АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 4 АВГУСТ, 1968 ВЫПУСК 3

НЕИЗОТРОПНОЕ РАССЕЯНИЕ СВЕТА В АТМОСФЕРЕ БОЛЬШОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ТОЛЩИНЫ

В. В. СОБОЛЕВ

Поступила 13 февраля 1968

Рассматривается диффузия излучения в атмосфере большой оптической толщины при произвольной индикатрисе рассеяния. В дополнение к полученным ранее [8] асимптотическим формулам для коэффициентов отражения и пропускания находятся асимптотические формулы для вспомогательных функций $\varphi_i(\eta, \tau_0)$ и $\psi_i(\eta, \tau_0)$. Особо рассматривается атмосфера большой оптической толщины при малом истинном поглощении. В этом случае искомые величины выражаются через аналогичные величины в случае полубесконечной среды при чистом рассеянии.

При изучении ряда астрофизических объектов (например, планетных атмосфер и пылевых туманностей) мы встречаемся с задачей о диффузии излучения при несферической индикатрисе рассеяния. Такую задачу для полубесконечной атмосферы впервые рассмотрел В. А. Амбарцумян [1], выразивший коэффициент отражения света атмосферой через вспомогательные функции $\varphi_i(\eta)$ и получивший для их определения систему нелинейных интегральных уравнений. В дальнейшем Чандрасекар [2], рассматривая неизотропное рассеяние света в атмосфере конечной оптической толщины τ_0, выразил коэффициенты отражения и пропускания через вспомогательные функции $\varphi_i(\eta, \tau_0)$ и $\psi_i(\eta, \tau_0)$.

Указанные функции играют важную роль в теории неизотропного рассеяния света. Если они определены, то легко могут быть найдены интенсивности излучения, выходящего из атмосферы при различных источниках излучения (см. [3] и [4]).

Особый интерес представляет атмосфера большой оптической толщины ($\tau_0 \gg 1$). Для такой атмосферы могут быть получены асимптотические формулы, выражающие интенсивности выходящего из нее излучения через интенсивности излучения, выходящего из полубесконечной среды. Подобные формулы были найдены ранее автором [3, 5, 6] для случая изотропного рассеяния света.

Обобщение этих формул на случай произвольной индикатрисы рассеяния не составляет труда. Недавно [7, 8] были даны асимптотические формулы для коэффициентов отражения и пропускания. Теперь мы получаем асимптотические формулы, выражающие функции $\varphi_i(\eta, \tau_0)$ и $\psi_i(\eta, \tau_0)$ через функции $\varphi_i(\eta)$.

В качестве частного случая в статье рассматривается также свечение атмосферы большой оптической толщины при малом истинном поглощении. В данном случае находятся асимптотические формулы как для коэффициентов отражения и пропускания, так и для вспомогательных функций. Эти величины выражаются через соответствующие величины, характеризующие свечение полубесконечной среды при чистом рассеянии.

Асимптотические формулы для коэффициентов отражения и пропускания. Будем считать, что атмосфера, состоящая из плоскопараллельных слоев, освещена параллельными лучами, падающими под углом $\arccos\zeta$ к нормали и создающими освещенность перпендикулярной к ним площадки, равную πS. Интенсивность излучения, диффузно-отраженного атмосферой под углом $\arccos\eta$ к нормали, обозначим через $S\rho(\eta, \zeta, \tau_0)\zeta$, а интенсивность излучения, диффузно-пропущенного атмосферой под углом $\arccos\eta$ к нормали, — через $S\sigma(\eta, \zeta, \tau_0)\zeta$. Величины $\rho(\eta, \zeta, \tau_0)$ и $\sigma(\eta, \zeta, \tau_0)$ будем называть коэффициентами отражения и пропускания соответственно.

Вообще говоря, величины ρ и σ зависят не только от η и ζ, но и от азимута (кроме случая нормального падения внешнего излучения). Однако для простоты мы допустим, что эти величины усреднены по азимуту (а при достаточно больших значениях τ_0 коэффициент пропускания практически не зависит от азимута).

