в (4) к дифференцированию вдоль характеристик и опуская знак „тильда“, получим:

$$\frac{\partial J(\tau, \mu, u)}{\partial l} = \int_{-1}^{+1} d\mu' \int_0^u K(\mu, \mu', u - u') J(\tau, \mu', u') du'. \quad (6)$$

Уравнения (5) и (6) значительно удобнее для машинного счета, чем первоначальное уравнение (1).

Численное решение (6) производится таким образом. В трехмерном пространстве  $(\tau, \mu, u)$  область интегрирования  $(-1 < \mu < +1, \tau > 0, u > 0)$  разбивается плоскостями, перпендикулярными оси  $u$  на слои с шагом  $h$  (то есть  $u_n = \nu h$ , где  $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ). Задавая на начальной плоскости  $u = 0$  сетку значений  $(\tau, \mu)$ , исходя из заданного

начального условия для уравнений (1), получаем соответствующие значения на плоскости  $\nu + 1$  из известного значения на плоскости с номером  $\nu$  путем добавления к  $u$  величины  $h$ , а к  $\tau$  величины  $h\mu/\alpha$ . При этом уравнение (6) может быть записано в интегроразностной форме:

$$\begin{aligned} & J(\tau, \mu, u_{\nu+1}) - J\left(\tau - \frac{\mu}{\alpha} h, \mu, u_{\nu}\right) = \\ & = \frac{h\sqrt{\mu^2 + \alpha^2}}{2\alpha} \left[ \int_{-1}^{+1} d\mu' \sum_{i=0}^{\nu} a_i K(\mu, \mu', u_{\nu} - u_i) J\left(\tau - \frac{\mu}{\alpha} h, \mu', u_i\right) + \right. \\ & \left. + \int_{-1}^{+1} d\mu' \sum_{i=0}^{\nu+1} a_i K(\mu, \mu', u_{\nu+1} - u_i) J(\tau, \mu', u_i) \right] + O(h^2), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $a_i$  — коэффициенты квадратурных формул (в приводимом ниже примере были использованы коэффициенты формулы трапеций). Запись интегроразностного уравнения в форме (7), то есть в виде полусуммы двух интегральных членов, является одной из наиболее простых аппроксимаций и дает точность большую, чем аппроксимация по формуле Эйлера. Желательно было бы применить многоточечную разностную схему, но память использованной нами ЭВМ БЭСМ-2 не позволяет этого сделать. Заменяя интегрирование по  $\mu$  суммированием, получаем для метода итераций:

$$\begin{aligned} & J_{p+1}(\tau, \mu_k, u_{\nu+1}) - J\left(\tau - \frac{\mu_k}{\alpha} h, \mu_k, u_{\nu}\right) = \\ & = \frac{h\sqrt{\mu_k^2 + \alpha^2}}{2\alpha} \left[ \sum_{j=1}^{\nu} b_j \sum_{i=0}^{\nu} a_i K(\mu_k, \mu_j, u_{\nu} - u_i) J\left(\tau - \frac{\mu_k}{\alpha} h, \mu_j, u_{\nu}\right) + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{\nu} b_j \left( \sum_{i=0}^{\nu} a_i K(\mu_k, \mu_j, u_{\nu} - u_i) J(\tau, \mu_j, u_i) + \right. \right. \\ & \left. \left. + a_{\nu+1} K(\mu_k, \mu_j, 0) J_p(\tau, \mu_j, u_{\nu+1}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

где  $p$  — номер итерации, а значения функции  $J$  без индекса  $p$  в точках с  $u_i$ , где  $i < \nu + 1$ , есть точное значение, полученное после итерационного процесса. Здесь  $b_j$  тоже коэффициенты квадратурных формул (использованы коэффициенты Гаусса).

Уравнение (8) было запрограммировано и решено на ЭВМ БЭСМ-2 для случая индикатрисы рассеяния

$$K(\mu, \mu', u - u') = e^{-|u - u'|} \quad (9)$$

при  $\alpha = 3$  и граничных и начальных условиях:

$$J(0, \mu, u) = e^{-3u - |\mu - 1|}, \quad J(\tau, \mu, 0) = e^{-3\tau - |\mu - 1|}, \quad \mu > 0, \quad (10)$$

соответствующих следующей постановке задачи: на поверхности полубесконечной среды в начальный момент времени имеется импульс излучения, направленный преимущественно внутрь вдоль нормали к слоям, но имеющий определенный разброс по всем параметрам. Требуется проследить дальнейшую эволюцию импульса.

Результаты решения, потребовавшего примерно 10 часов машинного времени, представлены на рис. 1 и 2. Здесь при интегрировании по  $\mu$  использовалось 25 гауссовских точек, сетка по  $\tau$  равномерная, с шагом 0.01, шаг по  $u$  также равен 0.01. В итерационном процессе была взята точность  $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-2}$ . Точность метода проверялась обычным способом двойного просчета с увеличением шага в 2 раза по  $\tau$  и выбором 13 гауссовских точек интегрирования по  $\mu$ . В результате сравнения оказались верными один — два знака.