Как недавно было установлено [7, 8], при $\tau_0 \gg 1$ коэффициенты отражения и пропускания определяются следующими асимптотическими формулами:

$$\rho(\eta, \zeta, \tau_0) = \rho(\eta, \zeta) - \frac{u(\eta)\,u(\zeta)}{1 - N^2 e^{-2k\tau_0}} MNe^{-2k\tau_0}, \tag{1}$$

$$\sigma(\eta, \zeta, \tau_0) = \frac{u(\eta)\,u(\zeta)}{1 - N^2 e^{-2k\tau_0}} Me^{-k\tau_0}, \tag{2}$$

где $\rho(\eta, \zeta)$ — усредненный по азимуту коэффициент отражения полубесконечной среды и $u(\eta)$ — интенсивность излучения, диффузно-пропущенного этой средой (нормированная определенным образом).

Входящие в (1) и (2) постоянные k, M и N можно выразить через величины, характеризующие поле излучения в глубоких слоях полубесконечной среды. Предположим, что индикатриса рассеяния разложена в ряд по полиномам Лежандра, то есть

$$x(\gamma) = \sum_0^n x_i P_i(\cos\gamma) \tag{3}$$

и λ — вероятность выживания фотона при элементарном акте рассеяния. Тогда, согласно В. А. Амбарцумяну [9], интенсивность излучения (в относительных единицах) дается формулой

$$i(\eta) = \frac{b(\eta)}{1-k\eta} = \frac{1}{1-k\eta}\sum_0^n b_i P_i(\eta), \tag{4}$$

где коэффициенты b_i определяются из системы уравнений, получающихся при подстановке (4) в соотношения

$$b_j = \frac{\lambda}{2} x_j \int_{-1}^{1} i(\eta) P_j(\eta)\, d\eta, \tag{5}$$

а постоянная k — из условия разрешимости этой системы.

Если функция $i(\eta)$ известна, то величины M и N находятся по формулам

$$M = 2\int_{-1}^{1} i^2(\eta)\, \eta\, d\eta, \tag{6}$$

$$N = 2\int_0^1 u(\eta)\, i(-\eta)\, \eta\, d\eta, \tag{7}$$

где функция $u(\eta)$ нормирована согласно условию

$$2\int_0^1 u(\eta)\, i(\eta)\, \eta\, d\eta = 1. \tag{8}$$

В случае чистого рассеяния ($\lambda = 1$, $k = 0$) мы обозначим коэффициенты отражения и пропускания соответственно через $\rho_0(\eta, \zeta, \tau_0)$ и $\sigma_0(\eta, \zeta, \tau_0)$. Из формул (1) и (2) при $k \to 0$ (см. [8]) получаем

$$\rho_0(\eta, \zeta, \tau_0) = \rho_0(\eta, \zeta) - \frac{4}{3}\frac{u_0(\eta)\,u_0(\zeta)}{\left(1-\frac{x_1}{3}\right)\tau_0 + \delta}, \tag{9}$$

$$\sigma_0(\eta, \zeta, \tau_0) = \frac{4}{3}\frac{u_0(\eta)\,u_0(\zeta)}{\left(1-\frac{x_1}{3}\right)\tau_0 + \delta}, \tag{10}$$

где $\rho_0(\eta, \zeta)$ и $u_0(\eta)$ — коэффициенты отражения и пропускания полубесконечной среды при чистом рассеянии, x_1 — первый коэффициент в разложении индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра, то есть

$$x_1 = \frac{3}{2}\int_0^\pi x(\gamma)\cos\gamma\sin\gamma\, d\gamma \tag{11}$$

и

$$\delta = 4\int_0^1 u_0(\eta)\,\eta^2\, d\eta. \tag{12}$$

Так как в данном случае $i(\eta) = 1$, то из (8) вытекает следующая нормировка функции $u_0(\eta)$:

$$2\int_0^1 u_0(\eta)\,\eta\, d\eta = 1. \tag{13}$$

Отметим еще, что функция $u_0(\eta)$ выражается через $\rho_0(\eta, \zeta)$ при помощи формулы

$$u_0(\eta) = \frac{3}{4}\left[\eta + 2\int_0^1 \rho_0(\eta, \zeta)\,\zeta^2\, d\zeta\right], \tag{14}$$

которая может быть получена разными способами (см. [10—12]).

Асимптотические формулы для функций $\varphi_i(\eta, \tau_0)$ *и* $\psi_i(\eta, \tau_0)$. Пользуясь приведенными выше асимптотическими формулами для коэффициентов отражения и пропускания, можно легко получить и асимптотические выражения для вспомогательных функций при $\tau_0 \gg 1$.

Как известно, связь между упомянутыми величинами дается следующими формулами:

$$\varphi_i(\eta) = P_i(\eta) + 2\eta\int_0^1 \rho(\eta, \zeta)\,P_i(-\zeta)\, d\zeta, \tag{15}$$

$$\varphi_i(\eta, \tau_0) = P_i(\eta) + 2\eta \int_0^1 \rho(\eta, \zeta, \tau_0) P_i(-\zeta)\, d\zeta, \tag{16}$$

$$\psi_i(\eta, \tau_0) = P_i(\eta)\, e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} + 2\eta \int_0^1 \sigma(\eta, \zeta, \tau_0) P_i(\zeta)\, d\zeta. \tag{17}$$

Подставляя (1) в (16) и (2) в (17) $\left(\text{без члена, содержащего } e^{-\frac{\tau_0}{\eta}}\right)$, при учете формулы (15), находим

$$\varphi_i(\eta, \tau_0) = \varphi_i(\eta) - 2c_i(-1)^i \frac{u(\eta)\,\eta}{1 - N^2 e^{-2k\tau_0}} MNe^{-2k\tau_0}, \tag{18}$$

$$\psi_i(\eta, \tau_0) = 2c_i \frac{u(\eta)\,\eta}{1 - N^2 e^{-2k\tau_0}} Me^{-k\tau_0}, \tag{19}$$

где обозначено

$$c_i = \int_0^1 u(\zeta) P_i(\zeta)\, d\zeta. \tag{20}$$

В. А. Амбарцумян [13] показал, что функция $u(\eta)$ определяется формулой

$$u(\eta) = \frac{\lambda}{2} \sum_0^n x_j c_j \frac{\varphi_j(\eta)}{1 - k\eta}, \tag{21}$$

а коэффициенты c_i находятся из системы уравнений, получающихся при подстановке (21) в (20).

Теперь мы дадим выражения для коэффициентов c_i в явном виде. Чтобы сделать это, применим формулу

$$Mu(\eta) = \bar{i}(\eta) - 2\int_0^1 \rho(\eta, \eta') \, i(-\eta')\, \eta'\, d\eta', \tag{22}$$

приведенную в [8]. Подставляя $u(\eta)$ из (22) в (20) и пользуясь (15), находим

$$Mc_i = \int_{-1}^1 i(\eta) P_i(\eta)\, d\eta - (-1)^i \int_0^1 i(-\eta)\, \varphi_i(\eta)\, d\eta. \tag{23}$$

Эту формулу можно немного преобразовать. Умножая (15) на $i(\eta)$, интегрируя по η в пределах от 0 до 1 и учитывая очевидное соотношение

$$i(-\eta) = 2\int_0^1 \rho(\eta, \eta')\, i(\eta')\eta'\, d\eta', \tag{24}$$

получаем

$$\int_{-1}^1 i(\eta)\, P_i(\eta)\, d\eta = \int_0^1 i(\eta)\, \varphi_i(\eta)\, d\eta. \tag{25}$$

Поэтому вместо (23) имеем

$$Mc_i = \int_0^1 \varphi_i(\eta)\,[i(\eta) - (-1)^i i(-\eta)]\, d\eta. \tag{26}$$

Таким образом, для функций $\varphi_i(\eta, \tau_0)$ и $\psi_i(\eta, \tau_0)$ мы получили асимптотические выражения (18) и (19), в которых функция $u(\eta)$ дается формулой (21), а постоянные c_i — формулой (26).