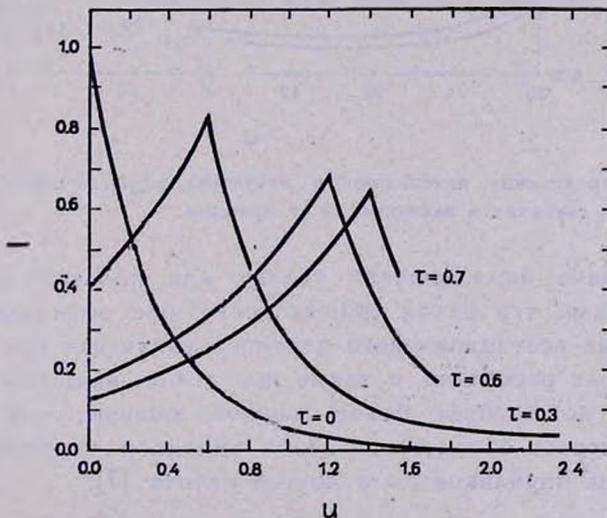


Рис. 1. Распределение интенсивности излучения, идущего внутрь ( $\mu=1$ ) на разных оптических глубинах в зависимости от времени.

На рис. 1 дано распределение интенсивности излучения, идущего в глубь среды ( $\mu = 1$ ) на разных глубинах в зависимости от времени.

На рис. 2 даны интенсивности излучения, идущего наружу ( $\mu = -1$ ), в том числе и кривая ( $\tau = 0$ ), описывающая интенсивность излучения, выходящего из среды. Некоторое повышение кривых рис. 2 при больших  $\mu$  связано с накоплением ошибок и не соответствует действительности.

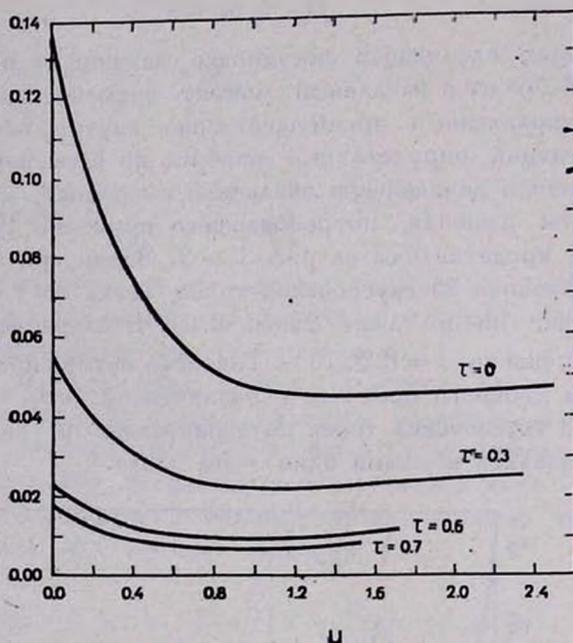


Рис. 2. Распределение интенсивности излучения, идущего наружу ( $\mu = -1$ ) на разных оптических глубинах в зависимости от времени.

Данная задача была решена только для проверки метода. Эта проверка показала, что метод прямых достаточно эффективен для решения уравнения нестационарного переноса излучения при произвольных индикатрисах рассеяния, а также при любых начальных и граничных условиях, но требует более мощной машины, чем БЭСМ-2.

Математическое обоснование этого метода и теорема о существовании решения опубликованы в другой работе [7].

## APPLICATION OF THE METHODS OF DIRECT LINES TO THE SOLUTION OF TRANSFER EQUATION FOR NONSTATIONARY RADIATION FIELD

S. A. KAPLAN, S. F. MOROSOV, L. V. PISCOUNOVA

The method of direct lines (characteristic) for numerical solution of transfer equation is described. It is possible to take into account the different forms of indicatrix of diffusion with displacement in time. The application of the methods is illustrated by solution of one problem with results given in Figures 1 and 2. These solutions are obtained with a short period of time of calculation.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. В. Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, 1956.
2. И. Н. Минин, Сб. Теория звездных спектров, стр. 159, Наука, 1966.
3. С. А. Каплан, Астрон. ж., 39, 702, 1962.
4. И. Н. Минин, ДАН СССР, 154, 1059, 1964.
5. S. Ueno, J. Math. Analysis and Appl., 4, № 1, 1962.
6. M. Wing, An Introduction to Transport Theory, New York, 1962.
7. С. Ф. Морозов, Л. В. Пискунова, Журн. вычислительной матем. и матем. физики, 8, № 6, 1242, 1968.