В случае чистого рассеяния мы обозначим вспомогательные функции через $\varphi_i^0(\eta,\tau_0)$ и $\psi_i^0(\eta, \tau_0)$. При помощи формул (9), (10) и (15) — (17) находим для них следующие асимптотические выражения:

$$\varphi_i^0(\eta, \tau_0) = \varphi_i^0(\eta) - \frac{8}{3}(-1)^i c_i^0 \frac{u_0(\eta)\,\eta}{\left(1 - \frac{x_1}{3}\right)\tau_0 + \delta}, \tag{27}$$

$$\psi_i^0(\eta, \tau_0) = \frac{8}{3} c_i^0 \frac{u_0(\eta)\,\eta}{\left(1 - \frac{x_1}{3}\right)\tau_0 + \delta}, \tag{28}$$

где через $\varphi_i^0(\eta)$ и c_i^0 обозначены функция $\varphi_i(\eta)$ и коэффициент c_i при $k = 0$.

Для определения коэффициентов c_i^0 мы можем подставить (14) в (20). Делая это и принимая во внимание (15), получаем

$$c_i^0 = (-1)^i \frac{3}{4} \alpha_{1i}^0 \quad \text{при} \quad i \neq 1 \tag{29}$$

и $c_1^0 = \frac{1}{2}$. Здесь использовано обозначение

$$\alpha_{ij}^0 = \int_0^1 \varphi_i^0(\eta)\,\eta^j\,d\eta. \tag{30}$$

Формулу (29) можно также получить из соотношения (26), если подставить в него приведенные ниже выражения (33), (34), (42) и положить $k \to 0$.

Асимптотические формулы (18), (19), (27) и (28) для функций $\varphi_i(\eta, \tau_0)$ и $\psi_i(\eta, \tau_0)$ справедливы при любой индикатрисе рассеяния. Из них, в частности, вытекают формулы, найденные автором [5, 6] в случае изотропного рассеяния.

Следует отметить, что Чандрасекар [10] для индикатрисы рассеяния $x(\gamma) = 1 + x_1 \cos\gamma$ выразил функции $\varphi_i(\eta, \tau_0)$ и $\psi_i(\eta, \tau_0)$ через две функции $X(\eta, \tau_0)$ и $Y(\eta, \tau_0)$. В этом случае асимптотические формулы для функций $X(\eta, \tau_0)$ и $Y(\eta, \tau_0)$ при $\tau_0 \gg 1$ были найдены В. В. Ивановым и В. В. Леоновым [14]. Вероятно, функции $\varphi_i(\eta, \tau_0)$ и $\psi_i(\eta, \tau_0)$ могут быть выражены через две функции $X(\eta, \tau_0)$ и $Y(\eta, \tau_0)$ и при произвольной индикатрисе рассеяния. В общем виде асимптотические формулы для $X(\eta, \tau_0)$ и $Y(\eta, \tau_0)$ получили недавно Карлстедт и Малликин [15].

Величины $\rho(\eta, \zeta, \tau_0)$ *и* $\sigma(\eta, \zeta, \tau_0)$ *при малых* k. Обычно в атмосферах коэффициент истинного поглощения $\varkappa$ гораздо меньше коэффициента рассеяния α. Поэтому величина $\lambda = \dfrac{\alpha}{\varkappa + \alpha}$ очень близка к 1. Этот случай заслуживает специального рассмотрения и мы сейчас применим к нему приведенные выше формулы.

Асимптотическая зависимость между величинами λ и k в данном случае имеет вид

$$k = \sqrt{(1-\lambda)(3-x_1)}\,. \tag{31}$$

В дальнейшем мы будем считать величину k малой, сохраняя в формулах лишь члены, содержащие k в степени не выше первой.

При малых k с принятой точностью имеем

$$i(\eta) = 1 + \frac{3k\eta}{3-x_1}. \tag{32}$$

Подстановка (32) в (6) и (7) при учете (8) дает

$$M = \frac{8k}{3-x_1}, \tag{33}$$

$$N = 1 - \frac{12k}{3 - x_1} \int_0^1 u_0(\eta)\, \eta^2 d\eta. \tag{34}$$

Найдем сначала асимптотические формулы для коэффициентов отражения и пропускания при $\tau_0 \gg 1$ и малых k. Для этого выражения (33) и (34) мы должны подставить в формулы (1) и (2). Вместе с тем следует использовать асимптотическую формулу для величины $\rho(\eta, \zeta)$ при малых k. Такая формула была получена ранее [12] при изучении рассеяния света в полубесконечной среде. Она имеет вид

$$\rho(\eta, \zeta) = \rho_0(\eta, \zeta) - \frac{4k}{3 - x_1} u_0(\eta)\, u_0(\zeta). \tag{35}$$

Подставляя в формулы (1) и (2) выражения (33), (34) и (35), а также заменяя $u(\eta)$ на $u_0(\eta)$, находим

$$\rho(\eta, \zeta, \tau_0) = \rho_0(\eta, \zeta) - \frac{4k}{3 - x_1}(1 + Qe^{-k\tau_0})\, u_0(\eta)\, u_0(\zeta), \tag{36}$$

$$\sigma(\eta, \zeta, \tau_0) = \frac{4k}{3 - x_1} Q u_0(\eta)\, u_0(\zeta), \tag{37}$$

где

$$Q = \frac{2e^{-k\tau_0}}{1 - \left(1 - \frac{6k\delta}{3 - x_1}\right) e^{-2k\tau_0}}, \tag{38}$$

а δ дается формулой (12).

Таким образом, коэффициенты отражения и пропускания атмосферы при $\tau_0 \gg 1$ и малом истинном поглощении с помощью формул (36) и (37) выражаются через коэффициенты отражения и пропускания полубесконечной атмосферы при чистом рассеянии.

Из формул (36) и (37) можно получить асимптотические формулы для величин $\rho(\eta, \zeta, \tau_0)$ и $\sigma(\eta, \zeta, \tau_0)$ в двух следующих важных случаях: 1) $k\tau_0 \gg 1$ (сильно поглощающая атмосфера), 2) $k\tau_0 \ll 1$ (слабо поглощающая атмосфера).

При $k\tau_0 \gg 1$ формулы (36) и (37) принимают вид

$$\rho(\eta, \zeta, \tau_0) = \rho_0(\eta, \zeta) - \frac{4k}{3 - x_1} u_0(\eta)\, u_0(\zeta), \tag{39}$$

$$\sigma(\eta, \zeta, \tau_0) = \frac{8k}{3 - x_1} e^{-k\tau_0} u_0(\eta)\, u_0(\zeta). \tag{40}$$

В этом случае коэффициент отражения $\rho(\eta, \zeta, \tau_0)$ совпадает с коэффициентом отражения $\rho(\eta, \zeta)$ полубесконечной атмосферы, а коэффициент пропускания очень мал.

При $k\tau_0 \ll 1$ вместо формул (36) и (37) получаем

$$\rho(\eta, \zeta, \tau_0) = \rho_0(\eta, \zeta) - \frac{4}{3} \frac{u_0(\eta) u_0(\zeta)}{\left(1 - \frac{x_1}{3}\right)\tau_0 + \delta}. \tag{41}$$

$$\sigma(\eta, \zeta, \tau_0) = \frac{4}{3} \frac{u_0(\eta) u_0(\zeta)}{\left(1 - \frac{x_1}{3}\right)\tau_0 + \delta}. \tag{42}$$

В данном случае коэффициенты отражения и пропускания являются такими же, как и при чистом рассеянии.

Различие между рассматриваемыми случаями состоит в том, что в первом из них фотоны в значительной мере гибнут в атмосфере (то есть испытывают в ней истинное поглощение), а во втором — почти все выходят наружу.

Необходимо подчеркнуть, что в обоих рассматриваемых случаях функциональные формы величин $\rho(\eta, \zeta, \tau_0)$ и $\sigma(\eta, \zeta, \tau_0)$ совпадают (различаются лишь коэффициенты, зависящие от k и τ_0). Это значит, что из сравнения между собой теоретических и наблюденных значений величин $\rho(\eta, \zeta, \tau_0)$ или $\sigma(\eta, \zeta, \tau_0)$ нельзя сделать выбор между этими случаями.

Однако такой выбор легко осуществляется при наличии наблюденных значений как коэффициента отражения, так и коэффициента пропускания.

Функции $\varphi_i(\eta, \tau_0)$ *и* $\psi_i(\eta, \tau_0)$ *при малых* k. Найдем теперь асимптотические формулы для функций $\varphi_i(\eta, \tau_0)$ и $\psi_i(\eta, \tau_0)$ при $\tau \gg 1$ и малых k.

Чтобы сделать это, подставим в формулы (18) и (19) выражения (33) и (34). Кроме того, подставим в них следующие асимптотические выражения для функций $\varphi_i(\eta)$ при малых k:

$$\varphi_i(\eta) = \varphi_i^0(\eta) - \frac{6k}{3 - x_1} \alpha_{i1}^0 u_0(\eta)\eta \quad (i \neq 1) \tag{43}$$

и

$$\varphi_1(\eta) = \frac{4k}{3 - x_1} u_0(\eta)\eta, \tag{44}$$

полученные при рассмотрении полубесконечной среды [12].

Заменяя также $u(\eta)$ на $u_0(\eta)$, c_i на c_i^0 и пользуясь формулой (29), находим

$$\varphi_i(\eta,\ \tau_0) = \varphi_i^0(\eta) - \frac{6k}{3 - x_1}\, \alpha_{i1}^0 (1 + Qe^{-k\tau_0})\, u_0(\eta)\, \eta, \tag{45}$$

$$\psi_i(\eta,\ \tau_0) = \frac{6k}{3 - x_1} (-1)^i\, \alpha_{i1}^0 Q u_0(\eta)\, \eta \tag{46}$$

при $i \neq 1$ и

$$\varphi_i(\eta,\ \tau_0) = \frac{4k}{3 - x_1} (1 + Qe^{-k\tau_0})\, u_0(\eta)\, \eta, \tag{47}$$

$$\psi_i(\eta,\ \tau_0) = \frac{4k}{3 - x_1}\, Q u_0(\eta)\, \eta. \tag{48}$$

Здесь, как и выше, функция $\varphi_i^0(\eta)$ представляет собой функцию $\varphi_i(\eta,\ \tau_0)$ при $\tau_0 = \infty$ и чистом рассеянии, величина α_{i1}^0 определяется формулой (30) при $j = 1$ и функция $u_0(\eta)$ есть коэффициент пропускания света полубесконечной средой при $\lambda = 1$, нормированный согласно условию (13).

В случае сильно поглощающей атмосферы (то есть при $k\tau_0 \gg 1$) полученные формулы принимают вид

$$\varphi_i(\eta,\ \tau_0) = \varphi_i^0(\eta) - \frac{6k}{3 - x_1}\, \alpha_{i1}^0 u_0(\eta)\, \eta, \tag{49}$$

$$\psi_i(\eta,\ \tau_0) = \frac{12k}{3 - x_1} (-1)^i\, \alpha_{i1}^0 e^{-k\tau_0} u_0(\eta)\, \eta \tag{50}$$

при $i \neq 1$ и

$$\varphi_i(\eta,\ \tau_0) = \frac{4k}{3 - x_1}\, u_0(\eta)\, \eta, \tag{51}$$

$$\psi_i(\eta,\ \tau_0) = \frac{8k}{3 - x_1}\, e^{-k\tau_0} u_0(\eta)\, \eta. \tag{52}$$

В случае слабо поглощающей атмосферы (то есть при $k\tau_0 \ll 1$) имеем

$$\varphi_i(\eta,\ \tau_0) = \varphi_i^0(\eta) - \frac{2\alpha_{i1}^0}{\left(1 - \frac{x_1}{3}\right)\tau_0 + \delta}\, u_0(\eta)\, \eta, \tag{53}$$

$$\psi_i(\eta,\ \tau_0) = (-1)^i \frac{2\alpha_{i1}^0}{\left(1 - \frac{x_1}{3}\right)\tau_0 + \delta}\, u_0(\eta)\, \eta \tag{54}$$

при $i \neq 1$ и

$$\varphi_1(\eta, \tau_0) = \psi_1(\eta, \tau_0) = \frac{4}{3} \frac{u_0(\eta)\,\eta}{\left(1 - \frac{x_1}{3}\right)\tau_0 + \delta}. \tag{55}$$

Формулы (49)—(55) при индикатрисе рассеяния $x(\gamma) = 1 + x_1 \cos\gamma$ переходят в формулы, найденные ранее В. В. Ивановым и В. В. Леоновым [14].

Полученные в этой статье асимптотические формулы для коэффициентов отражения и пропускания и для вспомогательных функций могут иметь различные применения в астрофизике и геофизике. Некоторые из таких применений будут рассмотрены позднее.

Ленинградский государственный
университет

ANISOTROPIC LIGHT SCATTERING IN AN ATMOSPHERE OF LARGE OPTICAL THICKNESS

V. V. SOBOLEV

Diffusion of radiation in an atmosphere of large optical thickness is considered. An arbitrary scattering indicatrix is assumed. In addition to the previously found [8] asymptotic formulae for the reflection and the transmission coefficients, the asymptotic formulae are given for the auxiliary functions $\varphi_i(\eta, \tau_0)$ and $\psi_i(\eta, \tau_0)$. The case of the atmosphere of large optical thickness and small true absorption has been especially considered. In this case the quantities under consideration can be expressed in terms of similar quantities for the purely scattering semi-infinite medium.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян*, ЖЭТФ, 13, 224, 1943.
2. *S. Chandrasekhar*, Ap. J., 105, 441, 1947.
3. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, 1956.
4. *И. Н. Минин*, Вестн. Ленингр. ун-та, № 1, 1961.
5. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 34, № 3, 1957.
6. *В. В. Соболев*, ДАН СССР, 155, 316, 1964.
7. *H. C. van de Hulst*, *K. Grossman*, Proc. of Conference of the Atmospheres of Mars and Venus, Tucson, 1967.
8. *В. В. Соболев*, ДАН СССР, 179, 45, 1968.
9. *В. А. Амбарцумян*, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 3, 97, 1942.

10. *S. Chandrasekhar*, Radiative Transfer, Oxford, 1950. (Русск. перевод: С. Чандрасекар, Перенос лучистой энергии, ИЛ, 1953).
11. *I. W. Busbridge*, The Mathematics of Radiative Transfer, Cambridge, 1960.
12. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 45, 254, 1968.
13. *В. А. Амбарцумян*, ДАН СССР, 43, 106, 1944.
14. *В. В. Иванов, В. В. Леонов*, Изв. АН СССР, физика атмосферы и океана, том I, № 8, 1965.
15. *J. L. Carlstedt, T. W. Mullikin*, Ap. J., Suppl. ser., 12, No. 113, 1966.